С.Л. Василенко

Числовые совпадения

Желания охотника и медведя не совпадают

В популярной литературе числовые совпадения чаще всего увязывают с нумерологией, эзотерическими интерпретациями, странными совпадениями в нашей жизни и проч.

Между тем, это обычный предмет математики.

Взять хотя бы те же алгебраические тождества [1].

В теории и практике арифметических операций ещё с античных времён хорошо известны способы приближённого счёта.

Они являются составной частью вычислительной математики – теории численных методов решения типовых математических задач.

Сегодня человеку без них тоже не обойтись.

Даже быстродействующие компьютеры с огромной памятью оперируют с фиксированным набором значащих цифр конкретных чисел.

В математике принято различать действительно приближённые методы или аппроксимирующие формулы по вычислению чего-либо с той или иной степенью достоверности результатов анализа.

В частности, представление иррациональных чисел в виде рациональной дроби с некоторой точностью. Причём этой точностью можно управлять. Например, путём изменения подходящей длины цепной дроби.

Но существуют чисто отвлечённые формальные зависимости, которые не имеют, ни физического, ни особого математического смысла. Те же наугад подобранные соотношения-взаимосвязи некоторых констант [2].

В этом случае имеет смысл говорить не столько о приближении, сколько о численном или математическом совпадении [3] некоторого набора цифр. И не более того.

Очень часто объектом рассмотрения в формулах на такое совпадение являются фундаментальные постоянные: число π, основание натурального логарифма e, константа золотого сечения Φ и некоторые другие.

Хотя если разобраться, то не менее интересны и разнообразны по своим свойствам обычные положительные целые числа.

Ну, а безупречным примером в этом контексте, пожалуй, можно назвать мнимые сопряжённые числа вида $\alpha \pm i\beta$, где i – мнимая единица. Подобные пары, как правило, являются корнями алгебраических полиномов высоких порядков.

Математическое совпадение часто включает в себя целые числа. Характерно-отличительная особенность заключается в том, что возникающее в определенных вычислениях действительное число рассматривается как "близкая" аппроксимация к небольшому целому числу, к кратному числу или степени десяти (основания системы счисления), либо в общем случае к рациональному числу с маленьким знаменателем.

Некоторые совпадения являются проявленным результатом глубоких математических фактов или закономерностей. Другие появляются совершенно неожиданно. Что называется, как «гром среди ясного неба».

Существует бесконечное число формирования математических выражений с помощью конечного количества символов. Поэтому подмножество используемых символов и точность аппроксимирующего равенства должны быть выражены наиболее очевидным способом для оценки математического совпадения.

Но здесь нет готовых стандартов.

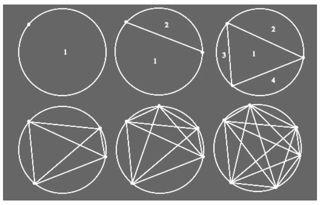
Тому пример *первый закон малых чисел*[1] (Гарднер, 1980): недостаточно малых чисел, чтобы удовлетворить многие требования, предъявляемые к ним.

Тем не менее, вследствие недопонимания закона больших чисел многие люди склонны ошибочно считать малые выборки репрезентативными по множеству, из которого они были получены.

Применительно к совпадениям весьма наглядное представление также даёт *второй закон малых чисел*: если два числа выглядят равными, это не обязательно так.

Например, первыми значениями интерполяционного полинома[2]

$$g(n) = C_n^4 + C_n^2 + 1 = \left(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18 + 24\right)/24$$



являются числа (1, 2, 4, 8, 16), воспроизводящие степень 2^n.

Однако затем идёт иное продолжение (A000127): 31, 57, 99, ...

Надо сказать, данный пример вовсе не надуманный.

Он реально определяет количество частей-фрагментов круга при его делении хордами так, чтобы никакие три из них не пересекались в одной точке (*Moser's circle problem*).

А вот функция целой части $\left\lceil e^{(n-1)/2} \right\rceil$ вначале генерирует числа Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55). Но затем "сбивается" на другое продолжение (A005181): 91, 149...

Совпадения в целых числах

Целые числа являются предметом исследования теории чисел.

Наравне с геометрией это наиболее древний раздел математики.

За многие тысячелетия человек не только придумал сами числа, которых в природе не существует, но и открыл для себя многие их удивительнейшие свойства. Достаточно вспомнить пифагоровы тройки, египетский треугольник $3^2 + 4^2 = 5^2$ и др.

Одной из подобных отличительных черт является эквивалентность в разных выражениях, несмотря на проводимые преобразования-вычисления.

Имеется значительное многообразие подобных форм-соотношений.

Наиболее отчётливо различные совпадения целых чисел проявляются в разных видах *самовлюблённых чисел* (in love with themselves).

Их ещё называют числа-нарциссы (narcissistic numbers[3]). Согласно греческой мифологии сын речного бога Нарцисс[4] во время охоты увидел в реке своё отражение, влюбился в самого себя, не смог с ним расстаться и умер от голода и/или страдания. Когда пришли за его телом, на том месте, где оно должно было быть, вырос цветок нарцисс.

С тех пор самовлюблённым называют такое число, которое путём разных математических манипуляций представляется через собственные цифры [4, с. 163–175].

То есть оно равно некоторому арифметическому выражению от своих цифр.

Числа постоянного основания (constant basenumbers) – красиво раскладываются на сумму степеней некоторой константы – основания k с показателями, равными цифрам исходного числа [5]:

$$\overline{ab \ldots cd} = k^a + k^b + \ldots + k^c + k^d .$$

[1] http://mathworld.wolfram.com/StrongLawofSmallNumbers.html.
[2] http://mathworld.wolfram.com/CircleDivisionbyChords.html.
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Narcissistic_number, http://mathworld.wolfram.com/NarcissisticNumber.html.
[4] http://ru.wikipedia.org/?oldid=42088666.

Например,

$1033 = 8^{1} + 8^{0} + 8^{3} + 8^{3}$,
$4624 = 4^4 + 4^6 + 4^2 + 4^4$,
$595968 = 4^5 + 4^9 + 4^5 + 4^9 + 4^6 + 4^8$,
$3909511 = 5^3 + 5^9 + 5^0 + 5^9 + 5^5 + 5^1 + 5^1$,
$13177388 = 7^1 + 7^3 + 7^1 + 7^7 + 7^7 + 7^3 + 7^8 + 7^8$,
$52135640 = 19^5 + 19^2 + 19^1 + 19^3 + 19^5 + 19^6 + 19^4 + 19^0$.

Совершенные цифровые инварианты (perfect digit-to-digit invariants[5] – PDDI) или **числа Мюнхгаузена**[6] – равны сумме своих цифр, возведенных в эту же цифровую степень:

$$\underline{ab\ldots cd = a^a + b^b + \ldots + c^c + d^d}\,.$$

Не считая тривиальных (0 и 1), таких чисел оказывается всего два (A046253[7]):
$3435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$,
$438579088 = 4^4 + 3^3 + 8^8 + 5^5 + 7^7 + 9^9 + 0^0 + 8^8 + 8^8$.

Зато есть два реверсных аналога (цифры-степени в обратном порядке, A048341):

$$\underline{ab\ldots cd = a^d + b^c + \ldots + c^b + d^a}$$

$48625 = 4^5 + 8^2 + 6^6 + 2^8 + 5^4$,
$397612 = 3^2 + 9^1 + 7^6 + 6^7 + 1^9 + 2^3$.

Число как **степень суммы цифр** (A023106):

$$\underline{ab\ldots cd = (a + b + \ldots + c + d)^m}\,.$$

Примеры разложения числа в степень с основанием, равным сумме его цифр:

512	=	$(5+1+2)^3$	=	8^3**;**
4913	=	$(4+9+1+3)^3$	=	17^3;
17576	=	$(1+7+5+7+6)^3$	=	26^3**;**
234256	=	$(2+3+4+2+5+6)^4$	=	22^4**;**
1679616	=	$(1+6+7+9+6+1+6)^4$	=	36^4**;**
17210368	=	$(1+7+2+1+0+3+6+8)^5$	=	28^5**;**
8303765625	=	$(8+3+0+3+7+6+5+6+2+5)^6$	=	45^6**;**
24794911296	=	$(2+4+7+9+4+9+1+1+2+9+6)^6$	=	54^6**;**
6722988818432	=	$(6+7+2+2+9+8+8+8+1+8+4+3+2)^7$	=	68^7**;**
72301961339136	=	$(7+2+3+0+1+9+6+1+3+3+9+1+3+6)^8$	=	54^8 **...**

Сочетания сумм степеней.

$298 = (2^2 + 9^2 + 8^2) + (2^2 + 9^2 + 8^2)$;
$336 = (3^1 + 3^1 + 6^1) + (3^2 + 3^2 + 6^2) + (3^3 + 3^3 + 6^3)$;
$444 = (4^1 + 4^1 + 4^1) + (4^2 + 4^2 + 4^2) + (4^3 + 4^3 + 4^3) + (4^3 + 4^3 + 4^3)$.

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Perfect_digit-to-digit_invariants.
[6] http://mathworld.wolfram.com/MuenchhausenNumber.html.
[7] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences™ (OEIS™) – http://oeis.org/.

Сумма или разность двух квадратов.

Некоторые числа с чётным количеством цифр $2m$ представляются в виде суммы квадратов их m-разрядных половинок (начинаться с нуля могут только вторые половинки), то есть (A055616):

$$\underline{n = x//y \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = n}.$$

$88\,33 = 88^2 + 33^2$,
$9412\,2353 = 9412^2 + 2353^2$,
$17650\,38125 = 17650^2 + 38125^2$,
$1379310\,3448276 = 1379310^2 + 3448276^2$ и так далее.

Аналогичное построение касается разностей квадратов двух половинок (A162700)

$$n = x//y \quad \Rightarrow \quad y^2 - x^2 = n.$$

$34\,68 = 68^2 - 34^2$,
$416\,768 = 768^2 - 416^2$,
$49890\,86476 = 86476^2 - 49890^2$ и так далее.

Можно рассматривать числа с нечётным количеством цифр, например:
$588\,2353 = 588^2 + 2353^2$.
Кстати, здесь имеет место равенство $1/17 \approx 0{,}0588\,2353$.

Сумма трёх кубов.

Число, содержащее $3m$ цифр, раскладывается на сумму его трёх одинаковых секций (A056733): 153, 370, 371, 407, 165033, 221859, 336700, 336701, 340067, 341067, 407000, 407001, 444664, 487215, 982827, 983221, 166500333, 296584415, 333667000, 333667001...

Например,
$22\,18\,59 = 22^3 + 18^3 + 59^3$,
$333\,667\,001 = 333^3 + 667^3 + 1^3$.

Дружелюбные пары (amicable pairs) – каждое число пары равно сумме квадратов двух половин другого числа [5]:

$$3869 = 62^2 + 05^2 \quad \Leftrightarrow \quad 6205 = 38^2 + 69^2;$$
$$5965 = 77^2 + 06^2 \quad \Leftrightarrow \quad 7706 = 59^2 + 65^2.$$

Числа Армстронга (идеальные цифровые инварианты, pluperfect digital invariants – PPDI) – содержат n цифр и раскладываются в виде суммы этих цифр в степени n:

$$\underline{\underbrace{ab\,...\,cd}_{n} = a^n + b^n + ... + c^n + d^n}.$$

В десятичной системе счисления они представлены последовательностью (A005188): 153, 370, 371, 407, 1634, 8208, 9474, 54748, 92727, 93084, 548834, 1741725, 4210818, 9800817, 9926315, 24678050, 24678051, 88593477, 146511208, 472335975, 534494836, 912985153 ...

Наибольшее возможное PPDI-число имеет 39 цифр:

115132219018763992565095597973971522401.

Например,
$135 = 1^3 + 3^3 + 5^3$;
$4210818 = 4^7 + 2^7 + 1^7 + 0^7 + 8^7 + 1^7 + 8^7$.
Не существует PPDI-чисел с количеством цифр 2, 12 или 13.

Совершенные цифровые инварианты (perfect digital invariant – PDI) – содержат n цифр и равны сумме всех своих цифр в степени $m \neq n$:

$$\underbrace{ab \ldots c}_{n} = a^m + b^m + \ldots + c^m .$$

Например,

4151 = $4^5 + 1^5 + 5^5 + 1^5$;
194979 = $1^5 + 9^5 + 4^5 + 9^5 + 7^5 + 9^5$;
14459929 = $1^7 + 4^7 + 4^7 + 5^7 + 9^7 + 9^7 + 2^7 + 9^7$.

Наибольшее известное RDI-число имеет 41 цифру и равно сумме цифр в 42-й степени:
36428594490313158783584452532870892261556.

В целом числа с любыми фиксированными степенями цифр образуют числовую последовательность A023052.

В частности,

114735624485461118832514 = $1^{25} + 1^{25} + 4^{25} + 7^{25} + \ldots + 2^{25} + 5^{25} + 1^{25} + 4^{25}$.

При любом m может существовать лишь конечное число m-самовлюблённых чисел $ab...c = a^m + b^m + \ldots + c^m$, ибо начиная с некоторого целого k, выполняется неравенство $k \cdot 9^k < 10^{k-1} - 1$.

Нарастающие степени. Возможен и другой вариант: число равно сумме степеней цифр с последовательно возрастающими показателями:

$$\underline{ab \ldots cd = a^1 + b^2 + \ldots + c^{m-1} + d^m}.$$

Такие числа образуют конечную последовательность (A032799): 89, 135, 175, 518, 598, 1306, 1676, 2427, 2646798, 12157692622039623539.

Например, 2646798 = $2^1 + 6^2 + 4^3 + 6^4 + 7^5 + 9^6 + 8^7$.

"Ошибки принтера" (printer's errors) [6] – ироническое название чисел, не оканчивающихся нулём, которые можно записать в виде произведения степеней по совокупностям цифр (A096298, A156322, A116890):

$$\underline{n = abcdef \ldots = a^b c^d e^f \ldots}$$

Если удалить все знаки умножения и возведения в степень, то получится исходное десятичное число. Последний множитель может иметь или не иметь показатель степени:

2592 = $2^5 \cdot 9^2$, 34425 = $3^4 \cdot 425$, 1297080225 = $1^{29} \cdot 7^{08} \cdot 0225$ ...

$2^5 \cdot 9^2$	$3^4 \cdot 425$	$31^2 \cdot 325$
$49^2 \cdot 205$	$3^4 \cdot 7^2 \cdot 875$	$1^0 \cdot 7^4 \cdot 4475$
$1^3 \cdot 7^4 \cdot 5725$	$1^3 \cdot 9^4 \cdot 2125$	$1^4 \cdot 569^2 \cdot 45$
$1^4 \cdot 7^{06} \cdot 125$	$1^6 \cdot 7^4 \cdot 6975$	$1^9 \cdot 7^4 \cdot 8225$
$6^{04} \cdot 6^6 \cdot 1^{76}$	$1^{89} \cdot 6^3 \cdot 76^3 \cdot 2$	$3^7 \cdot 3^1 \cdot 56875$
$3^8 \cdot 1^3 \cdot 58125$	$51^4 \cdot 1^{552} \cdot 76$	$68^4 \cdot 204^0 \cdot 32 = 68^4 \cdot 2^0 \cdot 4^0 \cdot 32$

$1^{2}\cdot689^{2}\cdot9^{2}\cdot33$	$1^{29}\cdot7^{08}\cdot0225$	$1^{3}\cdot68^{4}\cdot08^{0}\cdot64$
$1^{52}\cdot7^{6}\cdot7^{2}\cdot265$	$1^{68}\cdot8^{5}\cdot0227^{2}$	$1^{8103}\cdot17^{6}\cdot75 = 1^{8}\cdot1^{03}\cdot17^{6}\cdot75$
$1^{897}\cdot43^{4}\cdot555$		$301^{0}\cdot51^{4}\cdot445 = 3^{0}\cdot1^{0}\cdot51^{4}\cdot445$
$4185^{0}\cdot9^{7}\cdot875$	$95^{0}\cdot99^{004}\cdot99$	$1^{1745}\cdot7^{8}\cdot20375$
$1^{5348}\cdot7^{8}\cdot26625$	$1^{8951}\cdot7^{8}\cdot32875$	$1^{13}\cdot3^{20}\cdot493^{0}\cdot325$
$1^{3287635}\cdot7^{12}\cdot96$	$1^{653}\cdot7\cdot7^{7}\cdot286875$	$1^{85638}\cdot9^{8}\cdot43125$
$1^{11}\cdot18\cdot1^{211}\cdot3^{31}\cdot1^{1046}$	$1^{0}\cdot1\cdot9^{16}\cdot1^{103868512}\cdot55$	$3^{0}\cdot7^{20}\cdot2252458062^{0}\cdot385$

Рекуррентно-цифровые инварианты (recurring digital invariant – RDI)
Трёхзвенное превращение чисел 55–250–133:

55: $5^3 + 5^3 = 250$,
250: $2^3 + 5^3 + 0^3 = 133$,
133: $1^3 + 3^3 + 3^3 =$ **55**.

Аналогичная рекурсия образуется и в циклическом круге: 160–217–352.
Семизвенная рекуррентная процедура превращения чисел 1138–4179–9219...:

1138 : $1^4 + 1^4 + 3^4 + 8^4 = 4179$,
4179 : $4^4 + 1^4 + 7^4 + 9^4 = 9219$,
9219 : $9^4 + 2^4 + 1^4 + 9^4 = 13139$,
13139 : $1^4 + 3^4 + 1^4 + 3^4 + 9^4 = 6725$,
6725 : $6^4 + 7^4 + 2^4 + 5^4 = 4338$,
4338 : $4^4 + 3^4 + 3^4 + 8^4 = 4514$,
4514 : $4^4 + 5^4 + 1^4 + 4^4 =$ **1138**.

Факторионы [8] – натуральные числа, равные сумме факториалов своих цифр.

1 = 1!
2 = 2!
145 = 1! + 4! + 5!
40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!

Можно совершенно точно определить верхнюю границу для факторионов.
Все из них содержат не более 7 цифр. Даже точнее – они меньше 7·9! = 2540160.
Поэтому приведенный набор полный. Других факторионов нет.

Факториальные произведения.

0! • 1! = 1!
1! • 2! = 2!
6! • 7! = 10!
1! • 3! • 5! = 6!
1! • 3! • 5! • 7! = 10!

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Factorion.

Сумма субфакториалов. Специальное преобразование обычного факториала n! приводит к субфакториалу !n:

$$!n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$$

В частности, субфакториалы отдельных 1-цифровых чисел равны:
!0 = 0, !1 = 0, !2 = 1, !3 = 2, !4 = 9, !5 = 44, !6 = 265, !7 = 1854, !8 = 14833, !9 = 133496.

Есть и число, равное сумме субфакториалов его цифр:

148349 = !1 + !4 + !8 + !3 + !4 + !9.

Множительно-суммирующие числа[9]**.**

Таковым является число n, если сумма цифр, умноженная на произведение цифр, даёт само число n. Количество подобных чисел в любой системе счисления ограничено.

В десятичной системе таким нетривиальными числами (кроме 0 и 1) являются:

$135 = (1 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (1+3+5)$,

$144 = (1 \cdot 4 \cdot 4) \cdot (1+4+4)$.

Числа Фридмана[10] **–** такие числа, которые можно записать нетривиальным путём, используя все цифры, входящие в число, операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и сочленения цифр.

Таких чисел достаточно много (A080035).

Среди них есть наиболее примечательные:

$123456789 = ((86 + 2 \cdot 7)^5 - 91) / 3^4$;

$987654321 = (8 \cdot (97 + 6/2)^5 + 1) / 3^4$.

Либо просто красивые, например:

$127 = 2^7 - 1 = -1 + 2^7$;

$343 = (3 + 4)^3$;

$2592 = 2^5 9^2$.

Или из семейства репдигитов[11]:

$11111111111 = ((11 - 1)^{11} - 1 \cdot 1) / (11 - 1 - 1)$;

$22222222222222 = (2((22 - 2)/2)^{22+2-2} - 2) / (2 + 2/2)^2$;

$333333333 = ((3 \cdot 3 + 3/3)^{3 \cdot 3} - 3/3) / 3$;

$444444444444444 = (4(44/4 - 4/4)^{4 \cdot 4 - 4/4} - 4) / (4 + 4 + 4/4)$;

$5555555555 = (5(5 + 5)^{5+5} - 5) / (5 + 5 - 5/5)$;

$6666666666666666 = (6((66 - 6)/6)^{6+(66-6)/6} - 6) / (6 + (6 + 6 + 6)/6)$;

$77777777777777 = (7((77 - 7)/7)^{7+7} - 7 + 7 - 7) / (7 + (7 + 7)/7)$;

$88888888888888 = (8((88 - 8)/8)^{8+8-(8+8)/8} - 8) / (8 + 8/8)$;

$99999999 = (9 + 9/9)^{9-9/9} - 9/9$.

Особый подкласс составляют "*интересные числа*" с сохранением порядка следования цифр:

$343 = (3 + 4)^3$

---

[9] http://en.wikipedia.org/wiki/Sum-product_number.
[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Friedman_number, http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0800.html.
[11] http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0800.html.

$355 = 3 \cdot 5! - 5$

$3456 = 3! \cdot 4/5 \cdot 6!$

$4096 = (4 + 0 \cdot 9)^6$

$715 = (7 - 1)! - 5$

$5161 = 5! + (1 + 6)! + 1$

$729 = (7 + 2)^{\sqrt{9}}$

$6859 = (6 + 8 + 5)^{\sqrt{9}}$

Как вариант сюда же можно отнести **"дикие" самовлюблённые числа** (wild narcissistic numbers) с дополнительной операцией – факториалом:

$$24739 = 2^4 + 7! + 3^9;$$
$$23328 = 2 \cdot 3^{3!} \cdot 2 \cdot 8.$$

Число Зверя[12] **– 666.**

Любопытно, но число, записанное тремя шестёрками, обладает массой интересных свойств. Это позволяет его даже считать неким символом совершенства и актуальной бесконечности [7]. В упомянутой работе сосредоточено, пожалуй, наибольшее количество разнообразных числовых совпадений (около сотни), связанных с этим числом.

Вот только некоторые из них:

- сумма чисел на 37 секторах колеса рулетки равна 666, «игра сатаны»;
- пифагорова тройка (216, 630, 666), записанная в форме $(6 \cdot 6 \cdot 6)^2 + (666 - 6 \cdot 6)^2 = 666^2$;
- куб числа 666 как сумма кубов трех "моноцифровых" чисел $333^3 + 444^3 + 555^3 = 666^3$;
- что сумма 666-ти первых простых чисел-палиндромов (A002385) равна 2391951273. Удивительно, но цифры данной суммы удовлетворяют следующему замечательному равенству (G.L.Honaker Jr., 1998):

$$2^3+3^3+9^3+1^3+9^3+5^3+1^3+2^3+7^3+3^3 = 666+666+666;$$

- сумма квадратов первых семи простых чисел $2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2 = 666$;
- равно разности и сумме шестых степеней трех натуральных чисел $1^6 - 2^6 + 3^6 = 666$;
- красивое тождество (1..6..1) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 = 666$;
- синус и косинус угла 666° связаны с числом золотого сечения Φ

$$\Phi = -\left(1+\sqrt{5}\right)/2 = 2\sin(666) = 2\cos(6\cdot 6\cdot 6);$$

- невообразимая "супер-сумма" или "волшебно-суммирующая лавина" (ВаСиЛенко)

$$\sum_{a_1=1}^{6\cdot 6}\sum_{a_2=1}^{6\cdot 6}\cdots\sum_{a_{\frac{666}{2}}=1}^{6\cdot 6}\left(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{\frac{666}{2}}\right)^{\frac{6}{2}} = \underbrace{666\cdot 666\cdot\ldots\cdot 666}_{666} = 666^{666}.$$

Счастливые билеты. Это поверье и одновременно математическое развлечение, которое изначально основано на номерах проездного 6-значного билета.

[12] http://mathworld.wolfram.com/BeastNumber.html.

Счастливым считается билет, в котором сумма первых трёх цифр совпадает с суммой трёх последних. Общее число шестизначных номеров, порождающих счастливые билеты, равно 55252 (считая нулевой номер). В среднем 1 из 18 билетов.

В общем случае количество $2n$-значных счастливых билетов в m-ричной системе счисления (в обычных билетах используется десятичная система $m = 10$) определяется по замечательной формуле [8, 9]:

$$S_{2n,\,m} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin mx}{\sin x}\right)dx.$$

Есть и чисто комбинаторная формула [10]:

$$S_{2n,\,m} = \sum_{k=0}^{\lceil n-n/m \rceil}(-1)^k\, C_{2n}^{k}\, C_{(n-k)m+n-1}^{2n-1},$$

где $C_x^y = \binom{x}{y} = \dfrac{x\,!}{y\,!(x-y)}$ – число сочетаний из x по y (биномиальные коэффициенты), $\lceil\xi\rceil$ – целая часть от величины ξ.

Четыре четверки – математическая головоломка поиска простейшего математического выражения для целых чисел, используя лишь общие математические символы и цифры четыре. Большинство версий требует, чтобы каждое выражение содержало в точности четыре четверки [11–13], пять пятёрок и т.п.

Например, $4\,!\left(4\pm\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}}^{\;-4\,!}\right) = 93$ и 99.

Как правило, логарифмы не разрешаются, поскольку существует тривиальный способ выразить любое число при его использовании.

Тем не менее, интересно использование натуральных логарифмов $\ln(\cdot)$ для представления любого натурального числа n:

$$n = -\sqrt{4}\,\frac{\ln\left[\left(\ln\underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}_{n}\right)\Big/\ln 4\right]}{\ln 4}.$$

Совпадения в действительных числах

Модели бывают не только математические

Как уже отмечалось, в формулах на совпадение очень часто фигурируют знаменитые математические постоянные: π, e, Φ и др.

По-видимому, здесь срабатывает рефлексия узнаваемости.

Хотя в определённой мере имеет место обыкновенная игра воображения, сродни разгадыванию головоломок. В основном на уровне разных предположений.

Установить между ними точную нетривиальную аналитическую связь чрезвычайно трудно, если вообще возможно.

Ибо онтологически это совершенно разные числа:

Ф – целое алгебраическое число, как корень многочлена с целыми коэффициентами, старший из которых равен единице;

e, π – трансцендентные числа, причём совершенно разной природы.

Поэтому аналитические формы тут искать тщетно. Разве что с использованием бесконечных сумм и/или произведений.

В то же время некоторые исследователи настроены на поиск подобных зависимостей очень серьёзно.

Некоторые образцы таких рвений продемонстрированы в статье [2].

Особенно когда авторы приводят очевидные формульные преобразования типа $\Phi = e^{\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = e^{\operatorname{arsh} 1/2}$, заурядно соединяя две тождественные (по определению) записи [14].

Или в абсолютное тождество $a \equiv \int\limits_0^{a\ln 2} e^{\frac{x}{a}}dx$, справедливое для любого вещественного числа a, вместо буковки a подставляют конкретные числа вроде

$$\pi \equiv \int\limits_0^{\pi\ln 2} e^{\frac{x}{\pi}}dx, \quad \Phi \equiv \int\limits_0^{\Phi\ln 2} e^{\frac{x}{\Phi}}dx$$

и … объявляют об установлении связей $\pi(e)$ и $\Phi(e)$ [15].

Подобные числовые манипуляции похожи на буквенно-цифровую эквилибристику, благо математика дает большой арсенал чисел и операций.

Тем не менее, существует множество интересных приближенных равенств, например, на основе трансцендентных чисел π и e:

$$\pi^4 + \pi^5 \approx e^6;$$
$$e^\pi - \pi \approx 20;$$
$$\pi^{3^2} \Big/ e^{2^3} \approx 10.$$

Соотношение замечательного математика Рамануджана[13] $\pi \approx \left(9^2 + 19^2/22\right)^{1/4}$ имеет 8 совпадающих цифр.

Хотя он ответственно заявлял, что подобные "любопытные аппроксимации получены опытным путем" и не имеют никакой связи с теорией чисел.

Особо элегантно на этом фоне выглядят нетривиальные формулы, которые абсолютно точны в своём предельном представлении.

Так, интересные цепные дроби для числа π представлены в работе [16]:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \ldots}}}}; \qquad \pi = 3 + \cfrac{1^2}{6 + \cfrac{3^2}{6 + \cfrac{5^2}{6 + \cfrac{7^2}{6 + \ldots}}}}.$$

Рамануджан доказал связь между (Ф, e, π), которая содержит непрерывную дробь и другие "включения" (Ф, e, π) [17; 18, п. 19.15]:

[13] Quarterly Journal of Mathematics, XLV, 1914, pp. 350–372.

$$\left(\sqrt{2+\Phi}+\Phi\right)e^{-\frac{2\pi}{5}}=1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\ldots}}};\qquad \left(\sqrt{2-\phi}+\phi\right)e^{-\frac{\pi}{5}}=1-\cfrac{e^{-\pi}}{1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1-\cfrac{e^{-3\pi}}{1+\ldots}}}.$$

Весьма примечательно и другое равенство [19, № 629]:

$$\frac{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2}}{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} e^{-5\pi n^2}} = \sqrt{5\phi^3} = (2-\phi)\sqrt{\phi}.$$

Его сходимость потрясающая. В зависимости от числа слагаемых N точность приближения примерно равна $\delta(N)\approx 10^{-N(1{,}35N+3)}$ и, в частности, достигает $\delta(2)\approx 10^{-12}$, $\delta(7)\approx 10^{-87}$.

Часто в приближениях отдельно выделяют число Хигнера 163:

$$163(\pi-e)\approx 69 \qquad 0{,}0005\ \%;$$

$$\sqrt[5]{\frac{163}{\log_e 163}}\approx 2 \qquad 0{,}0000008\ \%.$$

Особенно поражает воображение приближённая формула для константы Рамануджана[14] – практически целого числа (almost integer)[15]

$$R=e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,743{,}999999\,9999992500\ldots$$

с точностью $3\cdot 10^{-28}$ %:

$$R=e^{\pi\sqrt{163}}\approx\left(2^6\cdot 10005\right)^3+744.$$

Данный факт не является типичным для случайного математического совпадения, для которого остаётся не известным его математическое объяснение.

Видимо, это больше следствие того, что 163 – число Хигнера[16].

Некоторые правдоподобные соотношения обладают высочайшей степенью точности, однако всё-таки остаются случайными.

Например,

$$\int_0^{\infty}\cos(2x)\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{n}\right)dx \approx \frac{\pi}{8}.$$

Две части этого равенства различаются только после 42-й цифры [20].

Невероятное совпадение!

Или другое простое выражение, практически равное единице (в 34 значащих цифрах после запятой)[17]:

$$\cos\{\pi\cos[\pi\cos\ln(\pi+20)]\}\approx -0{,}99999999999999999999999999999999999607\ldots$$

---

[14] http://mathworld.wolfram.com/RamanujanConstant.html.
[15] http://en.wikipedia.org/wiki/Almost_integer.
[16] http://en.wikipedia.org/wiki/Heegner_number.
[17] http://en.wikipedia.org/wiki/Almost_integer.

Что можно сказать? – Красиво. Элегантно.
Числовые модельные совпадения впечатляют и одновременно изумляют.
Словно модели на подиуме.

Разное.

- 73 – 21$^{\underline{e}}$ простое, а 37 – 12$^{\underline{e}}$ простое.

Кстати, это единственная подобная реверсная комбинация.

- "Невероятные" сокращения:

$$\frac{16}{64}=\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4};\qquad \frac{26}{65}=\frac{2\cancel{6}}{\cancel{6}5}=\frac{2}{5};\qquad \frac{19}{95}=\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5};\qquad \frac{49}{98}=\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{4}{8}.$$

- Последние 21 цифры степени 99^{99} = ...999779999159200499899 образуют простое число и содержат 12 девяток.

- $4^2 = 2^4$ – единственное решение $a^b = b^a$ в целых положительных числах $a \neq b$.

Мысли от Андрея Никитина. Прочитал статью "Базовые соотношения между фундаментальными константами" [2]. Красиво, ничего не скажешь. Но, как мне представляется, понимание желаний поиска связи между константами понято несколько неверно: "*Всё бы и ничего. Но большей частью получаемые зависимости непомерно приближённые, и ничего особенного, кроме полезной тренировки ума, за собой не несут. Остальные соотношения преимущественно основаны на азбучных тождествах, порождая очевидные замены одних циферок-буковок на другие, без содержательного наполнения равенств новым смыслом-толкованием*". – Дело в том, что вопрос связи констант в математической формуле – это только малая толика поиска отношения этих констант.

Главная проблема состоит в ином. – А именно, в поиске приближенного перехода между константами для объяснения видимого формообразования и структурирования живых объектов.

И методологическое родство тут не столь важно.

В частности, больший интерес представляет переход от линейных форм к круговым или сферическим прообразам. От линии к плоскости и объему.

Примерно так, как они реально создаются в живых объектах. Причём вовсе не из математических соображений.

В природных объектах мы не находим ни одной точной сферы в формах объектов.

И все же, мы точно видим-подразумеваем, что вот это – сфера.

Пусть с некоторыми ошибками либо с искажениями, но идет уверенное приближение к сфере, к эллипсоиду, параболоиду...

Вполне возможно, в это время осуществляется переход от Φ к π.

Но вряд ли то же растение или коралловая колония об этом задумывается. Мы ищем этот переход, такую связь, а совсем не формулу. Классическая математика с её точность результата тут не является определяющим фактором.

Потому и $\pi \approx 2\Phi$, как естественный переход от одной формы к другой.

А математическая (вычислительная) ошибка – дело вторичное.

> *Комментарий*. Действительно, здесь имеет место довольно неожиданный взгляд на константы.
>
> В своём развитии процесс как бы "соскальзывает" или перестраивается на другие условия. В том числе с переходом на новые "старые" константы.

Природа, видимо, так и действует. Ей же невдомёк, что мы пытаемся её промоделировать неизвестными для неё образами в виде чисел.

Не случайно, то же трансцендентное число π встречается в описаниях самых разных объектов, весьма далёких от понятия окружности.

Что касается соотношений типа 2Ф ≈ π, то об этом есть смысл говорить лишь в привязке к конкретным явлениям. Но не в общей математике.

Если разобраться, то в развитии природных процессов математика не причем.

Как, например, растёт клеточная колония? – Вроде бы две соседние клетки поначалу сдерживают деление друг у друга.

Но, какая-то из них всё ж оказывается сильнее, давит соседку, а сама переходит к делению.

Для клеточной структуры это нормальный процесс стабилизации процесса.

Можно ли сказать, как будет идти процесс во времени? – Деление вроде двоичное, однако, временной сдвиг торможения деления части клеток переводит его в прогрессию. Причём ближе к числу Ф, а не 2, как можно было ожидать.

То же самое происходит в процессе перехода от одной формы к другой при росте.

А частичное совпадение 2Ф ≈ π – это частный случай уравнивания констант в конкретном явлении. И не более того...

Вот такие метаморфозы в числовых совпадениях, отражающих реальные физические процессы в окружающем мироздании.

Вместо заключения. Числовые конструкции умозрительны. В реальной жизни их нет.

Хотя мы можем наделять отдельные объекты теми или иными свойствами чисел и выполнять разнообразные операциями на основе выбранной меры количества [21].

Тем совершеннее выглядят стройные цифровые комбинации.

Гармония чисел глубока и в чём-то абсолютна. Как и практически безотносительна сама математика.

Неповторимая созвучность, симметрия и слаженность исходит от гармонии числовых совпадений.

Их разнообразные "красивые" закономерности являются ярким и убедительным подтверждением величия и гармонии математики.

Вовсе неслучайным и даже знаковым является то, что в эпоху монопольной "власти чисел и геометрии" около девятнадцати веков гармония или гармоника (а после Боэция – "музыка" в её гармонических или звуковысотных аспектах) была одной из четырех математических наук и дисциплин.

Гармония являлась неотъемлемой частью математики или той составляющей, которая изучала числовые отношения и пропорции.

Этот исторический феномен свидетельствует о том, что де-факто гармония зарождалась и существовала как математическая дисциплина.

Они и сегодня неразрывны и взаимообусловлены.

Какую бы область математики мы не взяли, везде найдем отголоски гармоничного отражения абстрактного мира в его знаковых и геометрических формах.

Но особое благозвучие, конечно, исходит от мозаики числовых совпадений.

Здесь наличествуют как ажурные кружева цифровых конфигураций, так и заключенные в них числовые структуры, которые отражают соизмеримые количества.

Хотя если глубоко задуматься, то это больше абстракция. Ведь в природе чисел нет.

Разве что отражение их некоторых свойств через призму человеческого мышления.

И не более того...

Но тем радостнее глазу незамысловатые совпадения числовых форм.

Литература:

1. A Collection of Algebraic Identities. – http://sites.google.com/site/tpiezas/001.

2. *Василенко С.Л.* Базовые соотношения между фундаментальными константами // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17327, 20.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161934.htm.

3. *Математические совпадения*. – http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_coincidence.

4. *Madachy J.S.* Mathematics on Vacation. – New York: Charles Scribner's, 1966. – 249 p.

5. *Heinz H.* Narcissistic Numbers. – 2010. – http://www.magic-squares.net/narciss.htm.

6. *Friedman E.* Printer's errors. – http://www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0601.html.

7. *Василенко С.Л.* 666 – символ совершенства и актуальной бесконечности // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15872, 08.04.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161632.htm.

8. *Интегралом* – по счастливым билетам // Квант. – 1978. – № 11. – С. 52–53. – http://kvant.mccme.ru/1978/11/index.htm.

9. *Ландо С.К.* Счастливые билеты / Сб. «Математическое просвещение». – 1998. – № 2. – с.127–132. – http://ega-math.narod.ru/Quant/Tickets.htm#A6.

10. *Снова о счастливых билетах* // Квант. – 1989. – № 8. – С. 42. – http://ega-math.narod.ru/Quant/Tickets.htm#A 5.

11. *Четыре четвёрки* // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=42921609.

12. *Bourke P.* Four Fours Problem. – http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fun/4444/.

13. *Gallery*: 4444 (Four Fours). – http://www.eyegate.com/showgal.php?postGrid=0&id=7.

14. *Аракелян Г.* О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // Академия Тринитаризма. – М., Эл № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/2065-ar.pdf.

15. *Стахов А.П.*, *Владимиров В.Л.* О формальной связи универсальных безразмерных физических констант: "фи", "пи" и "*e*" // Международный клуб золотого сечения. – 31.03.2011. – http://www.goldensectionclub.net/publications/vladimirov/vladimirov-articles/vladimirov003.

16. *Lange L.J.* An Elegant Continued Fraction for π // The American Mathematical Monthly. – Vol. 106, No. 5 (1999), pp. 456–458.

17. *Ramanathan K.G.* On Ramanujan's Continued Fraction // Acta Arithmetica, 43 (1984), pp. 209–226.

18. *Hardy G.H.*, *Wright E.M.* Introduction to the Theory of numbers. – Oxford University Press, 6th edition, 2008.

19. *Ramanujan S.* Journal of the Indian Mathematical Society. – http://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/collectedpapers/question/qJIMS.htm.

20. *Bailey D.H.*, *Borwein J.M.*, *Kapoor V.*, *Weisstein E.* Ten Problems in Experimental Mathematics // American Mathematical Monthly, to appear, 2005. – http://crd.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/tenproblems.pdf; http://crd-legacy.lbl.gov/~dhbailey/dhbpapers/math-future.pdf.

21. *Василенко С.Л.* Числовая гармония моноцифровой мозаики: репьюниты и репдигиты // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16152, 10.11.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161720.htm.