С.Л. Василенко

К обобщению тождества Кассини

Абсолют недостижим. Но движению к нему
полезно и составляет суть познания.

Одним из самых "древних" соотношений для чисел Фибоначчи стало тождество[1]

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n . \qquad (1)$$

Оно было доказано французским астрономом Кассини в 1680 году [1] и показывает, что квадрат любого числа Фибоначчи F_n отличается от произведения своих ближайших соседей ровно на ± 1.

То есть равенство (1) увязывает три последовательных числа.

Впрочем, ничего удивительного здесь нет. Данная тройка чисел изначально объединяется посредством исходной рекуррентно-аддитивной формы $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Другое дело, что соотношение (1) переносит нас в область мультипликативных свойств, когда между собой корреспондируются произведения: $F_{n-1}F_{n+1}$ и F_nF_n.

Более того, подобная тройная индексация соотносится с диалектической триадой Фихте–Гегеля: тезис – антитезис – синтез.

При этом каждое движение вперёд или в будущее $n+1$ воссоединяет настоящее n и прошлое $n-1$.

Причём обратным ходом допускается переход в область отрицательных чисел Фибоначчи.

В то время как «магия усердно размножающихся <классических> кроликов не оставляла возможности представить, что в нашей Вселенной <некий аддитивно-нарастающий> ряд эволюции может начинаться с отрицательной величины» [2].

Некоторые суждения. Тождество Кассини (1) можно быстро обосновать, представив левую часть равенства в виде определителя матрицы 2×2 чисел Фибоначчи.

Результат непосредственно получается, если эту матрицу выразить n-й степенью другой матрицы с определителем, равным –1:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \det\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n = \left(\det\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)^n = (-1)^n .$$

Можно доказать (1) и методом индукции с использованием очевидного преобразования:

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (F_{n+1} + F_n)F_n - (F_n + F_{n-1})F_{n+1} = (-1)\cdot\left(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2\right).$$

Ввиду своей оригинальности и одновременной простоты выражение (1) довольно часто становилось предметом рассмотрения в теории чисел.

Правда, иногда отчего-то именуется формулой [3–5].

Хотя математическая формула в общем случае, строго говоря, даёт сообщение-посыл, как искать значение зависимой переменной.

То есть она определяет некую величину через другие изменяемые параметры и коэффициенты.

---

[1] http://milan.milanovic.org/math/english/pi/cassini.htm; http://en.wikipedia.org/wiki/Cassini_and_Catalan_identities; http://mathworld.wolfram.com/CassinisIdentity.html.

Так, хорошо известная формула Бине−Бернулли позволяет аналитически вычислять конкретные значения ряда F_n.

Поэтому если формулировать точно, то запись (1) следует правильнее называть тождеством (identities) [6; 7; 8, с. 126] – равенством (суждением), которое выполняется на всём множестве значений входящих в него переменных.

Иными словами, перед нами тождественно верное равенство <двух частей>.

В работе [4] демонстрируется обобщение (1) по индексу k, который характеризует удалённость "соседей" от центра зеркальной симметрии n:

$$F_n^2 - F_{n+k}F_{n-k} = (-1)^{n+k} F_k^2 . \tag{2}$$

Напомним, что данное тождество вывел ещё бельгийский математик Шарль Каталан (1753) – один из лучших геометров 19 века.

В статье [5] говорится об унификации предлагаемого подхода, хотя пространство допустимых обобщений крайне сужено. Так, область возможного расширения тождества (1) сведена лишь к вариабельности двух коэффициентов рекурсии $f_{n+1} = pf_n + qf_{n-1}$, выражаемых через сумму и произведение корней характеристического уравнения $x^2 = px + q$ по теореме Виета. В то же время возможно наличие произвольных начальных условий $(f_0,\ f_1)$, одновременная вариация индекса отражения k по форме Каталана (2) и др.

Неточна также формулировка о применимости «любой рекурсии второго порядка» [5]. Рекуррентное выражение или разностное (возвратное) уравнение в данном рассмотрении должно быть линейным и обычно подразумевает свойство однородности.

Метод математической индукции, как способ доказательства, в случае нескольких изменяемых индексов k, n не приемлем.

В той связи заметно выделяются ранние публикации специалистов Fibonacci Association[2].

Посыл к обобщению. Рассмотрим линейную однородную модель второго порядка.

Квадратичную рекуррентную последовательность с парой начальных условий $(w_0 = a,\ w_1 = b)$ удобно представить в привычных обозначениях Хорадама [9]:

$$w_n = w_n(a, b;\ p, q) = pw_{n-1} + qw_{n-2} .$$

Для членов данных квадратичных последовательностей в работе [10] получены полезные соотношения взаимосвязи, в том числе тождество

$$w_n^2 - u_{n-k}(bw_{n+k} + aqw_{n+k-1}) = (-q)^{n-k} w_k^2 , \tag{3}$$

где $u_n = w_n(0, 1;\ p, q)$ – частный случай числового ряда, соответствующий традиционным начальным условиям $(a, b) = (0, 1)$.

Собственно, это и есть обобщение тождества Кассини для квадратичной модели с набором априори задаваемых параметров $(a, b;\ p, q)$ и всех целых индексов (n, k).

На первый взгляд оно как будто чрезмерно перегружено символами.

Да и выглядит, возможно, не так эффектно, как (1).

Это естественная плата за сложность вариабельности по шести переменным.

Зато тождество (3) с лихвой покрывает и охватывает многие отдельные расширения модели, действительно отражая математически значимый диапазон обобщения: по

---

[2] http://www.fq.math.ca/list-of-issues.html.

коэффициентам, начальным условиям и порядковым индексам членов числовых последовательностей.

Более того, можно рассматривать не только квадрат числа w_n, но и его произведение на любой другой член ряда $v_n = pv_{n-1} + qv_{n-2}$ со своими начальными условиями $(v_0, v_1) = (c, d)$.

Тогда для любой тройки целых индексов (m, n, k), вещественных начальных условий (a, b, c, d) и коэффициентов (p, q) соответствующее обобщение принимает вид [10]:

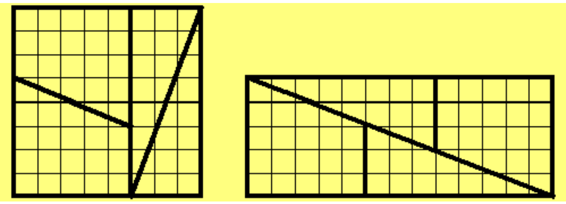
$$v_{m+k}w_{n+k} - u_k(bv_{m+n+k} + aqv_{m+n+k-1}) = (-q)^k v_m w_n.$$

Достойные результаты исследований (2003).

Остаётся ещё раз обратить внимание на содержательный журнал профи-фибоначчистов «The Fibonacci Quarterly», основанный ещё в 1963 году (http://www.fq.math.ca/index.html).

Можно также упомянуть работы [11, 12], в которых по многочисленным материалам данного издания обсуждаются новоявленные мифы золотоискателей. Среди них: восстановление хронологии, заимствование идей, присваивание приоритетов и т.п.

Всё это ещё раз подтверждает одну непреложную истину. Прежде чем взяться за перо, полезно ознакомиться с трудами предшественников.



Занимательное приложение. Тождество Кассини (1) лежит в основе замечательной геометрической головоломки, описанной ещё Л.Кэрроллом [13].

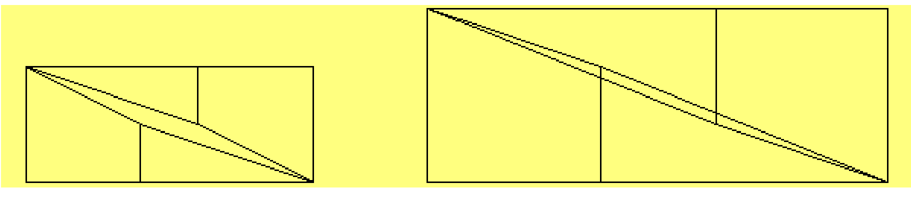
Идея задачи состоит в том, что шахматная доска 8×8 разрезается определённым образом (см. рисунок) на четыре части, из которых затем составляется прямоугольник [7, с. 325].

При этом первоначальные $8\times8 = 64$ клетки неожиданно превращаются в $5\times13 = 65$ клеток!

Аналогичным образом можно расчленить любой квадрат $F_n \times F_n$ на четыре части с размерами сторон $F_{n+1}, F_n, F_{n-1}, F_{n-2}$ клеток, вместо $13, 8, 5, 3$ в описанном примере.

В результате такой манипуляции собирается прямоугольник $F_{n-1} \times F_{n+1}$, в котором визуально одна клетка либо прибавляется, либо наоборот утрачивается в зависимости от чётности n.

В действительности же, после геометрической декомпозиции образуется неплотное примыкание или соединение внахлест, едва заметное для глаза:



При этом площадь вытянутого четырёхугольника "нестыковки" составляет в точности единицу, – в виде одной клетки согласно тождеству Кассини (1).

Понятно, чем больше числа, тем в значительной мере единичная клетка "размазывается" на плоскости, и тем плотнее сочленение разрезанных фрагментов.

Тождество и золотое сечение. Константа золотого сечения (ЗС), как «ассоциированный член чисел Фибоначчи», в тождестве (1) открыто не просматривается.

Собственно сразу даже не ясно, есть ли она вообще.

Разделим обе части равенства (1) на квадрат F_n^2:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \cdot \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{(-1)^n}{F_n^2} .$$

При удалении индекса в бесконечность $n \to \infty$ числа неограниченно возрастают, откуда следует сколь угодно близкое совпадение двух отношений $\frac{F_n}{F_{n-1}} \approx \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

В свою очередь это означает наличие предела, к которому стремится отношение двух соседних чисел Фибоначчи.

Причём, из-за присутствия в тождестве изменения знака у величины $(-1)^n$, это стремление асимптотически знакопеременное.

То есть отношение чисел пересекает асимптоту бесконечное множество раз.

Итак, тождество Кассини однозначно отвечает на вопрос о наличии константы-асимптоты. А вот найти её всё-таки удобнее из аддитивной рекурсии $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Разделим это равенство на величину F_n.

Обозначив неизвестный параметр через x, получаем:

$$x = \frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} .$$

Обратим внимание, что конечный результат, равно как и преобразования, абсолютно не связаны с начальными условиями (F_0, F_1).

Следовательно, определяющим фактором здесь являются не числа, а сама двучленно-аддитивная рекурсия.

Она приводит к числу ЗС: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618...$ независимо от пары "затравочных" чисел (F_0, F_1), не равных одновременно нулю,

Вместо заключения. Заметим что, несмотря на имеющуюся предельную связь, числа Фибоначчи и золотое сечение – онтологически совершенно разные математические конструкции со своими объектами исследования.

Потому часто встречающееся "перепрыгивание" с изучения чисел Фибоначчи на исследование свойств объектов, содержащих ЗС, методологически не обосновано.

Вносит путаницу-разноголосицу в достаточно простые математические структуры.

Некоторые исследователи дополнительно отгораживаются некоей искусственно привлеченной гармонией, не имеющей строгой математической формализации. – В отличие от той же симметрии, изоморфизма, топологии и т.п.

И если формообразующие структуры (числовые последовательности) Фибоначчи легко поддаются расширениям-обобщениям, то константа ЗС совершенно одинока и обособлена.

Никакие гармонизации или "золотые революции" здесь, увы, бессильны.

Это наглядно проявляется, в частности, на примере рассмотренного обобщения тождества Кассини. Как только в модель вводится хотя бы один неединичный коэффициент из пары (p, q), связь с уникальным числом золотого сечения Φ мгновенно обрывается.

И это правильно...

Литература:

1. *Cassini J.* (Paris 1733). Une nouvelle progression de nombres. – Histoire de l'Acaémie Royale des Sciences. – Volume 1.
2. *Чернов А.* Заметки о вечном / Принцип диалектического императива. – 2009. – http://chernov-trezin.narod.ru/ZS_1_1.htm.
3. *Стахов А.П.* Формула Кассини // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.12542, 01.11.2005. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320030.htm.
4. *Мартыненко Г.Я.* Обобщение формулы Кассини для последовательностей Фибоначчи и Люка // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15160, 14.03.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322015.htm.
5. *Владимиров В.Л.* Обобщение формул Кассини на любую рекурсию второго порядка с унифицированными начальными условиями // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17413, 10.04.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321251.htm.
6. *Алфутова Н.Б.*, *Устинов А.В.* Алгебра и теория чисел: Сборник задач для математических школ. – М.: МЦНМО, 2002. – 264 с.
7. *Грэхем Р.*, *Кнут Д.*, *Паташник О.* Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998.– 703 с.
8. *Левитин А.В.* Алгоритмы. Введение в разработку и анализ: Пер с англ. – М.: ИД «Вильямс», 2006. – 576 с.
9. *Horadam A.F.* Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers // The Fibonacci Quarterly, **3.3** (1965), 161–176.
10. *Howard F.T.* The Sum of the Squares of Two Generalized Fibonacci Numbers // Fibonacci Quarterly, **41.1** (2003), 80–84.
11. *Василенко С.Л.* Золотоискательская болезнь гиперболичности // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.04.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=66.
12. *Василенко С.Л.* Серебрение в числовой гармонии // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 08.05.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=67&sm=2.
13. *Collingwood S.D.* (1899). The Lewis Carroll Picture Book. – T. Fisher Unwin.