В.П. Шенягин

Модель Гордона как аналог роста дохода по закону рекуррентных соотношений *c*-пропорций

Все модели ложные,
но некоторые из них полезные.
Дж. Бокс

«Процесс “гармонизации математики” в действии. И этот процесс может привести к сближению математики с теоретическим естествознанием», отмечает А.П. Стахов в статье [1].

Но от бурного развития математики гармонии и ее приложений в различных областях знаний существенно отстает экономика – субъективно-объективная отрасль науки и практики, созданная человеком. Гармоничные модели в экономике крайне редки, что является самостоятельной проблемой, требующей своего решения и развития.

Рост доходов в геометрической прогрессии по модели рекуррентной последовательности

Конкурентоспособность, а точнее компетентоспособность (*competition*), базируется на компетентности и предполагает устойчивый рост экономики в целом и предприятий в частности, их гармоничное развитие.

Рост фундаментальной стоимости предприятия как его доминанты в значительной степени определяется величиной будущих доходов и, особенно, регулярными длительными реинвестициями в виде экономической прибыли.

Наиболее распространенной моделью долговременного роста доходов в оценке бизнеса и управлении его стоимостью является модель Гордона [2]. Она характеризует рост свободных денежных потоков I в геометрической прогрессии с ростом g и его темпом $(1+g)$, представляя собой мультипликативную модель во времени t:

$$I_t = (1+g)I_{t-1}. \tag{1}$$

Приведенная стоимость длительного потока определяется формулой Гордона

$$V_t = \frac{I_{t-1}(1+g)}{r-g}, \tag{2}$$

где r – ставка капитализации.

При расчете величин денежного потока операцию умножения по формуле (1), с точки зрения психологического восприятия роста, логичнее заменить операцией суммирования, то есть аддитивной моделью, что выводит решение в сферу математики гармонии. Предложенная идея может быть реализована различными рекуррентными моделями, простейшая и более наглядная из которых заключается в следующем.

Доход каждого расчетного периода следует определить в виде суммы двух слагаемых, в числе которых полная величина дохода предыдущего периода и часть дохода за период, предшествующий предыдущему. Иными словами, доход определяется предыдущим доходом и незначительной частью дохода, отстоящего на один период.

В результате генерируется ряд доходов, члены которого характеризуются рекуррентной последовательностью

$$I_t = I_{t-1} + \frac{I_{t-2}}{m}, \tag{3}$$

где m - действительное положительное число.

Поскольку мы имеем дело не с отдельной величиной, а с их системой, т. е. числовой последовательностью-рядом при заданных значениях двух первых членов ряда, целесообразно (3) записать с помощью фигурных скобок в виде

$$\left\{ I_t = I_{t-1} + \frac{I_{t-2}}{m} \right\}.$$

Ряд эквивалентен пропорции, как отношению последующего члена ряда к предыдущему:

$$q = \frac{I_t}{I_{t-1}}; \tag{4}$$

$$q = \lim_{t\to\infty} \frac{I_t}{I_{t-1}} = \lim_{t\to\infty} \frac{I_{t-1} + \frac{I_{t-2}}{m}}{I_{t-1}} = 1 + \frac{1}{m} \lim_{t\to\infty} \frac{I_{t-2}}{I_{t-1}} = 1 + \frac{1}{mq}.$$

Откуда следует уравнение

$$mq^2 - mq - 1 = 0 \tag{5}$$

с положительным корнем

$$q = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2m}.$$

Уравнение (5) характеризует частный случай гармоничных соотношений, входящих в систему, определяемую семиуровневой группой квадратных (младших степенных) уравнений. Такая система изложена автором в статье [3].

Семь уровней, т. е. семь видов уравнений, формируются заданием коэффициентов *m* перед членами уравнений по определенной системе, сведенной в таблицу 1.

Таблица 1

Квадратные (младшие степенные) уравнения (группа *s*-пропорций)

№	Уравнение	№	Уравнение	
1	$\phi^2 - \phi = 1$	8	$md_m^2 - md_m = m$	$d_m^2 - d_m = 1$
2	$r_m^2 - r_m = m$	7	$mc_m^2 - mc_m = 1$	$c_m^2 - c_m = \frac{1}{m}$
3	$s_m^2 - ms_m = 1$	6	$mb_m^2 - b_m = m$	$b_m^2 - \frac{b_m}{m} = 1$
4	$f_m^2 - mf_m = m$	5	$ma_m^2 - a_m = 1$	$a_m^2 - \frac{a_m}{m} = \frac{1}{m}$

Восьмой вид уравнения эквивалентен первому виду, т. е. уравнению, характеризующему золотую пропорцию.

В семиуровневой группе три последних уравнения эквивалентны второму, третьему и четвертому и, казалось бы, не имеют права на самостоятельность. Однако это не так. Они могут быть жизнеспособны, тем более при целых величинах *m*.

Возьмем седьмое уравнение $mc_m^2 - mc_m = 1$, соответствующее нашей задаче (5).

По сути, оно эквивалентно второму уравнению системы, характеризующему корневые *r*-пропорции, $r_m^2 - r_m = m$, т. к. равноценно $c_m^2 - c_m = k$, где $k = \frac{1}{m}$.

Итак, рекуррентная последовательность (3) обладает замечательным свойством. Она эквивалентна геометрической прогрессии со знаменателем *q*. Действительно, из (4) следует $I_t = qI_{t-1}$.

Таким образом, каждый последующий член ряда (3) одновременно равен произведению предыдущего члена на постоянный коэффициент *q*, а также сумме дохода предыдущего периода и *m*-ой части дохода, предшествующему предыдущему периоду, что определяется системой

$$\begin{cases} I_t = qI_{t-1}; \\ I_t = I_{t-1} + \dfrac{I_{t-2}}{m}. \end{cases} \tag{6}$$

Необходимый коэффициент *m*, соответствующий темпу $1+g=q$, найдем из (5):

$$m = \frac{1}{q^2 - q} = \frac{1}{q(q-1)} = \frac{1}{qg} = \frac{1}{g(1+g)}. \tag{7}$$

В результате

$$I_t = \frac{I_{t-2}}{m} + I_{t-1} \Leftrightarrow I_t = (1+g)I_{t-1}.$$

Проверим справедливость (6).

Второе уравнение системы с учетом (7) примет вид

$$I_t = I_{t-1} + \frac{I_{t-2}}{m} = I_{t-1} + g(1+g)I_{t-2}.$$

Система (6) запишется в виде

$$\begin{cases} I_t = (1+g)I_{t-1}; \\ I_t = I_{t-1} + g(1+g)I_{t-2}. \end{cases}$$

Откуда $(1+g)I_{t-1} = I_{t-1} + g(1+g)I_{t-2}$.

В результате $I_{t-1} = (1+g)I_{t-2}$, что эквивалентно $I_t = (1+g)I_{t-1}$.

Итак, при прогнозировании денежных потоков их формирование по формулам (1) и (3) дает одинаковый результат. Отличие заключается *в психологическом восприятии* роста доходов [4]. Выборочный опрос ряда специалистов и студентов старших курсов, проведенный автором, показал, что вероятность достижения запланированного роста аддитивным путем по модели (3) воспринимается увереннее и оптимистичнее по сравнению с моделью Гордона (1).

Мобилизация коллектива на достижение запланированных доходов по аддитивной модели (3) по сравнению с мультипликативной моделью (2) более реалистична, поскольку ситуация воспринимается облегченной и от того оптимистичней.

Пример. Пусть в минувший период получен доход величиной 97,2 млн. руб., после чего предполагается, что доходы будут возрастать с темпом $g = 0{,}03$ или 3 %.

Решение. Рассчитаем будущие доходы по модели (3).

По формуле (7) найдем коэффициент $m = \dfrac{1}{0{,}03 \cdot 1{,}03} \approx 32{,}4$.

Зададим

$I_1 = 1{,}03 \cdot 97{,}2 = 100{,}1$ млн. руб.

Спланируем будущие доходы по авторской модели (3):

$I_2 = 100{,}1 + \dfrac{97{,}2}{32{,}4} = 103{,}1$ млн. руб.;

$I_3 = 103{,}1 + \dfrac{100{,}1}{32{,}4} = 106{,}2$ млн. руб.;

$I_4 = 106{,}2 + \dfrac{103{,}1}{32{,}4} = 109{,}4$ млн. руб. и т. д.

Определим будущие доходы по модели Гордона (1):

$I_1 = 1{,}03 \cdot 97{,}2 = 100{,}1$ млн. руб.;

$I_2 = 1{,}03 \cdot 100{,}1 = 103{,}1$ млн. руб.;

$I_3 = 1{,}03 \cdot 103{,}1 = 106{,}2$ млн. руб.;

$I_4 = 1{,}03 \cdot 106{,}2 = 109{,}4$ млн. руб. и т. д.

Результат соответствует значениям предыдущего расчета, что свидетельствует об эквивалентности моделей роста дохода (1) и (3).

Поскольку g мало, (7) можно записать в виде $m \approx 1/g$.

В заключение приведем основные соотношения, характеризующие c_m-пропорции.

Функции, параметры, свойства c_m-пропорций

1. *Уравнение*

Уравнение, соответствующее (5):

$$mc_m^2 - mc_m - 1 = 0, \tag{1*}$$

$$c_m^2 - c_m - \frac{1}{m} = 0. \tag{2*}$$

2. *Положительный корень уравнения*

$$c_m = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4m}}{2m}, \tag{3*}$$

$$c_m = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{m}}}{2}. \tag{3a*}$$

3. *Сумма целого и обратного значения пропорции*

Из (2*) при делении всех членов уравнения на $c_m \neq 0$, вытекает фрактальное равенство

$$c_m^2 = c_m + \frac{1}{m},$$

$$c_m = 1 + \frac{1}{mc_m}. \tag{4*}$$

4. *Соотношение между целым и частями*

Коэффициент пропорциональности между целым и его частями находится из (4*).

Приняв $c_m = \frac{A}{ma}$, получим, $\frac{A}{ma} = 1 + \frac{1}{m\frac{A}{ma}}$, $\frac{A}{ma} = 1 + \frac{a}{A}$, $\frac{A}{ma} = \frac{A+a}{A}$.

Откуда соотношение между целым и его частями определяется тождеством

$$\frac{A}{a} = m\frac{A+a}{A}. \tag{5*}$$

Квадратичные c-пропорции выражают деление отрезка в пропорции, при которой отношение его большей части A к меньшей a равно увеличенному в m раз отношению всего отрезка $A+a$ к большей части A.

Представим (5*) по-иному

$$\frac{A+a}{A} = \frac{1}{m} \cdot \frac{A}{a}.$$

Квадратичные c-пропорции выражают деление отрезка в пропорции, при которой отношение всего отрезка $A+a$ к большей части A равно уменьшенному в m раз отношению большей части A к меньшей a.

5. *Последовательность*

Приняв в (4*) $c_m = \frac{u_n}{u_{n-1}} \approx \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$, получим $\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}$.

Откуда $mu_n = u_{n-2} + mu_{n-1}$,

$$u_n = \frac{u_{n-2}}{m} + u_{n-1}. \tag{6*}$$

При этом предыдущий член последовательности берется с меньшим весом $\frac{1}{m}$.

Члены последовательности составляют систему

$$\begin{cases} u_1, u_2, \\ u_n = \dfrac{u_{n-2}}{m} + u_{n-1}. \end{cases}$$

Предел отношения смежных чисел последовательности находится из (6*)

$$c_m = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = m \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{u_{n-2}}{m} + u_{n-1}}{u_{n-1}} = 1 + \frac{1}{m} \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} = 1 + \frac{1}{mc_m},$$

что соответствует (4*).

6. *Квадрат пропорции*

Из (2*) вытекает равенство

$$c_m^2 = c_m + \frac{1}{m}. \tag{7*}$$

7. *Фрактальный корень*

Последнее выражение есть фрактал

$$c_m = \sqrt{\frac{1}{m} + c_m},$$

$$c_m = \sqrt{\frac{1}{m} + c_m} = \sqrt{\frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m} + c_m}} = \sqrt{\frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m} + c_m}}} = \sqrt{\frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m} + \dots}}},$$

$$c_m = \sqrt{\frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m} + \dots}}}. \tag{8*}$$

8. *Фрактальная дробь*

Равенство (4*) приводит к представлению пропорции в виде непрерывной дроби

$$c_m = 1 + \frac{1}{mc_m} = 1 + \frac{1}{m\left(1 + \frac{1}{mc_m}\right)} = 1 + \frac{1}{m + \frac{1}{c_m}} = 1 + \frac{1}{m + \frac{1}{1 + \frac{1}{mc_m}}} = 1 + \frac{1}{m + \frac{1}{1 + \frac{1}{m\left(1 + \frac{1}{mc_m}\right)}}};$$

$$c_m = 1 + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{c_m}}}}; \quad c_m = 1 + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{m + \dots}}}. \qquad (9^*)$$

9. *Из истории*

Пропорции и уравнение, определяющее их, найдены автором при поиске системы гармоничных соотношений путем разобщения q-уравнения и оперирования с весами m перед оставшимися членами укороченных уравнений.

10. *Наименование*

Рассмотренным пропорциям в данный момент сложно дать логичное и целесообразное название, поэтому предварительно назовём их квадратичными c-пропорциями и обозначим c_m.

11. *Доминанта*

Ею, видимо, следует считать соотношение (8*) $c_m = \sqrt{\frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{m} + \dots}}}$.

12. *Численные значения* c_m *-пропорций*

Результаты представим в таблицах 2 и 3.

Таблица 2

Прямые c_m-пропорции

m	Уравнение	Фрактальный корень	u_n	Корень уравнения	Число c_m
1	$c_1^2 - c_1 - 1 = 0$	$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$	$u_{n-2} + u_{n-1}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	1,618
2	$2c_2^2 - 2c_2 - 1 = 0$ $c_2^2 - c_2 - \frac{1}{2} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\dots}}}$	$\frac{u_{n-2}}{2} + u_{n-1}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	1,366
3	$3c_3^2 - 3c_3 - 1 = 0$ $c_3^2 - c_3 - \frac{1}{3} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{3}+\dots}}}$	$\frac{u_{n-2}}{3} + u_{n-1}$	$\frac{3+\sqrt{21}}{6}$	1,263
4	$4c_4^2 - 4c_4 - 1 = 0$ $c_4^2 - c_4 - \frac{1}{4} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{4}+\dots}}}$	$\frac{u_{n-2}}{4} + u_{n-1}$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	1,207
5	$5c_5^2 - 5c_5 - 1 = 0$ $c_5^2 - c_5 - \frac{1}{5} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{5}+\sqrt{\frac{1}{5}+\sqrt{\frac{1}{5}+\dots}}}$	$\frac{u_{n-2}}{5} + u_{n-1}$	$\frac{5+3\sqrt{5}}{10}$	1,170
m	$mc_m^2 - mc_m - 1 = 0$ $c_m^2 - c_m - \frac{1}{m} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{m}+\sqrt{\frac{1}{m}+\sqrt{\frac{1}{m}+\dots}}}$	$\frac{u_{n-2}}{m} + u_{n-1}$	$\frac{m+\sqrt{m^2+4m}}{2m}$ $\frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{m}}}{2}$	c_m

Таблица 3

Обратные c_m-пропорции

m	Уравнение	Фрактальный корень	u_n	Корень уравнения	Число $\bar{c}_m$
1	$\bar{c}_1^2 + \bar{c}_1 - 1 = 0$	$\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \ldots}}}$	$u_{n-2} - u_{n-1}$	$\dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$	0,618
2	$2\bar{c}_2^2 + 2\bar{c}_2 - 1 = 0$ $\bar{c}_2^2 + \bar{c}_2 - \dfrac{1}{2} = 0$	$\sqrt{\dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{1}{2} - \ldots}}}$	$\dfrac{u_{n-2}}{2} - u_{n-1}$	$\dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$	0,366
3	$3\bar{c}_3^2 + 3\bar{c}_3 - 1 = 0$ $\bar{c}_3^2 + \bar{c}_3 - \dfrac{1}{3} = 0$	$\sqrt{\dfrac{1}{3} - \sqrt{\dfrac{1}{3} - \sqrt{\dfrac{1}{3} - \ldots}}}$	$\dfrac{u_{n-2}}{3} - u_{n-1}$	$\dfrac{\sqrt{21} - 3}{6}$	0,263
4	$4\bar{c}_4^2 + 4\bar{c}_4 - 1 = 0$ $\bar{c}_4^2 + \bar{c}_4 - \dfrac{1}{4} = 0$	$\sqrt{\dfrac{1}{4} - \sqrt{\dfrac{1}{4} - \sqrt{\dfrac{1}{4} - \ldots}}}$	$\dfrac{u_{n-2}}{4} - u_{n-1}$	$\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$	0,207
5	$5\bar{c}_5^2 + 5\bar{c}_5 - 1 = 0$ $\bar{c}_5^2 + \bar{c}_5 - \dfrac{1}{5} = 0$	$\sqrt{\dfrac{1}{5} - \sqrt{\dfrac{1}{5} - \sqrt{\dfrac{1}{5} - \ldots}}}$	$\dfrac{u_{n-2}}{5} - u_{n-1}$	$\dfrac{3\sqrt{5} - 5}{10}$	0,170
m	$\bar{m}c_m^2 + m\bar{c}_m - 1 = 0$ $\bar{c}_m^2 + \bar{c}_m - \dfrac{1}{m} = 0$	$\sqrt{\dfrac{1}{m} - \sqrt{\dfrac{1}{m} - \sqrt{\dfrac{1}{m} - \ldots}}}$	$\dfrac{u_{n-2}}{m} - u_{n-1}$	$\dfrac{\sqrt{m^2 + 4m} - m}{2m}$ $\dfrac{\sqrt{1 + \dfrac{4}{m}} - 1}{2}$	$\bar{c}_m$

Вывод. Предложена модель роста доходов в геометрической прогрессии по модели рекуррентной последовательности на базе c_m-пропорций. Модель базируется на авторских исследованиях в области математики гармонии и позволяет улучшить психологическое восприятие достижимости роста дохода, в т. ч. В оценке стоимости бизнеса.

Источники: печатные и электронные публикации

1. *Стахов А.П.* Авторитет природы и математика гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 17351, 10.03.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321110.htm.

2. *Коупленд Т.* Стоимость компаний: оценка и управление. 3-е изд., перераб и доп. / Т. Коупленд, Т. Коллер, Дж. Муррин; Пер. с англ. - М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2008. – 576 с. – (Мастерство).

3. *Шенягин В.П.* Процессы, порождающие гармонию // «Академия Тринитаризма», М., Эл. № 77-6567, публ. 17337, 28.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321243.htm.

4. *Шенягин В.П.* Модели роста доходов и продленной стоимости в оценке бизнеса / Конкурентоспособность экономики России : проблемы и пути повышения : Труды XI Чаяновских чтений. Москва, 17 марта 2011 г. / Под ред. Н.И. Архиповой. – М. : РГГУ, 2011. – 442 с, с. 334-340.