С.Л. Василенко

Об одной обобщённой модели Фибоначчи

Есть многое на свете, друг Горацио,
Что и не снилось нашим мудрецам...

В работах [1–3] подробно освещены разные аспекты вокруг так называемых p-сечений.

По нашему мнению, в них убедительно показано, что по субъективным оценкам уровень их значимости завышен.

Напомним, что p-сечение целого на две части соотносят с вещественным корнем $\lambda > 1$ алгебраического уравнения[1] $x^p = x^{p-1} + 1$. Ему адекватно соответствует линейное разностное уравнение $f_{n+p} = f_{n+p-1} + f_n$ с дискретно-временным параметром n.

Задача "p-чисел" раньше многих рассмотрена математиком Д. Пойа, который предложил её своим читателям [4, с. 114][2] в качестве несложного упражнения.

Учёный дал и подсказку-ориентир на привлечение биномиальных коэффициентов и изменение наклона в треугольнике Паскаля. Он также привел алгоритм формирования упомянутых рядов [4, с. 393] по «рекуррентной формуле (уравнение в конечных разностях); упр. 14 гл. 4» $y_n = y_{n-1} + y_{n-p}$.

Русскоязычные "p-числа" впервые упоминаются в последнем университетском сборнике уходящего 1970 г. [5], – после опубликования научной монографии [4].

Временной фактор понятен. Книги с интригующим названием "Математическое открытие" в те времена быстро раскупались и катализировали научную мысль.

Но всё это будет далеко неполной характеристикой без анализа обширной библиографии специалистов ассоциации Fibonacci Association.

1) Наиболее примечательной здесь, пожалуй, является работа [6] Джозефа (1963).

В ней рассматривается модель

$$x^p - ax^{p-1} - b = 0 \tag{1}$$

с эквивалентным разностным уравнением $f_{n+p} = af_{n+p-1} + bf_n$.

Отличительная черта упомянутой статьи – подробный анализ сумм в обобщённых треугольниках Паскаля. Показано, что параллельные диагональные суммы дают искомые члены числовых рядов.

В разных последовательностях Фибоначчи начальные условия часто принимаются равными нулю, а последнее из них – единице.

Применительно к модели (1) начальные условия можно представить в таком виде:

n	…	–2	–1	0	1	2	…	p–1
f_n	0	0	0	1	a	a^2	…	a^{p-1}

В работе [6] выведена аналитическая комбинаторная формула

$$f_n = \sum_{k=0}^{\lceil n/p \rceil} C_{n-pk-k}^{\,k}\, a^{n-pk}\, b^k\,, \tag{2}$$

[1] Используется также эквивалентная запись $x^{p+1} = x^p + 1$.

[2] На английском книга опубликована отдельными томами в 1962 и 1965 гг.

где $C_m^i = \binom{m}{i} = \dfrac{m!}{i!\,(m-i)\,!}$ – биномиальные коэффициенты;

$m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$ – факториал от m с условным принятием $0! = 1$;

$[\xi] = \mathrm{trunc}(\xi)$ – целая часть ξ (наибольшее целое число, не превосходящее ξ).

Также показано, что отношение членов последовательности стремится к своему аттрактору – максимальному по модулю корню уравнения (1):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+k}}{f_n} = \lambda^k .$$

Например, уравнение $x^4 - 2x^3 - 3 = (x+1)\left(x^3 - 3x^2 + 3x - 3\right) = 0$ имеет максимальный по модулю корень $1 + \sqrt[3]{2}$.

Последовательность: 1, 2, 4, 8, 19, 44, 100, 224, 505, 1142, 2584...

Отношение членов последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_{n+k}}{f_n} = \left(1 + \sqrt[3]{2}\right)^k$.

Частный случай $a = b = 1$ приводит к p-сечениям.

Следует заметить, наличие коэффициентов (a, b) в целом существенно повышает доверие к модели. Ибо на практике в реальных условиях идеальные характеристики сбиваются в результате действия случайных либо просто непредсказуемых факторов.

2) В статье [7] Харриса–Стилса (1964) рассмотрено другое характеристическое уравнение

$$x^p (x-1)^q - 1 = 0 \tag{3}$$

с единичными начальными условиями $f_k = 1,\ k = \overline{0,\ p+q-1}$.

При $q = 1$ образуется уравнение $x^{p+1} = x^p + 1$.

Последовательность, эквивалентную уравнению (3), можно выразить в явном виде через его корни λ_j

$$f_{n-1} = \sum_{j=1}^{p+q} c_j \lambda_j^n$$

Действительно, ни один из корней первой производной $y'(x) = x^{p-1}(x-1)^{q-1}[(p+q)x - p]$ не является корнем полинома $y(x) = x^p (x-1)^q - 1$.

Значит, этот полином не содержит повторяющихся корней.

Определитель коэффициентов системы уравнений $\sum\limits_{j=1}^{p+q} c_j \lambda_j^m = 1,\ m = \overline{1,\ p+q}$ не равен нулю. Система может быть решена по правилу Крамера.

В результате получается обобщение формулы Муавра-Бине

$$f_{n-1} = \sum_{j=1}^{p+q} \frac{\lambda_j^n}{(p+q)\lambda_j - p} . \tag{4}$$

Для модели p-сечения формула ещё более упрощается (q =1).

Заметим, что формуле (4) уже около 50 лет.

Причём она более высокого уровня обобщения, чем простое p-сечение.

Сами же авторы данной терминологической формы так и не довели задачу до её логического завершения. Они ограничились лишь несколькими частными примерами, а также изложением общего порядка расчёта [8] (2005), давно известного в линейной алгебре.

То есть без непосредственного получения формулы Муавра-Бине (4) в явном виде.

Понятно, обобщённые ряды Люка не в счёт. Ибо для любого алгебраического полинома они определяются простым суммированием степеней корней $\sum_j \lambda_j^n$.

Подобно (2) в работе [7] представлена аналитическая комбинаторная формула

$$f_n = \sum_{k=0}^{\left\lceil \frac{n}{p+q} \right\rceil} C_{n-pk}^{qk} . \tag{5}$$

Единственное, так это следует различать разные записи p и $p+1$, принятые авторами для удобства представления.

Ну, и конечно, начальные условия, от которых зависят весовые коэффициенты.

Суммирование первых членов последовательности (5) приводит к соотношению, $q > 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} f_n = \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \, C_{q-1}^{j} \, f_{n+p+q-j} .$$

Для p-последовательности формула упрощается:

$$\sum_{k=0}^{n} f_n = f_{n+p+1} - 1.$$

Представляет также интерес следующая форма:

$$f_{n+k} = f_n f_k + \sum_{j=0}^{p-1} f_{n-1-j} f_{k-p+j} .$$

3) В работе Дикинсона (1950) [9] рассмотрены числовые последовательности, образующиеся путем суммирования биномиальных коэффициентов (в треугольнике Паскаля) для модели $x^p - x^m - 1 = 0$. Пожалуй, это один из наиболее ранних источников, в котором исследован прототип p-структуры.

Таким образом, модель $x^p = x^{p-1} + 1$, упоминаемая в работе [5] и последующих изданиях, исторически уже была предметом детального изучения в более ранних исследованиях зарубежных математиков (Пойа, Dickinson, Joseph, Harris, Styles и др.).

Единственное отличие: никто и нигде не называл это "золотыми" сечениями.

Оно и правильно. Ничего похожего на золотое сечение (ЗС) данные модели не имеют.

Если и вести речь, то допустимо говорить о *развитии задачи* ЗС.

Основные выводы.

1. Базой взаимосвязанной системы p-объектов (последовательностей, аттракторов и т.п.) являются идеи математика Д. Пойа и ряда исследователей, в том числе из Ассоциации Фибоначчи. Ими же были получены ключевые соотношения по данной модели.

2. Несмотря на заведомо завышенную гиперболизацию большинства положений вокруг p-объектов, модель $x^p = x^{p-1} + 1$ как «*трином двух старших степеней*» может представлять определённый интерес в исследованиях. Но без терминологических золочений!

В частности, следует более внимательно присмотреться ко второму наименьшему числу Пизо $\lambda_2 \approx 1{,}380$ – корню полинома $x^4 - x^3 - 1$.

Весьма любопытно наличие аналитического решения для уравнения пятой степени $x^5 - x^4 - 1 = 0$: $\lambda = \frac{c}{6} + \frac{2}{c} \approx 1{,}3247$, где $c = \sqrt[3]{12 \cdot (9 + \sqrt{69})}$.

Просто желательно раскрепостить рассудок и смотреть на подобные вещи несколько свободнее, расширяя горизонты осмысления. Не замыкаться на изъезженных трафаретах, заимствованных из ограниченного инструментария по изучению особенностей золотого сечения, основанного на самом простом уравнении второго порядка $x^2 = x + 1$.

Литература:

1. *Василенко С.Л.* В поисках золотника // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15629, 03.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161569.htm.
2. *Василенко С.Л.* Миф про обобщения золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.07.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=32&sm=2.
3. *Василенко С.Л.* Незадачливые *p*-сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=50&sm=2.
4. *Пойа Д.* Математическое открытие: Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 452 с.
5. *Витенько И.В., Стахов А.П.* Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования // Приборы и системы автоматики. – Харьков: ХГУ, 1970. – Вып. 11.
6. *Raab Joseph A.* A Generalization of the Connection between the Fibonacci sequence and Pascal's Triangle // The Fibonacci Quarterly, 1.3 (1963), 21–31.
7. *Harris V.C., Carolyn C. Styles.* A Generalization of Fibonacci Numbers // Fibonacci Quarterly, 2.4 (1964), 277–289.
8. *Stakhov A., Rozin B.* Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers // Chaos, Solitons & Fractals. – 2005, 27(5), 1162–1177. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321036.htm.
9. *Dickinson David.* On Sums Involving Binomial Coefficients // American Mathematical Monthly. – Vol. 57, 1950, 82–86.

Приложение

Выдержка из статьи

Василенко С.Л. Идентификация рекуррентных рядов

Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15487, 25.08.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161531.htm.

В общем случае базой может служить алгебраическое уравнение степени n с неизвестным x и действительными коэффициентами a_j

$$x^n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \qquad (П1)$$

и его линейно-разностное представление $(t = 0, 1, 2, ...)$

$$x_{n+t} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_{j+t} \, . \qquad (П2)$$

Уравнение (П1) представлено в таком виде специально, чтоб наиболее отчетливо высветить взаимосвязь с его разностным аналогом (П2):

верхний индекс (степенной) переменной x становится ее нижним (порядковым), и к нему прибавляется другая переменная t, символизирующая развитие процесса во времени в дискретных точках.

Несмотря на незамысловатость записи (П1) – (П2), мы фактически выходим на весьма общее представление колоссального множества рекуррентных рядов.

В этой связи следует отметить и пояснить один очень важный момент, который до сих пор нередко вызывает путаницу вследствие безграмотно используемой терминологии.

Одним из частных случаев (П1) – (П2) является уравнение "золотого" сечения

$$x^2 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{2+t} = x_{1+t} + x_t . \qquad \text{(П3)}$$

Берется другой подкласс уравнений (П1)–(П2), например,

$$x^p = x^{p-1} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{p+t} = x_{p-1+t} + x_t . \qquad \text{(П4)}$$

Исходя из того, что пара уравнений (П3) является частным случаем (П4) при $p = 2$, все решения в подклассе (П4) объявляются "обобщениями (кодами) золотого сечения". – Налицо явное нарушение правил формальной логики и причинно-следственных отношений.

Покажем это. Учитывая, что (П3) является частным случаем не только (П4), но и (П1) – (П2), проводим аналогичную псевдонаучную логику и приходим к утверждению, что уравнения (П1) – (П2) тоже дают "коды золотого сечения". Другими словами, произвольное алгебраическое уравнение, а значит и его решение, обобщает "золотое" сечение (ЗС).

Но своими решениями алгебраическое уравнение (П1) практически охватывает всю числовую ось!

То есть по этой противоречивой логике:

√ всякое квадратное или кубическое уравнение – это обобщенные "золотые" сечения!?

√ практически любое действительное число, которому можно сопоставить решение (действительный корень) уравнений (П1) – (П2), – это тоже обобщенное "золотое" сечение!?

√ почти вся числовая ось – сплошное "золотое" сечение!?

Подобные утверждения противоречат не только основам математики и классическому определению гармонической пропорции, но и просто здравому смыслу.

www.trinitas.ru