

## КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ. РАБОТА НАД ОШИБКАМИ.

Поводом к написанию настоящей статьи явилось желание исправить ошибочное представление о критериях подобия, встречающееся в работах по теории подобия.

То, что является объектом нашего внимания, и то, что с этим объектом происходит, объединим одним термином - событие. Определение подобия двух событий не вызывает возражений.

Два неодинаковых события подобны, если в результате преобразований параметров, характеризующих события, эти параметры совпадут.

Гулливвер и лилипут похожи как клоны, но отличаются ростом из-за того, что их рост меряется одной метрической меркой. У одного рост три метра, а у другого 30см, а размеры ступни 30см и 3см соответственно. Если отказаться от метрической системы измерений и мерить рост размерами ступни, то тогда рост Гулливера станет равным 10 и такого же роста станет лилипут. Отношение роста к размеру ступни является критерием подобия. При равенстве этих отношений подобие имеет место, а в противном случае оно отсутствует. Переходя от частного к общему, сделаем на основе этого примера предварительное заключение.

Преобразование, которому подвергаются параметры двух событий для установления подобия, заключается в отказе от измерения этих параметров независимыми от событий единицами измерений и в переходе на единицы измерений, заимствованные из самих событий. Новые единицы измерений назовем связанными по аналогии со связанными осями координат, применяемыми в аэродинамике. Примерами связанных единиц измерений могут быть: калибр снаряда при измерении длины ствола орудия в калибрах, ускорение свободного падения при измерении ускорений во время старта

ракеты и т. п. Преобразованиями параметры событий переносятся из реального пространства, где используется международная система единиц СИ или ей подобная, в некое виртуальное пространство, в котором все измеряется в связанных единицах измерений, а события предстают в искаженном виде. Неодинаковое становится одинаковым. Это делается для того, чтобы убедиться в подобии двух событий. Подобие, в свою очередь, открывает путь к моделированию. Ради этого и создавалась теория подобия.

Ниже приводится метод определения критериев подобия, способ обеспечения их равенства и порядок реализации модельного эксперимента. Перечисляются правила, которые при этом должны соблюдаться, чтобы избежать возможных ошибок. Изложение материала сопровождается примером из области баллистики движения тел в атмосфере. С него и начнем.

Полигон располагает двумя пневматическими пушками разного калибра для испытаний парашютов на прочность. Парашют крепится к холостому снаряду и при выстреле испытывает максимальное натяжение строп. Выстрел из пушки при этих испытаниях характеризуется следующими параметрами.

#### Список 1. Исходные параметры

$F$  - площадь парашюта,

$v$  - дульная скорость снаряда,

$M$  - масса снаряда,

$\rho$  - плотность воздуха,

$g$  - ускорение свободного падения,

$\Theta$  - угол возвышения ствола.

Это необходимый и достаточный список параметров, от которых зависит эксперимент. Все шесть параметров известны до выстрела и не меняются в процессе выстрела.

Зная цель эксперимента, следует заранее составить список параметров, которые нужно определить в результате его проведения.

## Список 2. Искомые параметры

$L$ - дальность стрельбы,

$T$ - время полёта снаряда,

$R$ - максимальное натяжение строп.

Натурный парашют площадью  $100\text{м}^2$  может быть испытан только на пушке большого калибра. Исходные параметры приведены на рис.1А. Из-за технических проблем принимается решение проводить испытания на пушке малого калибра. Задача состоит в том, чтобы с помощью теории подобия определить исходные параметры модельного эксперимента. Но перед этим должно быть выполнено следующее.

Правило 1. Составить список исходных данных, от которых зависит натурный процесс, и указать численные значения исходных параметров. Составить список искомых параметров, которые еще предстоит определить Рис.1В .

Приступая к определению параметров модельного эксперимента, следует поставить цель избавиться от привычных единиц измерений, от килограмм, метров, секунд и их производных единиц, и перейти к связанным с выстрелом единицам измерений. Здесь сознательно не упомянута такая не менее важная единица измерений, как градусы, применяемая при измерении углов. Об этом ниже будет отдельный разговор. При переходе к связанным единицам измерений следует руководствоваться определенными правилами.

Правило 2. Число основных связанных единиц измерений должно быть равно числу основных единиц из международной системы единиц СИ.

В нашем случае их должно быть три, поскольку в списке 1 встречаются три размерности: кг, м, с. Из списка 1 приходится выбирать три параметра из пяти. Выбор пал на площадь парашюта, дульную скорость и массу снаряда. Величины этих трех параметров стали единицами измерений. Образовавшуюся связанную систему измерений будем именовать  $F_{\text{DM}}$ -система измерений.

Правило 3. Основные единицы связанной системы измерений должны содержать все основные размерности исходной системы измерений.

$Fv$ g-система измерений непригодна, так как не содержит размерность массы, а  $\rho Fm$ -система не содержит размерность времени. Список возможных вариантов, из которых можно было бы выбирать связанную систему измерений для выстрела, выглядит следующим образом:  $Fg\rho$ ,  $\rho g v$ ,  $\rho v m$ ,  $F v m$ ,  $\rho m g$ ,  $F m g$ ,  $m g v$ ,  $F \rho v$ .

Правило 4. Ни одна связанная единица измерений не должна равняться нулю.

Нулевой меркой ничего не измеришь.

Правило 5. Производные единицы измерений следует образовывать умножением и делением параметра из списка 1 на основные связанные единицы измерений, вынесенные в название выбранной системы единиц, добиваясь исчезновения независимых единиц измерений.

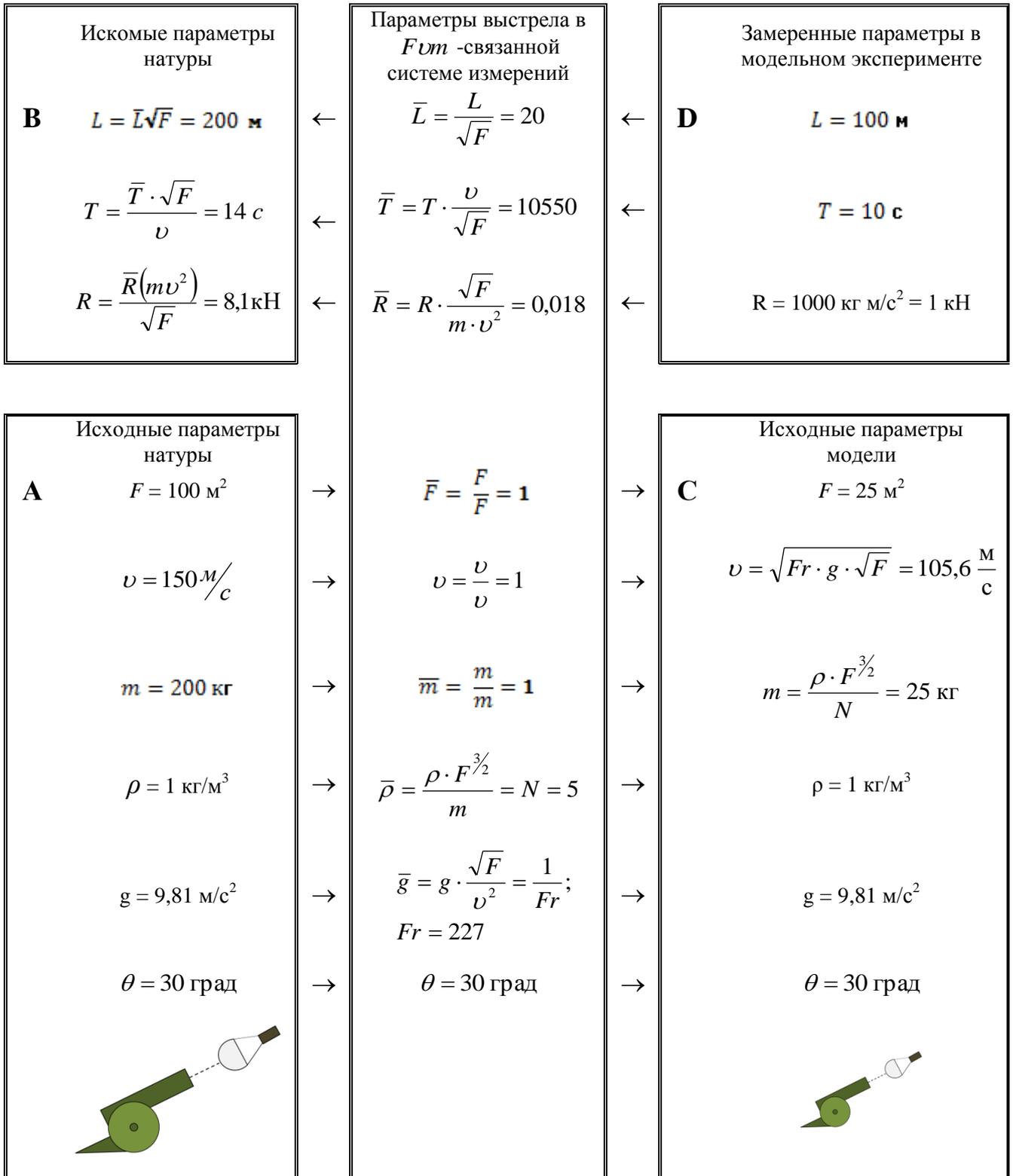


Рис. 1. Схема реализации модельного эксперимента.

Образовавшиеся при этом комплексы в виде произведений нескольких параметров принято называть критериями подобия. Рис.1А→С иллюстрирует переход от параметров с размерностями, принятыми в системе СИ, к этим же параметрам в  $F\text{um}$  - системе единиц измерений. Черта над параметром является знаком того, что параметр находится в виртуальном пространстве, где все измеряется в  $F\text{um}$  - системе единиц измерений. Размерностям килограмм, метр, секунда там нет места. Следует обратить внимание на то, что какую бы связанную систему измерений мы не выбрали, параметры, не удостоенные названия основной единицы измерений, превратятся в виртуальном пространстве в критерии подобия. Так плотность воздуха стала числом  $N = \frac{\rho \cdot F \cdot \sqrt{F}}{m}$ , а ускорение свободного падения  $g$  числом  $1/Fr$ , где  $Fr$  – число Фруда  $Fr = \frac{v^2}{g \cdot \sqrt{F}}$ .

Перейдем к определению параметров модельного эксперимента. Площадь модельного парашюта была выбрана  $25\text{м}^2$ . Из условия равенства чисел Фруда определяется дульная скорость  $v = 105,6\text{м/с}$ , а из условия равенства чисел  $N$  масса снаряда должна быть равна  $25\text{кг}$ .

Особое внимание следует обратить на то, что некоторые величины, участвующие в выстреле, имеют направленность, иными словами, являются векторами. Это дульная скорость и сила тяжести, представленная ускорением свободного падения. Угол между этими векторами равен  $120\text{град.}$ , что соответствует углу возвышения ствола  $30\text{град.}$  Очевидно, что для подобия выстрелов этот угол должен быть сохранён, и он является равноправным критерием подобия, несмотря на то, что остается размерной величиной.

Правило 6. При наличии в списке 1 исходных данных векторных величин, углы между векторами являются критериями подобия.

Это правило расширяет сложившееся представление о критериях подобия, включая в список возможных критериев подобия размерную величину. Если объект моделирования не рассматривается как материальная точка, то список критериев подобия дополняется координатами центра масс и точек приложения сил.

Безразмерные коэффициенты, такие как коэффициент трения, коэффициент аэродинамического сопротивления, тоже являются критериями подобия и переносятся с натуры на модель без изменений.

Следующий шаг на пути моделирования это производство самого выстрела с замером параметров, указанных в списке 2: дальности полета снаряда, времени полета и натяжения строп парашюта, рис.1Д.

Подробное изложение порядка действий при моделировании события, сопровождаемое конкретным примером из практики, потребовалось для того, чтобы на этой основе сформулировать ряд замечаний к публикациям по теории подобия.

Замечание 1. Сначала цитата из ГОСТ 23281-78. « Число Фруда характеризует соотношение инерционных сил и сил тяжести в потоке газа».

На самом деле число Фруда характеризует совместное влияние начальной скорости объекта, его габаритов и ускорения свободного падения на событие, являющееся предметом нашего внимания. Никаких признаков «инерционных сил» число Фруда не содержит. Все параметры, входящие в тот или другой критерий подобия, равноправны, поэтому выделение одного и игнорирование остальных является ошибочным.

Замечание 2. Известны три способа нахождения критериев подобия.

Первый способ - приведение уравнений математической модели события к безразмерному виду - приводит, в ряде случаев к ошибкам из-за того, что не снабжен четкой и полной инструкцией, определяющей порядок действий, и правилами, которые при этом должны соблюдаться. Наличие математической модели полезно только в том, что помогает составить список 1, необходимый при любом способе определения критериев подобия.

Второй способ «на базе  $\pi$ -теоремы» лишен указанного недостатка. Он предусматривает: составление матрицы размерностей параметров; выявление числа независимых между собой параметров; нахождение комбинаций независимых между собой параметров и установление их числа; определение выражений критериев подобия во всех формах записи [1].

Сложность этого способа не требует комментариев и способна отпугнуть от моделирования не искушенного в теории подобия специалиста.

Третий способ, назовем его способом применения связанных единиц измерений, является, по сути, более доходчивым изложением способа, «применения системы относительных единиц [1]. Термин «связанная единица измерений», на наш взгляд, лучше отражает суть этого важного понятия, на котором строится теория подобия. Именно третий способ в предложенной редакции является наиболее простым для получения критериев подобия и защищен от возможных ошибок при соблюдении правил 1...6 его применения.

Замечание 3. Обойден вниманием случай моделирования, когда список 1 содержит векторные величины. В этом случае в число критериев подобия необходимо включить все те начальные углы между векторами, которые обеспечивают одинаковую картину направленности векторов у природы и модели. Если тело не заменяется материальной точкой, то тогда необходимо закоординировать точки приложения к телу векторов в связанной системе координат и включить эти координаты в список 1. О связанной системе координат можно прочесть в учебниках по аэродинамике [2].

Замечание 4. Во многих книгах по теории подобия в список критериев подобия включают число Ньютона

$$Ne = \frac{P \cdot t^2}{m \cdot L}, \text{ где}$$

$P$  – сила;

$t$  – время;

$m$  – масса;

$L$  – расстояние.

В действительности число  $Ne$  критерием подобия не является. Ошибка произошла из-за того, что четыре параметра, входящие в число  $Ne$ , не были поделены между списками 1 и 2.

Например, если сила  $P$ , масса  $m$  и время  $t$  относятся к исходным параметрам списка 1, то расстояние  $L$ , пройденное за время  $t$ , будет искомой величиной и место  $L$  в списке 2.

Исходных параметров остаётся три. Столько же независимых единиц измерений: кг, м, с.

В соответствии с р-теоремой число критериев подобия равно  $3-3=0$ . Отсутствие критериев подобия означает, что при всех комбинациях исходных параметров события будут подобными.

В заключение несколько слов о возможностях, которые предоставляет теория подобия в плане проведения модельного эксперимента, ради чего она и создавалась.

Определение подобия, данное в начале статьи, не ограничивает критерии подобия структурами вида приведенных в примере чисел  $N$  и  $Fr$ . Критериями подобия могут быть арифметическое выражение, степенной ряд и вообще все, что обеспечивает выполнение возложенных на критерии подобия функций – в случае их равенства делать возможным проведение модельного эксперимента.

Преобразование, предусматривающее переход от международной к связанной системе единиц измерений, которое приводит к переходу от параметров события к критериям подобия, не является единственно возможным. Для этой цели могут быть использованы уравнения, представляющие собой математическую модель события. При этом поступают следующим образом. В математической модели выделяют фрагмент, по которому отсутствует информация о его величине. Этот фрагмент, будь то константа или функция, переводят в связанную систему единиц измерений и наделяют его полномочиями критерия подобия. Далее подбирают условия проведения модельного эксперимента, в котором этот критерий подобия может быть определен

В качестве примера рассмотрим движение тела на сверхзвуковой скорости. Математической моделью являются уравнения баллистики, а критерием подобия – переменный коэффициент сопротивления  $c_x=f(M)$ , где  $M = \frac{v}{a}$  число Маха, представляющее собой отношение скорости тела к скорости звука в окружающей тело атмосфере. Геометрически подобную модель тела помещают в сверхзвуковую аэродинамическую трубу и продувают модель на разных скоростях, измеряя скорость потока и силу сопротивления  $R$  модели. Коэффициент сопротивления определяют по формуле

$$C_x = \frac{2 \cdot R}{F_n \cdot \rho \cdot v^2}$$

где  $\rho$  -массовая плотность воздуха,

$F_n$ -площадь миделева сечения тела.

Полученную зависимость  $c_x=f(M)$  используют в уравнениях баллистики для расчета траекторных параметров натурального объекта.

Последний пример относится к разделу теории подобия под названием нелинейное подобие. Можно предположить, что возможности теории подобия и моделирования еще далеко не исчерпаны.

### **Список использованных источников**

- 1 Веников В.А. Теория подобия и моделирование, М., Высшая школа, 1968г.
- 2 Мартынов А.К. Экспериментальная аэродинамика, М., Оборонгиз, 1958г.
- 3 Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике, М., Наука, 1967 г.