С.Л. Василенко

Базовые соотношения между фундаментальными константами

Что было, когда "ничего" не было…[1]

Незамысловатый равносторонний пятиугольник, если и упоминается золотоискателями - исследователями феномена золотого сечения (ЗС), то обычно с некоторым магическим вожделением.

Возможно, в этом есть некий смысл.

Но с позиций современной науки имеет место элементарно-очевидный математический образ-объект.

Весь вопрос лишь в степени его универсальности и широте распространения.

Причём в явной, доказуемой и содержательной форме. А не в виде вымыслов или сочиняемых фантазий, как часто представляется в литературе.

Понятно, если в некоторой числовой форме фигурирует корень из пяти, то это достоверно ассоциируется с симметричной пятиугольной звездой, которая априори выражает свойства золотого сечения.

Другое дело исторический контекст. Не зная заранее алгебраическую форму золотого сечения, его с трудом, но находили геометрически ещё древние греки.

И это явилось большим достижением античных учёных.

Сегодня же связь «ЗС – корень из пяти – пятиугольник» выглядит довольно тривиально.

Не азбучным только остаётся вопрос: «А почему именно так?».

Алгебраически это происходит от квадратного корня из суммы ($1^2 + 2^2$), что геометрически адекватно гипотенузе треугольника с соотношением катетов $1:2$.

Здесь прослеживается непосредственная связь с теоремой Пифагора и глубокая квадратичная закономерность.

Вполне естественно, что везде, где в объемных телах встречаются пятиугольники, также можно ожидать ЗС в разных ракурсах.

Но золотоискателям этого оказывается мало.

Считая число золотого сечения $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ безмерно значимым, они устремляют свои усилия на перманентный поиск его возможных функциональных связей с другими константами (π, e и др.), наперебой предлагая разнообразные соотношения.

Всё бы и ничего. Но большей частью получаемые зависимости непомерно приближённые, и ничего особенного, кроме полезной тренировки ума, за собой не несут.

Остальные соотношения преимущественно основаны на азбучных тождествах, порождая очевидные замены одних циферок-буковок на другие, без содержательного наполнения равенств новым смыслом-толкованием.

Весьма непросто разобраться на этом "поле чудес страны ЗС".

Главной задачей настоящей работы является выделение наиболее характерного и представительного поля-пространства в базовых соотношениях между фундаментальными константами (π, e, Φ).

Общие сведения

Числа (π, e, Φ) весьма востребованы в науке. Хотя золотое сечение особо не балует своей значимостью и распространённостью. – В основном на уровне разных предположений.

Установить между ними точную нетривиальную аналитическую связь чрезвычайно трудно, если вообще возможно.

---

[1] Шкловский И.С. / Земля и Вселенная. – 1984. – № 4. – С. 36.

Вероятно, потому, что онтологически это совершенно разные константы:

Ф – целое алгебраическое число, как корень многочлена с целыми коэффициентами, старший из которых равен единице;

e, π – трансцендентные числа, причём совершенно разной природы.

Кстати, e – первое число[2], которое не было выведено как трансцендентное специально. Его трансцендентность была доказана Эрмитом (1873).

Если и говорить об аналитических зависимостях, то они, на наш взгляд, возможны только на уровне бесконечных математических структур, "скрадывающих" и нивелирующих издержки несовместимости данных чисел под одним знаком равенства.

Как, например, непревзойдённое числовое тождество гениального математика С. Рамануджана [1, с. 63; 2]

$$\left(1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{2}{1+}\,\frac{3}{1+}\,\frac{4}{1+}\ldots\right)=\sqrt{\frac{\pi\cdot e}{2}}\,, \tag{1}$$

где фантастически-непостижимым образом числа π, e выражаются через сумму бесконечного ряда и бесконечной цепной дроби!

Это образец истинного нетривиального математического соотношения, которое удовлетворяет двум существенным положениям:

– равенство позволяет уравнять обе его части с любой точностью;

– левая и правая части равенства не являются очевидным преобразованием известных в математике базовых тождеств или перезаписью обычных функций.

Возможно, (1) – самая красивая формула индийского математика. Истинное произведение математического искусства.

Примечательно, что ни ряд, ни цепная дробь не выражаются через π, e.

Но их сумма неожиданно оказывается равной $\sqrt{\pi e/2}$!

Данная формула – единственная в своем роде, которая связывает бесконечный ряд и бесконечную цепную дробь [3].

Критический обзор некоторых исследований

а) В Интернет есть весьма популярная статья [4], если судить по её копированию на разных сайтах. В ней утверждается, что найдено простое и красивое соотношение, связывающее безразмерные константы (постоянную тонкой структуры α, число π и золотое отношение Ф): $\alpha^{20}=\sqrt[13]{\pi\Phi^{14}}\cdot 10^{-43}$.

Конечно же, это приближённое соотношение. Подобные формулы, может и не столь лаконичные, на компьютере "штампуются" десятками. – Только ради чего?

Воистину, удивляет другое.

На основе этой явно приближённой математической формы автор безапелляционно вычисляет новое расчетное значение $\alpha = 1/137{,}036\,009\,823\ldots$ (?) – с точностью до 5 знаков. Хотя это «до мозга костей» физическая константа, которая определяется отношением трёх физических величин: элементарного электрического заряда, приведенной постоянной Планка и скорости света в вакууме.

Не аргументированным является и вывод [4]: «Полученные результаты указывают на геометрический статус постоянной тонкой структуры, а также на то, что все безразмерные параметры, которые характеризуют микромир и Вселенную, являются принципиально вычисляемыми». – Исходная формула совершенно не подтверждает геометрический смысл α, и уж тем более принципиальную возможность вычисления параметров микромира.

---

[2] The number e. – http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/e.html.

Что касается самой формульной записи, то существует множество иных абстрактно-формальных приближённых представлений[3]. Например, величина α весьма точно вычисляется [5], как корень уравнения $\alpha^{-1} = 137 + \dfrac{\delta}{\alpha^{-1} - \delta\pi/2}$ с постоянной Фейгенбаума δ динамики хаоса, и составляет $\alpha = 1/137{,}035\,999\,559\ldots$, что аппроксимирует экспериментальное значение до десятого десятичного знака. – Достойный результат.

b) Работа [6] посвящена «связи констант e и π с золотым сечением».

Она небольшая, можно сказать, тезисная. Но удивительным образом вмещает сразу несколько неточностей.

Сначала, в который раз, по нашему мнению, ошибочно, утверждается «об асимптотическом стремлении к золотому сечению приведенной к единице энтропии симметричного нормального распределения при увеличении объема выборки n».

В статье [7] показано, что это далеко не так.

Точное значение $\mathrm{H}(n)$-меры неопределенности состояния системы (меры хаоса, информационной энтропии) выражается убывающей функцией $\mathrm{H}(n) = \dfrac{1}{2} + \log_n \dfrac{\pi e}{2}$. Она пересекает линию золотого сечения $\phi = \Phi^{-1} \approx 0{,}618$ почти в точке $n = 486$ и в последующем $(n \to \infty)$ без какой-либо "золотоносности" стремится к своей естественной асимптоте 0,5.

Одна погрешность порождает следующий неверный ход, когда автор заявляет [6] о естественной функциональной связи $F(\pi, e, \Phi) = 0$ через нормальное распределение.

Венцом этой ложной цепочки становится вывод: «если числа e и π по своей природе не являются решением некоторой оптимизационной задачи, то и константа золотого сечения Φ также не является решением оптимизационной задачи».

Трудно судить о какой именно природе чисел идёт речь. И тем более оптимизации, предполагающей априорное наличие критериев.

Но можно привести немало примеров, где числа e и π являются решением задач, связанных с поиском экстремумов.

Например, вероятность несократимости дроби a/b или выбора из натурального ряда $N \to \infty$ пары взаимно простых чисел равна $6/\pi^2$.

Кроме того, из всех замкнутых кривых заданной длины окружность ограничивает область максимальной площади.

Ещё труднее постичь логику установления причинно-следственных отношений в вышеупомянутом выводе, когда говорили об одном, а заключение – совершенно о другом.

Что-то сродни лингвистическому сравнению: «один трамвай зелёный, а другой ... свернул за поворот».

c) Поискам разного рода связей посвящены работы И. Ткаченко [8–10].

Так, его объединение чисел (π, e, Φ) эмпирическим соотношением $7\pi = 5e\Phi$ с точностью до четвёртого знака [8] довольно занимательно, но ничего особого в теорию не привносит.

Зато удивляет другое. Погрешность своей формулы автор объясняет «выполнением действий умножения и деления над приближенными числами». – Разве что на простом калькуляторе. Ибо все константы известны с миллиардами значащих цифр!

Кстати, сама формула – из арсенала аппроксимирующих формул для золотого сечения, часть из которых можно найти в работе [11], в частности [12]:

---

[3] Постоянная тонкой структуры // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=41076758.

$$\Phi \approx \sqrt{\frac{5}{6}\pi}\,, \qquad \phi = \Phi^{-1} \approx \frac{5e}{7\pi}\,.$$

Любопытна связь (с погрешностью 10^{-8}) и с другими константами: $\Phi \approx -\left[\alpha + \left(\frac{7}{8}\right)^K\right]$,

где $K = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^k} \approx 0{,}915965594..$ – константа Каталана[4] (Слоуэн, A006752),

$\alpha = -2{,}502907875..$ – понижающий параметр или вторая константа Фейгенбаума[5] (Слоуэн, A006891).

В статье [9] продемонстрирован целый ряд интересных приближённых формул, например, связь числа e^e с "золотой" константой $e^e \approx 10\Phi - 1$.

К сожалению, далее приводится всё тот же, по нашему мнению, ошибочный посыл, будто в этих формулах «значение ошибки возможно потому, что эти числа сами по себе приближённые». – Конечно, это не так. Ошибка возникает здесь исключительно из-за приближённости равенств. Ибо числа (e, Φ) хоть и являются иррациональными, то есть не выражаются точной десятичной дробью, но имеют почти абсолютное выражение с неимоверно большим количеством цифр.

В работе [10] приведены разные вариации формального совмещения частных случаев формулы Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и безусловного тождества $\Phi = 2\cos\frac{\pi}{5}$. Понятно, что о функциональной связи $\Phi(\pi)$ здесь говорить не приходится, ибо число π играет роль условного искусственно-договорного заменителя развёрнутого угла.

К тому же в формульных связях никак не удаётся избавиться от мнимой единицы i.

Этому вторит В. Шенягин [13], расширяя спектр подобных "мнимых" зависимостей и акцентируя внимание: «Задача поиска функциональной зависимости этих констант требует дальнейшего решения». – Вряд ли. Как таковой задачи поиска подобных функциональных зависимостей констант нет. А потому и дальнейшее решение здесь совершенно не требуется.

Также как в статье [14] продемонстрировано соотношение, которое якобы выражает связь двух универсальных констант – золотого сечения и постоянной Фейгенбаума:

$$\delta = \frac{\sqrt{\Phi}}{\sqrt{\Phi} - 1} = \Phi^2 + \Phi^{3/2} = 1 + \Phi + \Phi^{3/2}\,.$$

Но его точность настолько мала, что говорить о связи здесь просто не приходится.

Да и вообще подобные приближенные зависимости скорее носят чисто "спортивный интерес" и свидетельствуют об изобретательности их авторов, чем каком-либо теоретико-прикладном использовании. Подобные числовые манипуляции похожи на цифровую эквилибристику, благо математика дает большой арсенал чисел и операций, чтобы одни константы приблизить к комбинации других.

Так что смысл здесь больше походит на игровые упражнения [1, с. 181].

Совсем другое дело точные соотношения, пусть даже в виде сходящихся рядов.

За ними стоит связь на генетически-числовом уровне, поэтому доверие к ним чрезвычайное большое.

---

[4] *Marichev O, Sondow J, Weisstein E.* Catalan's Constant / From MathWorld. – a Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/CatalansConstant.html.

[5] *Weisstein E.* Feigenbaum Constant / From MathWorld. – a Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/FeigenbaumConstant.html.

Взаимосвязь констант *π, e*

Явные аналитико-функциональные зависимости $F(\pi, e, \Phi) \approx 0$ малопредставительны, очень приближённы и непродуктивны.

Но вот уже на уровне бесконечных сумм (интегралов) и рядов всё выглядит точно, элегантно, достоверно и теоретически осмысленно.

Так, наравне с великолепием соотношения (1) числа e и π связаны через интеграл Пуассона–Гаусса

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} .$$

Очень показательно разложение $e^{\pi} = 1 + \frac{\pi}{1!} + \frac{\pi^2}{2!} + ... + \frac{\pi^n}{n!} + ...$

Другое отношение между ними устанавливается через бесконечный ряд [15]

$$\frac{\pi}{5\sqrt{\Phi + 2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{\Phi^{2n+1}(2n+1)!} .$$

Весьма любопытно выражение через полилогарифм[6] $\mathrm{Li}_s z$:

$$\pi = \sqrt{6(\ln 2)^2 + 12\mathrm{Li}_2 2^{-1}} ,$$

где $\mathrm{Li}_s z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$, в частности, $\mathrm{Li}_2 2^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k^2}$.

Саймон Плафф нашёл (2006) несколько красивых абсолютно точных формул взаимосвязи $\pi(e)$ с использованием трансцендентного числа – постоянной Гельфонда[7] $q = e^{\pi} \approx 23.14$, например:

$$\frac{\pi}{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{q^n - 1} - \frac{4}{q^{2n} - 1} + \frac{1}{q^{4n} - 1} \right);$$

$$\frac{\pi}{180} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{4}{q^n - 1} - \frac{5}{q^{2n} - 1} + \frac{1}{q^{4n} - 1} \right).$$

Как здесь не вспомнить тождество Эйлера $\left(e^{\pi}\right)^i = q^i = -1$.

Примечательно, что приближённые значения e^{π} можно получать с достаточно быстрой сходимостью, используя рекуррентно определённую последовательность ($a_0^2 = 1/2$):

$$e^{\pi} \approx \left(\frac{4}{a_n} \right)^{2^{1-n}} , \qquad a_n = \frac{1 - \sqrt{1 - a_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - a_{n-1}^2}} .$$

[6] Полилогарифм // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=41273038.
[7] Постоянная Гельфонда // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=29227229.

Очевидные тождества

Некоторые авторы в качестве взаимосвязей фундаментальных констант предлагают абсолютно-тождественные соотношения. Они настолько явны, что с точки зрения функциональных связей не несут за собой сколь значимой и содержательной информации.

В их записи заложены те же известные смыслы, только переписанные и обозначенные другими буковками или частными значениями некоторых функций.

1) Наиболее распространенным вариантом очевидного тождества по теме нашего исследования обычно приводится равенство

$$2\cos(\pi/5)=\Phi \qquad (2)$$

или с учётом равенств $\Phi^2=\Phi+1$ и $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ адекватное представление через синус того же угла $2\sin(\pi/5)=\sqrt{3-\Phi}$.

Но можно ли здесь говорить о функциональной связи π(Φ), позволяющей определять одно число через другое? – Конечно, нет. Всё равно понадобится обратная функция *arccos*.

Перед нами $2\cos(\pi/5)=\Phi$ – одно и то же математическое свойство, просто выраженное двумя эквивалентными способами или разными буковками.

Здесь нет буквального соотнесения с числом π, ибо косинус $\cos(\pi/5)$ – не есть самостоятельное число. Но устанавливает опосредованное взаимоотношение, которое возникло искусственно вследствие условного и как потом оказалось удобного принятия полного оборота в 360 градусов через 2π.

Это наглядно видно из построений, которые восходят ещё к Евклиду и связаны с пятиугольником [16].

Предложение 4.10. Построить равнобедренный треугольник, имеющий каждый из углов при основании, вдвое большим остающегося (рис. 1) [17, с. 132–133].

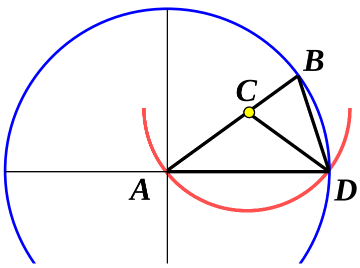

Рис. 1. Геометрические построения к Предложению 4.10 Евклида (о треугольниках ЗС – в современной интерпретации)

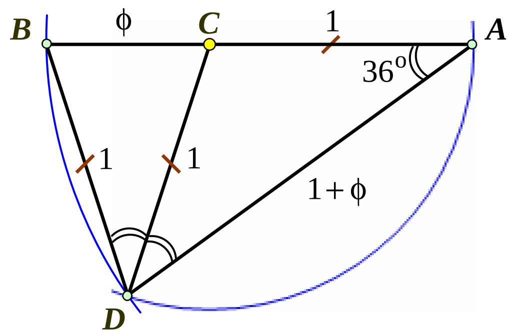

Рис. 2. Треугольники ЗС

1. Проводим прямую *AB* и отмечаем на ней точку *C* – золотого сечения (ЗС) в современной терминологии.
2. Описываем окружность *AB*(*A*) – радиусом *AB* вокруг центра *A*.
3. Описываем окружность *CA*(*C*).
4. Через их точку пересечения проводим отрезки *AD*, *CD* и *BD*.

Получаем равнобедренный треугольник ΔABD, у которого углы при основании *B* и *D* вдвое больше угла при вершине *A*, то есть соответственно равны: 72°, 72°, 36°.

Отрезок *BD* – сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность *AB*(*A*).

Соединение вершин через одну даст правильный пятиугольник.

Треугольники *BCD* и *ACD* – также равнобедренные по построению.

Идея Евклида понятна: полный угол треугольника мы разбиваем на 5 частей по 36° среди трех его углов: (2+2+1)36° = 180°. Наличие таких 5 частей в угловой мере позволяет их легко перенести на 5 частей угловой меры для полного угла 2π и построить правильный пятиугольник, вписанный в окружность.

Треугольники *BCD* и *ABD* подобны. Треугольник *ACD* содержит все те же 5 частей по 36° между его тремя углами: (3+1+1)36° = 180°.

У Воробьева [18, с. 100] они называются *треугольниками золотого сечения* (ЗС).

В сокращенном варианте их часто именуют просто золотыми [19].

Если больший отрезок *AC* условно принять за 1, то меньший станет равен $\phi = \left(\sqrt{5}-1\right)/2$, и все стороны приобретают реальные размерности (рис. 2).

Таким образом, золотой треугольник может характеризоваться как равнобедренный Δ*ABD*, в котором деление пополам угла *D* производит новый Δ*DCB*, подобный оригиналу.

Косинус десятой части полного угла численно равен высоте, опущенной в Δ*ACD* из точки *C*, $(\phi+1)/2 = \Phi/2$. Собственно и всё, без каких либо видимых связей с числом π.

2) Формула (2) не одинока. Комбинируя богатый арсенал тригонометрических тождеств, ряд "мнимых" взаимосвязей $\pi(\Phi)$ расширяется [20]:

$$\pi = 2(\arcsin\phi + \arccos\phi) = 2(\mathrm{arctg}\,\phi + \mathrm{arctg}\,\Phi);$$

$$\phi = 2\sin\frac{\pi}{10} = 2\sin\frac{9\pi}{10} = 2\cos\frac{4\pi}{10} = -2\cos\frac{6\pi}{10};$$

$$\Phi = 2\sin\frac{3\pi}{10} = 2\sin\frac{7\pi}{10} = 2\cos\frac{2\pi}{10} = -2\cos\frac{8\pi}{10}.$$

Всё бы и ничего. Форму $\phi = 2\sin\frac{\pi}{10}$ мы находим и в справочнике [21, с. 47]. Причём она имеет четкое геометрическое толкование: для правильного десятиугольника с единичной стороной описанная окружность имеет радиус Φ.

Но на основе всех этих соотношений далее делается совершенно парадоксальное утверждение [20]: «число π и Φ – это одна и та же физическая сущность, и отличие между ними только в том, что Φ – линейная величина, а число π связано с окружностью».

Что можно на это сказать? – Перед нами яркий образец «научной балды» [22] с порождением клонов золотого сечения.

Известны десятки случаев точного числового представления тригонометрических функций разных углов, в том числе через радикалы: $\sqrt{2} = 2\sin\frac{\pi}{4}$, $1 = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}$ и т.п.

Однако, вне всякого сомнения, это совсем не означает установление непосредственной взаимосвязи и точное определение величины π через эти числа, типа $\pi = 4\cdot\mathrm{arctg}\,1$.

Так же как и теорема Кронекера–Вебера, которая утверждает, что корень из 5 можно выразить линейной комбинацией корней из единицы [23]:

$$\left(e^{2\pi i/5} + e^{8\pi i/5}\right) - \left(e^{4\pi i/5} + e^{6\pi i/5}\right) = \phi + \Phi = \sqrt{5}.$$

3) Рассматривая возможные формы выражения, для константы золотого сечения $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ Г. Аракелян приводит [24] некое шестое определение ЗС через константу *e*, по ошибке называя её экспонентой:

$$\Phi = e^{\mathrm{arsh}\ 1/2}. \tag{3}$$

Это главная «фишка» работы. Именно вокруг неё завязано основное содержание, определяя лейтмотив, не считая парафраз-пересказов.

Но если проанализировать, то в равенстве (3) имеет место быть обыкновенная перезапись двух тождественных равенств.

То есть, формально соединили такие тождества-определения [25]:

- $x \equiv e^{\ln x}$ – равенство, вытекающее из определения логарифма с любым основанием, в данном случае в виде натурального логарифма e, то есть

$$x \equiv 2^{\lg_2 x} \equiv \pi^{\lg_\pi x} \equiv \Phi^{\lg_\Phi x};$$

- $\operatorname{sh} x \equiv \left(e^x - e^{-x}\right)/2$ – определение (обозначение) функции гиперболического синуса с обратной функцией – гиперболическим арксинусом (ареасинусом) $\operatorname{arsh} x \equiv \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

Связывая два тождества при $x = 1/2$, получаем $\Phi = e^{\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = e^{\operatorname{arsh} 1/2}$.

«В этой формуле содержится новая информация о золотом сечении», – утверждает её автор.

Да, нет же. Увы. Здесь нет никакой новой информации о ЗС.

Мы же не станем говорить о новом определении числа π через значение экспоненты $\pi = e^{\ln\pi}$? – Либо о ранее неизвестных, а теперь выявленных сведениях об этом числе.

Что же тогда удивительного находится в записи $\Phi = e^{\ln\Phi}$? – Где на месте Φ может стоять любое положительное вещественное число.

Можно рассуждать об изменённой адекватно-эквивалентной записи числа через значения иных функций.

Собственно и всё.

Таким образом, формула $\Phi = e^{\operatorname{arsh}\ 1/2}$ является обыкновенной, если не сказать заурядной, перезаписью (сложением) двух тождественных равенств: согласно определению логарифма $x \equiv e^{\ln x}$ и гиперболического арксинуса $\operatorname{arsh} x \equiv \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, и не содержит сколь отличительной функциональной связи $\Phi(e)$ с признаками новизны.

К примеру, можно ввести дискретную функцию $a_n = 2^{-n}$ и записать $\Phi = a_1 + \sqrt{a_1^2 + 1}$.

Известно, что $\sin 30^\circ = 1/2$. Тогда $\Phi = \sin 30^\circ + \sqrt{1 + \sin^2 30^\circ}$.

И подобных малосодержательных примеров десятки.

Так, если использовать функцию Гудермана $\operatorname{gd}(x)$, которая связывает тригонометрические и гиперболические функции без привлечения комплексных чисел [26],

$$\operatorname{gd}(x) = \int_0^x \frac{1}{\cosh(t)}\,dt.$$

то константу ЗС можно представить в другом экзотическом виде:

$$\Phi = \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{gd}(\operatorname{arsh} 1/2)}{2}\right].$$

Во всех этих случаях речь идёт исключительно о формальной перезаписи известного значения Φ через значения других функций: уже известных или вновь вводимых.

Ну, и что с того? – Как говорится, эка невидаль, что каша естся!

4) В докладе [27] путём завуалированных преобразований с надуманным привлечением, так называемых гиперболических функций Фибоначчи, за искомую связь $\Phi(e)$ искусно выдаётся абсолютное тождество-определение логарифмической функции.

Всё это просто и наглядно проанализировано в работе [28].

Так, хорошо известно, что числа Люка можно описать, не только рекуррентно $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ с начальными условиями $(L_0, L_1) = (2,\ 1)$, но и аналитически в виде явной формулы Бернулли–Бине $L_n = \Phi^n + (-\Phi)^{-n}$.

Рассматривая степень n как непрерывную переменную и функцию $L_n = L(n)$, допустимо записать производную $L_n' = \Phi^n \ln \Phi - (-\Phi)^{-n} \ln(-\Phi)$.

Тогда с учётом знания предела $\lim\limits_{n\to\infty} (-\Phi)^{-n} = 0$, а также свойств обычных степеней и натуральных логарифмов (по определению) получается, по сути, абсолютное тождество

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{L_n}{L_{n-1}} \right)^{\frac{L_n}{L_n'}} = \Phi^{\frac{1}{\ln \Phi}} \equiv e. \qquad (4)$$

Собственно и все преобразования.

Заметим, что логарифм отрицательного числа существует, только он комплексный

$$\ln(-\Phi) \approx 0{,}481 + 3{,}142\, i, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Но это только усиливает общность рассуждений.

Полученная формула (4), конечно, имеет место быть.

Но разве можно здесь говорить о какой-то теореме-связи между Ф и *е*, как это утверждают авторы [27]? – Нет! И ещё раз нет!

Ведь зависимость справедлива для любого числа x и тривиально следует из тождественного определения логарифма $\boxed{x^{\frac{1}{\ln x}} = e}$, где x – произвольное число: положительное или отрицательное, вещественное или комплексное.

Ну, и что мы здесь нашли? – С точки зрения констант ровным счётом ничего!

Возможно, кому-то это покажется любопытным, занимательным.

Но к взаимосвязи $\Phi(e)$ не имеет никакого сколь существенного отношения.

5) Показательные образцы тождественных преобразований изобилуют и в работе [29].

Сначала постоянные (*π*, *e*, Φ) называются физическими (?). Хотя в действительности они – математические константы, определяемые независимо от каких бы то ни было физических измерений. Исключительно на основе абстрактных математических объектов. Фундаментальные константы π и *е* широко распространены в основных законах физики и физиологии [30]. Но они никогда не причислялись к физическим постоянным [31, 32].

Далее золотая константа $\Phi = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ представляется как «яркий пример характеристических чисел» – «безразмерной комбинации физических величин» [29]. – Однако числа 1, 2, 5 не являются физическими величинами.

Кроме того, понятие *характеристического числа* имеет давно общепринятое употребление[8], как корень характеристического многочлена <линейной рекуррентной (возвратной) последовательности, обыкновенного дифференциального уравнения>; собственное значение матрицы.

В общем случае, это счетное множество алгебраических чисел.

Одно из них (специфически частное, но уникальное) – константа золотого сечения. Только физические величины здесь совершенно не причём.

---

[8] Характеристическое число // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=12273067.

Наконец, записывается абсолютное тождество [29] $a \equiv \int\limits_0^{a\ln 2} e^{\frac{x}{a}} dx$, справедливое для любого вещественного числа a.

Далее вместо буковки a подставляются конкретные числа вроде

$$\pi \equiv \int\limits_0^{\pi\ln 2} e^{\frac{x}{\pi}} dx, \quad \Phi \equiv \int\limits_0^{\Phi\ln 2} e^{\frac{x}{\Phi}} dx \tag{5}$$

и … объявляется об установлении связей $\pi(e)$ и $\Phi(e)$!

Видя, что «эти формулы не позволяют рассчитать какую-либо константу» или «разделить переменные» [29], поскольку константы не записаны в явном виде, авторы предлагают использовать тождество (5) «в качестве тестовых соотношений» для оценки точности вычисления определенных интегралов (?), при отладке компьютерных программ или "для проверки работоспособности и точности любого компьютера".

Что можно на это сказать? – Более безосновательных предложений в вычислительной технике мы ещё не встречали.

Зато абсолютно очевидное тождество (5) авторы доказывают (показывают) путем приближенного вычисления интеграла через площадь прямоугольника, аппроксимирующего площадь геометрической фигуры. Комментарии излишни...

Тождества Рамануджана

Всё буквально преображается, когда за математический синтез берётся великий мастер числовых форм – гениальный Рамануджан.

Так или иначе, но в его формулах присутствуют числа e, π и корень из пяти – предвестник золотого сечения. И самое главное: формулы не тривиальны и абсолютно точны в своём предельном представлении.

На основе корня из пяти $\sqrt{5}$ индийский математик вывел ряд интересных форм с использованием непростых непрерывных (цепных) дробей и бесконечных сумм.

Отдельные из них включают выражения, дающие почти целые числа.

Например, соотношение [33, № 352; 34, с. 8]

$$\frac{1}{1+}\,\frac{e^{-2\pi}}{1+}\,\frac{e^{-4\pi}}{1+}\,\frac{e^{-6\pi}}{1+\ldots} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) e^{2\pi/5} = \left(\sqrt{\Phi\sqrt{5}} - \Phi\right) e^{2\pi/5} \approx 0{,}9981\ldots$$

и его мультипликативная противоположность [35]

$$1+\frac{e^{-2\pi}}{1+}\,\frac{e^{-4\pi}}{1+}\,\frac{e^{-6\pi}}{1+\ldots} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) e^{-2\pi/5} = \left(\sqrt{\Phi\sqrt{5}} + \Phi\right) e^{-2\pi/5} \approx 1{,}0019\ldots$$

Другое равенство из той же серии [34, с. 8; 35]

$$\frac{1}{1+}\,\frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+}\,\frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+}\,\frac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1+\ldots} = \left(\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{3/4}\cdot\phi^{5/2}-1}} - \Phi\right) e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}} \approx 0{,}99999920\ldots$$

Занимательно и такое тождество с переменными знаками в цепной дроби [33, № 352]

$$\frac{1}{1-}\;\frac{e^{-\pi}}{1+}\;\frac{e^{-2\pi}}{1-}\;\frac{e^{-3\pi}}{1+\ldots} = \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)e^{\pi/5} = \left(\sqrt{\phi\sqrt{5}} - \phi\right)e^{\pi/5} \approx 1{,}0451\ldots.$$

Или тождество с бесконечным (n = 1, 2, 3…) суммированием [33, № 629]:

$$\frac{\frac{1}{2}+\sum_n e^{-n^2}}{\frac{1}{2}+\sum_n e^{-5n^2}} = \sqrt{5\sqrt{5}-10} = (2\Phi-1)\sqrt{2\Phi-3} \approx 1{,}0864\,.$$

Ещё одна бесконечная сумма [33, № 606]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{5}-2\right)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\left[\ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right]^2}{12} \approx 0{,}2376\ldots$$

или с представлением через константу золотого сечения

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\Phi-3)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{24} - \frac{[\ln(2\Phi+1)]^2}{12} \approx 0{,}2376\ldots\,.$$

Рассматривая последнее равенство, нельзя не вспомнить об удивительном проявлении 24 в формуле-прозрении Рамануджана при оценке им числа $p(n)$ разбиений натурального числа n на натуральные слагаемые, о чём мы писали, исследуя феномен числа 24 [36].

Так, $p(4) = 5$, поскольку $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$.

При больших значениях n величину $p(n)$ можно оценить согласно теореме Харди-Рамануджана по приближенной формуле [1, с. 63]

$$p(n) = \left\lceil \frac{e^{\pi\cdot\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}}}{2\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6}\left(n-\frac{1}{24}\right)} - \frac{1}{2\left(n-\frac{1}{24}\right)^{3/2}}\right)\right\rceil,$$

где $\lceil\xi\rceil$ – целая часть от ξ.

Эта приближенная формула поразительно точна.

Например, она дает верный ответ $p(200) = 3\,972\,999\,029\,388$.

Но самое загадочное в формуле – это поправка 1/24.

Ни её автор Рамануджан и никто другой так и не сумели объяснить, откуда она появилась.

«Такую догадку нельзя назвать иначе как гениальной. Во всём этом есть что-то почти сверхъестественное», – писал позже английский математик Литлвуд, обычно весьма сдержанный в своих оценках [3].

Продолжая тему с корнем из пяти, можно напомнить и другую формулу [33, № 642].

Но она, на наш взгляд, представлена с ошибками или опечатками.

Её правильная запись имеет вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)\frac{5^{-n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2j+1}\right)\frac{5^{-n}}{2n+1} = \frac{\pi^2}{4\sqrt{5}} \approx 1{,}1035\ldots$$

В этом можно убедиться, проверив вторую формулу, которая действительно корректна:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)\frac{5^{-n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{2j+1}\right)\frac{9^{-n}}{2n+1} = \frac{\pi^2}{8}-\frac{3}{8}(\ln 2)^2 \approx 1{,}5353\ldots$$

К корню из пяти также приводит ещё одна любопытная задача [33, № 722]:

$$x^2 = a+y;\quad y^2 = a+z;\quad z^2 = a+u;\quad u^2 = a+x\,.$$

Если принять $x=\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5-\sqrt{5+x}}}}$, то $x=\dfrac{2+\sqrt{5}+\sqrt{15-6\sqrt{5}}}{2}$.

Если $x=\sqrt{5+\sqrt{5-\sqrt{5-\sqrt{5+x}}}}$, то $x=\dfrac{\sqrt{5}-2+\sqrt{13-4\sqrt{5}}+\sqrt{50+12\sqrt{5}-2\sqrt{65-20\sqrt{5}}}}{4}$.

Красиво. Элегантно. Впечатляет и одновременно изумляет.

Синтез базового тождества

Рассматривая идею М. Марутаева о новой научно-концептуальной линии-дисциплине «математические начала (основы) гармонии» [37, с.130–233], представляется важным зафиксировать основную математическую форму. Как некий базис коммуникационных связей между разными научными концепциями и направлениями [38].

Традиционного алгебраического равенства $\Phi^2-\Phi = \phi^2+\phi = 1$ для золотой пропорции здесь явно недостаточно.

В определенной мере данная проблематика не имеет единственного решения. Весьма трудно объединить в одну непротиворечивую математическую форму причинно-следственные отношения разных научных дисциплин и общей суммы человеческих знаний.

И тем не менее... Это очень важно.

Как бренд или визитная карточка теории.

Сдается, что в первом приближении такой интегрирующей формой может стать некое простое и одновременно универсальное отношение фундаментальных констант (π, e, Φ).

Именно математических констант, ибо физические постоянные имеют низкую степень точности и являются скорее приближенно-эмпирическими коэффициентами либо параметрами, нежели константами.

Что же между ними является главным или наиболее общим? – Сдаётся, фундаментальность чисел (π, e, Φ) произрастает из их совместного "квадратичного происхождения" [39], которое порождает кривые второго порядка: окружность, гипербола и парабола.

Пожалуй, это и есть их самое существенное объединение [38–40].

Наиболее отчетливо данное связующее триединство проявляется в обычных конических сечениях (рис. 3), которые в одном теле-объекте связывают три замечательные константы (π, e, Φ), Они образуются кривыми второго порядка и выходят далеко за их пределы, неожиданно появляясь в самых разных теориях и практических приложениях.

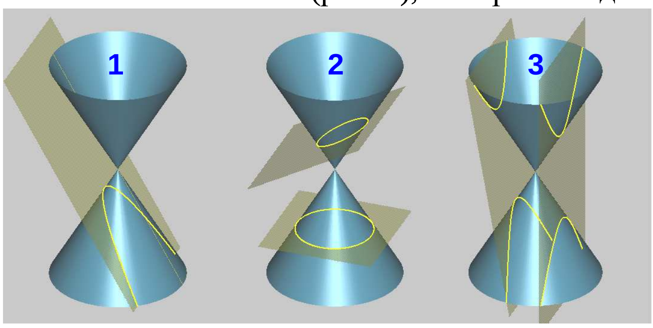

Рис. 3. Конические сечения:
1 – парабола; 2 – круг и эллипс; 3 – гипербола

Далее на помощь нам приходит знаменитый математик Л.Эйлер.

Эйлер – по праву считается самым продуктивным и непревзойденным математиком в истории по объему полученных результатов.

Он – прирожденный и самый совершенный алгоритмист – ученый, который изобретает алгоритмы для решения задач специальных видов.

Эйлер – автор многочисленных математических открытий [41, с. 204–251].

Ему принадлежит «рассмотрение конических сечений и поверхностей второго порядка в трехмерном пространстве с точки зрения унифицированного подхода на основе общего уравнения второй степени» [42, с. 124]. Для нас это особенно важно в связи с обоснованием триномиально-квадратичного кода мироздания [40, 43].

Эйлер также ввёл формулу, которая связывает комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями для любого вещественного числа x: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, где e – основание натурального логарифма, i – мнимая единица.

При $x = \pi$ получается изумительное по красоте знаменитое тождество Эйлера $e^{i\pi} + 1 = 0$, которое связывает сразу пять констант, в том числе 1 и 0 как нейтральные элементы по операциям умножения и сложения.

Формула опубликована в 1748 году, а ныне высечена над дверью математического отделения парижского Дворца Открытий [1, с. 55].

Вполне естественно, что Эйлер тогда и не думал о золотом сечении, хотя оно и взаимосвязано с уравнением параболы и буквально просится, чтобы "замкнуть константами" конические сечения в виде совокупности окружностей (эллипсов), парабол и гипербол.

Оно для многих математиков было не значимым, поскольку, в отличие от (π, e) почти "не высвечивалось" в приложениях. Однако без константы ЗС конические сечения и поверхности второго порядка в трехмерном пространстве оказываются не полными.

Чуть видоизменим тождество Эйлера, подставив в него равенство для ЗС: $\phi^2 + \phi = 1$.

В результате получаем математическое отношение шести констант математики – нуля, двух единиц (действительной 1 и мнимой i) и тройки "квадратичных" чисел (π, e, ϕ):

$$\boxed{e^{i\pi} + \phi(\phi + 1) = 0}. \tag{6}$$

В таком виде тождество становится функционально совершенным и приобретает стройный гармонический образ.

Без параболы (через постоянную ϕ) равенство Эйлера было явно неполным, несмотря на всё своё великолепие.

Теперь оно включает тройки "квадратичных" математических констант (π, e, ϕ).

Будем считать соотношение (6) базовым тождеством математических начал (основ) гармонии (рис. 4).

Конечно, *данное тождество не следует воспринимать буквально для вычисления одних чисел по другим*. Оно имеет больше методологический и философский смысл.

Например, для представления главнейших констант в пентаграмме категорий [44].

Отличительные особенности образованного тождества (6):

1. В соотношении сохранена единица.

2. Одновременно посредством единицы привнесено число золотой пропорции ϕ.

3. Тождество стало замкнутым относительно квадратичных закономерностей через тройку чисел (π, e, ϕ), характеризующих окружность (эллипс), гиперболу и параболу.

4. Объединены основные арифметические операции: сложение, умножение и возведение в <нецелочисленную> степень.

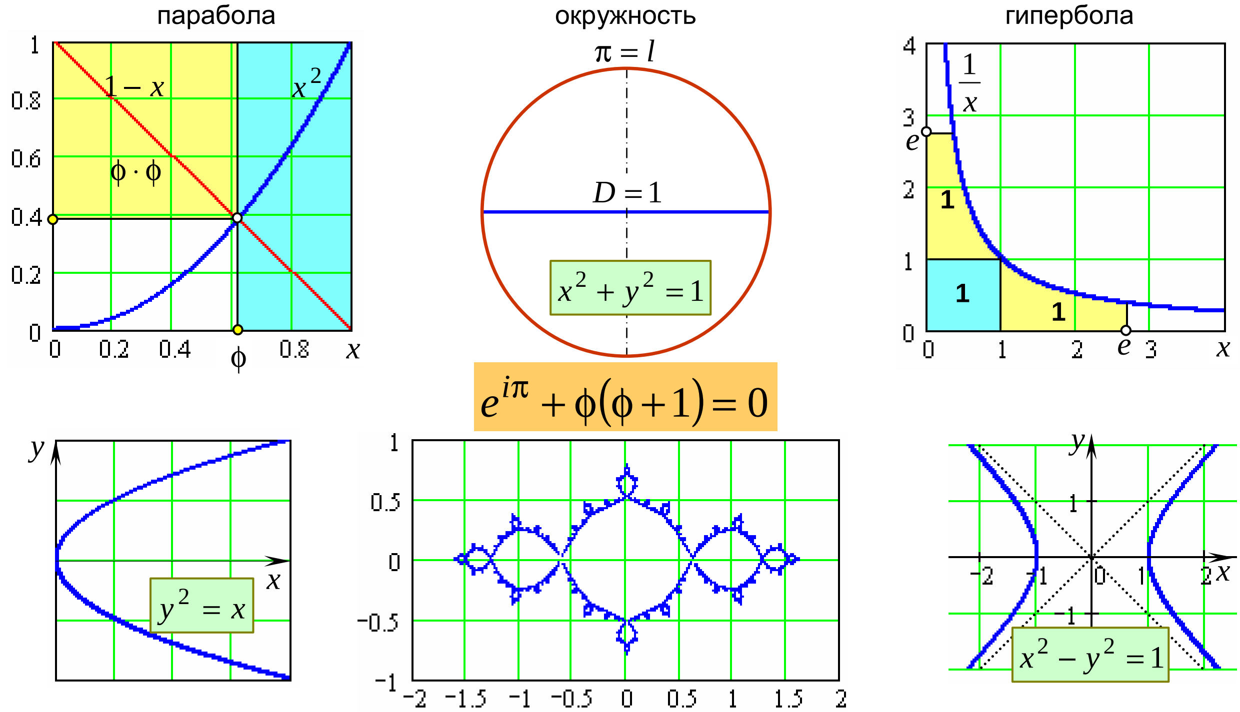

Рис. 4. *"Визитная карточка" математических начал (основ) гармонии*:
аналитико-геометрическая интерпретация "квадратичных истоков"
для фундаментальных математических констант (π, *e*, ϕ)
как триномиально-квадратичный код мироздания

Таким образом, тождество приобрело замкнутую законченную форму.

Оно стало гармоничным и по-прежнему красивым, как и всё у Эйлера.

Также отпала какая-либо необходимость в нахождении приближенных нумерологических формул, устанавливающих зависимости между числами (π, *e*, ϕ).

В принципе, поиск таких квазизависимостей при желании может продолжаться, но он уже не имеет особой смысловой нагрузки, когда у нас есть простое и строго аналитическое тождество (6) с миллиардно–цифровым выражением этих трёх иррациональных чисел.

Число π можно определить и через площадь S круга радиусом r как $\pi = S/r^2$.

Или в общем случае конических эллиптических сечений с полуосями a и b: $\pi = S/ab$.

При рассмотрении фундаментальных констант весьма интересны также геометрические сравнения. Например, площадь поверхности золотого кубоида (прямоугольного параллелепипеда с ребрами $\Phi, 1, \Phi^{-1}$) относится к площади описанной вокруг него сферы как π/Φ [1, с. 102]. Но это отдельная тема.

Подводные течения

Итак, глубинные корни фундаментальных чисел (π, *e*, ϕ) уходят в природу кривых второго порядка, тем самым составляя некоторую общность этих констант.

На наши результаты исследования [40] было высказано критическое замечание белорусского ученого д.ф.н. Э.Сороко – автора известной монографии [45].

Проницательный философ усомнился в формальной стыковке данных величин вследствие неодинаковой числовой интерпретации, задав вполне резонный вопрос об их разной алгебраической и трансцендентной природе. О чём мы и сами говорили вначале.

Действительно, еще Эрмит (1873) доказал трансцендентность[9] числа e, а Линдеман (1882) – трансцендентность числа π [46].

В то же время иррациональное число Φ по определению является алгебраическим, как корень многочлена с рациональными коэффициентами.

В чем же дело?

И есть ли здесь разногласие?

А может всё как донельзя чётко, обусловлено и согласовано...

Вернемся к коническим сечениям [47], рассмотрев их в несколько нетрадиционном описании [21, с. 67].

Выберем на плоскости точку F (фокус) и прямую d (директрису) и зададим вещественное число E (эксцентриситет) > 0. Тогда геометрическое место точек, для которых расстояние до точки F и до прямой d отличается в E раз, является коническим сечением.

В зависимости от эксцентриситета E, получится эллипс (E < 1), парабола (E = 1) или гипербола (E > 1).

Собственно здесь и наступает момент истины.

Как мы видим, эллипсов и гипербол в сечениях конуса существует множество $|E-1| > 0$, а парабола – только одна при $E = 1$.

Именно единственность построения конического сечения в виде параболы и выделяет её на фоне других кривых второго порядка, являясь онтологической подосновой алгебраических свойств числа Φ на фоне трансцендентности.

Можно сказать, что это новое осознание-уяснение и самого понятия золотой пропорции или золотого сечения.

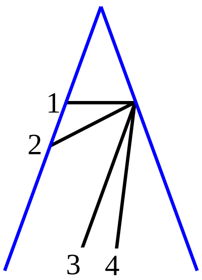

Рис. 5. Конические сечения:
1 – окружность;
2 – эллипс;
3 – парабола;
4 – гипербола

Если угодны осмысления-параллели, то имеем своего рода единственное "золотое сечение", только коническое.

Так что на конических сечениях всё выглядит очень просто и наглядно (рис. 5):

– наличествует много углов сечения, когда получаются эллипсы с описанием их площади через число π (между 1 и 2);

– существует много углов сечения, когда образуются гиперболы с их отображением через e (между 3 и образующей)

– но есть только один единственный уклон сечения 3, равный углу конуса, когда появляется парабола.

Или то же самое: плоскость сечения параллельна образующей конуса. Это как пограничный слой (сечение) и связующая нить между трансцендентными числами π и e.

Украинский учёный И.Ерохов напомнил ещё одно сечение конусной поверхности.

Если полый конус рассечь точно по оси вращения, то получим две пересекающиеся прямые, что нельзя уже нельзя квалифицировать как кривые второго порядка.

Пожалуй, это будут асимптоты гипербол, плоскости которых параллельны оси вращения.

Но упоминать это сечение необходимо, для полного замыкания множества возможных вариантов.

Новые интерпретации

Итак, мы провели связующие линии между фундаментальными константами и коническими сечениями: окружностями (эллипсами), параболами и гиперболами.

Расширим эти представления на всё модифицированное тождество Эйлера.

---

[9] Комплексные числа, не являющиеся корнями многочлена с рациональными коэффициентами, называют трансцендентными (лат. *transcendere* переходить, превосходить).

Так, условное сечение через вершину конуса даёт нам точку. Ей мы спокойно и уверенно можем сопоставить *ноль* 0. По сути, это вырождение множества окружностей и эллипсов.

Такое же сечение вдоль образующей приводит к прямой линии, которая вполне закономерно ассоциируется с *единицей* 1. Когда числовой интервал от нуля до единицы изоморфен всей числовой оси.

И, наконец, вторая образующая по отношению к первой (под углом в 90 градусов) символизирует мнимую ось, характеризуемую *мнимой единицей* i.

Таким образом, все фундаментальные константы объяснены нами через всевозможные сечения обычного конуса в такой сводной транскрипции:

π	окружность (эллипс)	0	точка (вершина конуса)
ϕ	парабола	1	образующая конуса
e	гипербола	i	другая образующая

Остаётся только уяснить, почему же всё-таки конуса? – И тут на помощь к нам приходит конусная упаковка евклидового пространства [48]. Ведь именно такая конусная упаковка в множестве правильных многогранников (платоновых тел) по 12 граням додекаэдра даёт максимальную плотность, которая выражается через число золотого сечения

$$\rho = 6(1 - \sin \operatorname{arctg} \Phi) \approx 89{,}6\ \%.$$

Наиболее плотное, а значит, и наилучшее освоение пространства.

Ярчайшее тому развитие-подтверждение – это филлотаксис (листорасположение), как особый решётчатый тип (порядок) расположения листьев, лепестков и/или семян у многих видов растений.

Своеобразная борьба за место под солнцем.

Но борьба не антагонистическая, а «спортивно-гармоническая».

Еще об аналитике золотой пропорции

Слова "божественное", "деление", "отрезка", числа Фибоначчи усыпили исследователей. Многообразие синтеза в мироздании древние и многие современные "золотоискатели" свели к тривиальному анализу. Причём в его наихудшем виде – разрезанию на две части.

Явное ограничение такого толкования в надежде расширения стали подменять субститутом в виде «обобщённых золотых сечений» [45], ещё больше нивелируя истинную значимость золотой пропорции (ЗП) и подменяя её бесконечным арсеналом алгебраических чисел.

Всё это отодвинуло учение о золотой пропорции и поиск настоящего золотого руно на многие десятилетия лет назад. Привело к тому, что константа Ф в её истинном значении-проявлении оказалась практически не востребованной в математике и физике.

Золотая пропорция, прежде всего, тесно связана с теоремой Пифагора.

Квадратичные корни в аналитике ЗП иногда могут иметь специфическое проявление, создавая иллюзию проскакивания квадратного уравнения.

Нет, сама по себе внутренняя сущность остается. Но решение пропорции (равенства отношений) идет как бы в обход квадратного уравнения.

Об этом следует непременно говорить, дабы не абсолютизировать или порождать новую свежеиспеченную догматику, бороться с которой будет труднее, чем ее создавать.

Последнее подтверждается мифологическими сказаниями о ЗП, собранными вперемешку с религиозно-социальным пафосом и сверхъестественными силами, а также преувеличениями и вымыслами.

В чем же смысл перескакивания барьеров?

В работе [49] продемонстрирован любопытный переход от теоремы Пифагора – через деление целого в среднем и крайнем отношении – к числу золотого сечения.

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \to \quad y^2 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x) \quad \to \quad \frac{z+x}{y} = \frac{y}{z-x}.$$

Сравнивая с математической пропорцией (задачей деления целого в среднем и крайнем отношении) $\frac{\text{Целое}}{\text{Большее}} = \frac{\text{Большее}}{\text{Меньшее}}$, имеем: $\text{Целое} - \text{Меньшее} = (z+x) - (z-x) = y$ или $y = 2x$.

Положив для определенности $x = 1$, получаем $y = 2$ и $z = \sqrt{5}$.

Обозначая через число ЗС безразмерную величину Φ как отношение целого к большему, находим

$$\Phi = \frac{z+x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Хотя мы и не использовали напрямую запись решения квадратного уравнения, из контекста преобразований хорошо видно: оно само неявно присутствует в отображении пропорции, когда в равенство отношений мы вводим неизвестную переменную.

Дальнейшее развитие этой темы позволило свободно выйти на просторы универсального и поистине настоящего обобщения.

В самом деле, вполне естественным выглядит развитие понятия золотой пропорции, по-прежнему приводящей к константе Φ [50]:

$$\boxed{x = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}, \qquad c^n = a^n + b^n \qquad \Rightarrow \qquad x^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \Phi}.$$

Если степень n числа a геометрически образует n-мерный гиперкуб с ребром a, то в общем случае золотая пропорция для целочисленных или натуральных значений $n \geq 1$ интерпретируется следующим образом: **сумма объёмов *n*-мерных гиперкубов так относится к одному из них, как он к другому.**

Кажется невероятным, но *равносторонний треугольник становится предельной моделью золотой пропорции* $(n \to \infty)$.

Выводы:

1) Приближённые формулы аналитической взаимосвязи фундаментальных математических констант (π, e, Φ) малопродуктивны. В них отсутствует содержательность и математическая обусловленность.

Весьма трудно указать и область их применения.

Разве что как возможные вариации в интерпретации учёных древности в их непростых поисках истины, что, впрочем, неочевидно. Или просто, как полезная тренировка ума.

2) Не относится к понятию установления новых аналитических связей и большинство тождеств типа $2\cos(\pi/5) = \Phi$, $\Phi = e^{\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = e^{\operatorname{arsh} 1/2}$, $\pi = e^{\ln\pi}$, $\Phi = \int\limits_0^{\Phi\ln 2} e^{\frac{x}{\Phi}}\,dx$ и т.п.

3) Поражают своей необыкновенностью формулы Рамануджана. Они не тривиальны и абсолютно точны в своём предельном представлении, – с использованием непростых непрерывных (цепных) дробей и бесконечных сумм.

4) Связующее триединство замечательных констант (π, *e*, Φ) наиболее отчётливо проявляется через их "квадратичное происхождение" в обычных конических сечениях с порождением кривых второго порядка: окружности–эллипса, гиперболы и параболы.

5) Развитие квадратичной темы приводит к базовому тождеству в математических началах гармонии – видоизмененному равенству Эйлера $e^{i\pi} + \phi(\phi + 1) = 0$.

Здесь присутствует отношение шести констант математики: нуля, двух единиц (действительной 1 и мнимой *i*) и тройки "квадратичных" чисел (π, *e*, ϕ).

Данное тождество не следует воспринимать буквально для вычисления одних чисел по другим.

Оно имеет больше методологический и философский смысл содержательности единства в математике.

Литература:

1. *Жуков А.В.* Вездесущее число "пи". – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.
2. *Гигидикин С.Г.* Загадка Рамануджана // Квант. – 1987. – № 10. – С. 14–20, 41.
3. *Левин В.И.* Рамануджан – математический гений Индии. – М.: Знание, 1968. – http://www.ega-math.narod.ru/Rama/Rama2.htm.
4. *Косинов Н.В.* Неожиданная связь важнейших констант: постоянной тонкой структуры α, числа "пи" (π) и золотого сечения Φ. – http://rusnauka.narod.ru/lib/author/kosinov_n/3/.
5. *Ольчак А.С.* О возможной связи фундаментальных констант физики: постоянной тонкой структуры и постоянной Фейгенбаума // Естественные и технические науки. – 2009. – № 2. – С. 19–22.
6. *Иванус А.И.* О связи констант *e* и π с золотым сечением // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14848, 13.07.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321090.htm.
7. *Василенко С.Л.* Асимптотика "золотого" сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15252 от 25.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322042.htm.
8. *Ткаченко И.С.* Числа π, *e*, ϕ объединены соотношением 7π =5*e*ϕ с точностью до четвертого знака // Академия Тринитаризма. – М.: Эл № 77-6567, публ.17042, 30.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322057.htm.
9. *Ткаченко И.С.* О некоторых связях чисел π, *e* (число Эйлера), γ (постоянная Эйлера), φ (золотое сечение), 10 и др. // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17277, 01.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321238.htm / Вісник Львівського фінансово-економічного інституту: Зб. наук. ст. – Львів, 2002. – С. 104–107.
10. *Ткаченко И.С.* Множественность взаимосвязей констант (π, ϕ, *e*) в представлении комплексного числа // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. №77-6567, публ. 16719, 03.08.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161867.htm.
11. *Friedman E.* Problem of the Month (August 2004). – http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0804.html.
12. *Weisstein E.W.* Golden Ratio Approximations / From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatioApproximations.html.
13. *Шенягин В.П.* Связь фундаментальных констант (ϕ, *e*, π) с участием мнимой единицы // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. №77-6567, публ. 16913, 26.10.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321236.htm.
14. *Шипицын Е.В.*, *Попков В.В.* Двойственность и золотое сечение в теории фракталов и хаоса // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.11073, 18.03.2004. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001a/00160023.htm.
15. *Weisstein E.W.* Pi Formulas / From MathWorld. – a Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html.

16. *Василенко С.Л.* Золотое время // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16343, 08.02.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161786.htm.

17. *Начала Евклида*. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

18. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.

19. *Weisstein E.W.* Golden Triangle // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.html.

20. *Тождественность* числа пи и золотой пропорции // Устье речи. – http://ustierechi.ucoz.ru/publ/14-1-0-168.

21. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.

22. *Василенко С.Л.* Научная балда // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 04.09.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11333.html.

23. *Квадратный* корень из 5 // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=31213592.

24. *Аракелян Г.* О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // Академия Тринитаризма. – М., Эл № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/2065-ar.pdf.

25. *Василенко С.Л.* Позолоченные балахоны // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17121, 19.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322093.htm.

26. *Weisstein E.W.* Gudermannian // MathWorld – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/Gudermannian.html.

27. *Tanackov I, Tepic J, Kostelac M.* The golden ratio as a new field of artificial intelligence - the proposal and justification // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17129, 20.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322095.htm.

28. *Василенко С.Л.* Прикладная гипотизация золотого сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17253, 24.01.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322131.htm.

29. *Стахов А.П., Владимиров В.Л.* О формальной связи универсальных безразмерных физических констант: "фи", "пи" и "*e*" // Международный клуб золотого сечения. – 31.03.2011. – http://www.goldensectionclub.net/publications/vladimirov/vladimirov-articles/vladimirov003.

30. *Горобец Б.С.* Мировые константы π и e в основных законах физики и физиологии // Наука и техника. – 2004. – № 2. – http://www.nkj.ru/archive/2004/2/.

31. *Окунь Л.Б.* Фундаментальные константы физики // Успехи физических наук. – 1991. – Т. 161, № 9. – С. 177–194. – http://ufn.ru/ufn91/ufn91_9/Russian/r919e.pdf.

32. *Фритцш Х.* Фундаментальные физические постоянные // Успехи физических наук. – 2009. – Т. 179, № 4. – С. 383–392. – http://ufn.ru/ufn09/ufn09_4/Russian/r094d.pdf.

33. *Ramanujan S.* Journal of the Indian Mathematical Society. – http://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/collectedpapers/question/qJIMS.htm.

34. *Hardy G.H.* Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work: 3rd ed. – New York: Chelsea, 1999.

35. *Weisstein E.W.* Ramanujan Continued Fractions // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/RamanujanContinuedFractions.html.

36. *Василенко С.Л.* Периодические структуры на циферблате Фибоначчи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15998, 14.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161676.htm.

37. *Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П.* Золотое сечение: Три взгляда на природу гармонии. – М.: Стройиздат, 1990. – 343 с.

38. *Василенко С.Л.* Базовое тождество математических основ гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16069, 10.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm.

39. *Василенко С.Л.* Квадратичная природа золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16049, 20.08.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161692.htm.

40. *Василенко С.Л.* Триномиально-квадратичный код мироздания // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15995, 12.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161675.htm.

41. *Гиндикин С.Г.* Рассказы о математиках и физиках: 3-е изд., расширенное. – М.: МЦНМО, 2001. – 440 с.

42. *Белл Э.Т.* Творцы математики. Предшественники современной математики. – М.: Просвещение, 1979. – 256 с.

43. *Акопян А.В.*, *Заславский А.А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. – М.: МЦНМО, 2007. – 136 с. – http://www.math.ru/lib/book/pdf/geometry/Zaslavky-Akopyan.pdf.

44. *Сахно В.А.* Эволюция математических констант // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16092, 01.10.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161707.htm.

45. *Сороко Э.М.* Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем. Введение в общую теорию гармонии систем: 2-е изд. – М.: URSS, 2006. – 264 с.

46. *Фельдман Н.И.* Алгебраические и трансцендентные числа // Квант. – 1983. – № 7. – С. 2–7. – http://kvant.mirror1.mccme.ru/1983/07/algebraicheskie_i_transcendent.htm.

47. *Бронштейн И.Н.* Общие свойства конических сечений // Квант. – 1975. – № 5. – С. 31–40. – http://kvant.mirror1.mccme.ru/1975/05/obshchie_svojstva_konicheskih.htm.

48. *Василенко С.Л.* Золотые купола в задаче конусной упаковки евклидового пространства // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.07.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=31&sm=2 // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 17.07.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11225.html.

49. *Бакунинский А.* Математика гармонии: позолоченные сечения. – 23.04.2008. – http://www.a3d.ru/architecture/stat/219/.

50. *Василенко С.Л.* Главная тайна золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17178, 04.01.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322109.htm.