С.Л. Василенко

Пирамиды Вассера

Пирамиды – реклама фараонов.
Иначе кто бы помнил их имена?

Наверно в мире нет более известных памятников старины, чем египетские пирамиды.

Уже в античные времена они заняли первое место среди чудес света.

Пирамиды таят ещё много неразгаданных загадок.

Их изучение продолжается и поныне [1–3].

Так, в работе [4] рассмотрены наиболее известные типы пирамид, – в основном из ряда золотого сечения.

Традиционное принятие квадрата в качестве основания пирамиды априори считается понятным и вразумительным.

Исходят обычно из того, что пирамиды сориентированы по основным четырём сторонам света (север–юг, запад–восток).

Здесь ясно просматривается соответствие с ориентацией человека в пространстве по принципу четырёх сторон: впереди–сзади, слева–справа.

Как у древних славян: «пойти на все четыре стороны».

Такая версия-гипотеза о преимущественном распространении именно четырёхгранной пирамиды является наиболее убедительной и правдоподобной.

Плюс к этому простота геометрического построения квадрата.

Тем не менее, квадрат в основании пирамиды – это не догма. Расширение данных рамок позволяет выйти на новые горизонты изучения пирамидальной темы и раскрытия её существенной роли в формировании отдельных сторон мироздания.

В настоящей работе проводится подробное изучение особенностей правильных пирамид, основанных на равносторонних треугольниках.

Конечная цель исследований – изложение теории пирамидального структурирования-эволюции косного и живого вещества в условиях гравитации.

Исходные положения. Рассмотрим подмножество правильных пирамид с равными рёбрами. Оно не большое, но существует. Его ограниченность обусловлена чисто физической реализуемостью таких многогранников, подобно платоновым телам.

Мы проанализировали литературу и не нашли для них специального названия.

Поэтому предлагается использовать такой термин:

Определение: "равно-рёберная пирамида" – пирамида, у которой все рёбра равны.

Такая пирамида является правильной.

В её основании лежит правильный (выпуклый равносторонний) n-угольник, а вершина проецируется строго в центр данного многоугольника.

Все боковые грани – равносторонние треугольники.

Пирамида называется n-угольной по количеству n сторон основания.

Как будет показано ниже, выбор здесь не велик и ограничивается набором $n = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, включая два предельных случая: $n = (2 \text{ и } 6)$.

Причём значение $n = 6$ определяет вырожденный случай совмещения боковых граней и основания в одной горизонтальной плоскости, $n = 2$ – соответствует схлопыванию между собой двух боковых граней с вертикальной ориентацией.

В обоих этих эпизодах имеет место двусторонняя поверхность.

Множество равно-рёберных пирамид назовём пирамидами Вассера[1].

---

[1] *Вассер*: Василенко Сергей – гидролог-системотехник. Wasser (нем.) – вода, влага, жидкость и т.п.

Каждая в отдельности из таких пирамид в геометрии известна.

Так, треугольная пирамида или правильный тетраэдр – платоново тело.

"Квадратную" и пентагональную пирамиды[2], в основании которых лежит соответственно квадрат и пентагон, иногда называют телами-многогранниками Джонсона[3].

Это строго выпуклые многогранники, каждая грань которых – правильный многоугольник. Но они не относятся к множеству общепринятых многогранников: платоновых или архимедовых тел, а также призм и антипризм.

Равно-рёберная модель – золотая пропорция. На семинаре-2012 «математика + гармония» [5] нашли отражение идеи многомерной гармонии К. Бутусова, С. Василенко, Б. Гладкова, В. Татура и др.

В их продолжение нами изучены вопросы пирамидальной золотоносности [6].

Показано, что только в правильных четырёхгранных пирамидах теоретически возникают тысячи разнообразных вариантов соотношения-сочетания разных параметров, которые содержат золотую пропорцию. Все эти трансформации полноправно подходят под классификацию "золотых".

В частности, данное множество варьируется в зависимости от вписываемых в пирамиду геометрических тел (шаров, цилиндров, кубов), размерности сравниваемых характеристик (линейных, площадных или объёмных), соотносимых параметров (высоты, апофемы, ребра стороны и диагонали основания), степеней константы золотого сечения $\Phi = (\sqrt{5}+1)/2$ и др.

Вместе с тем, учитывая развитие золотоносной конструкции в её обобщении [7], основанном на числе Ф, равносторонние треугольники боковых граней следует рассматривать как предельное выражение золотой пропорции.

Отсюда следует, можно сказать, феноменальный вывод:

правильный тетраэдр – наименьшее по числу граней тело – носитель золотой пропорции в её максимальном (предельном) проявлении.

Понятно, что это не единственный случай подобных пирамид.

Тем значительнее к ним интерес.

Предельная золотоносность пирамид Вассера. Сосредоточим внимание на предельном случае "многомерной" золотой пропорции, приводящей к равностороннему треугольнику.

Действительно, каждая из боковых граней пирамиды (равносторонних треугольников) выражает предельный случай ($m \to \pm\infty$) золотой пропорции [6, 7]:

$$x = \frac{C}{B} = \frac{B}{A}, \quad C^m = A^m + B^m \quad \Rightarrow \quad x^m = \left(\frac{B}{A}\right)^m = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{1}$$

где (A, B, C) – длины сторон треугольника.

При $m = \pm\infty$ имеем равенство $C = A = B$, то есть некоторое целое C (в терминологии линейного случая) равно каждой из своих двух частей A и B, образуя равносторонний треугольник.

Отсюда следует, что **пирамиды Вассера – предельно-золотые пирамиды, с формообразующим содержанием золотой пропорции в её предельном выражении.**

Радиус окружности R, описанной вокруг n-угольного основания равно-рёберной пирамиды, и длина ребра c связаны формулой $c = 2R\sin\frac{\pi}{n}$.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Square_pyramid, http://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_pyramid.
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Johnson_solid.

Тогда по теореме Пифагора высота пирамида равна $h = \sqrt{c^2 - R^2}$.

Рассмотрим два характерных случая формирования конкретного вида пирамиды в зависимости от принятия исходного посыла в установлении неизменного параметра.

а) Выберем в качестве базового размера длину ребра c.

Тогда высота пирамида равна $h = c\sqrt{1-\left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-2}}$.

Апофема боковой грани $a = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Площадь основания $S_\text{o} = \frac{\sqrt{3}}{4}nc^2$.

Площадь боковой поверхности $S_\text{b} = \frac{n}{4}c^2 \text{ctg}\frac{\pi}{n}$.

Суммарная площадь $S = \frac{n}{4}c^2\left(\sqrt{3} + \text{ctg}\frac{\pi}{n}\right)$.

Объём пирамиды $V = \frac{S_\text{o}h}{3} = \frac{n}{12}c^3 \text{ctg}\frac{\pi}{n}\sqrt{1-\left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-2}}$.

Угол наклона грани или её апофемы к основанию равен $\alpha = \arcsin\frac{h}{a}$.

Угол наклона боковых рёбер к основанию составляет $\beta = \arcsin\frac{h}{c}$.

Для рёбер единичной длины $c = 1$ в табл. 1 приведены параметры пирамид, включая предельно-плоский (сложенный, гексагональный $n = 6$) вариант.

По мере увеличения числа сторон n в основании пирамиды имеет место возрастание площадей основания и боковых граней $\{S_\text{o}, S_\text{b}\}$, уменьшение высоты пирамиды h и углов наклона граней α и рёбер β к основанию пирамиды.

Апофема боковой грани a, зависящая только от длины ребра c, остаётся постоянной.

Но конечно, наибольший исследовательский интерес представляет изменение функции объёма пирамиды $V(n)$ (рис. 1).

Особенностью поведения объёма пирамиды является её максимальное значение в точности для пятигранной пирамиды.

Но уже для 6-гранной конструкции объём превращается в ноль.

Пирамидка "складывается" в идеальный плоскостной шестиугольник.

Наибольший объём соответствует пятой размерности $n = 5$ и составляет

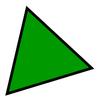
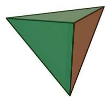
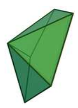
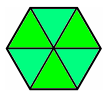
$$V_\text{max} = \frac{\sqrt{5}}{12}\Phi = \frac{2+\Phi}{12} \Rightarrow 0{,}3 \cdot c^3 .$$

Весьма примечательно присутствие в формуле числа 12 – меры полноты, целостности и кратности устройства многих составляющих наблюдаемого мира [8].

В частности, доказано [9], что максимальную упаковку евклидового пространства дают 12 одинаковых конуса, исходящих из одного центра, каждый из которых касается пяти таких же конусов. Другими словами, наиболее плотно всё пространство упаковывается с помощью 12 равных круговых конусов, что позволяет это назвать "конусной упаковкой".

Таблица 1

Параметры равно-рёберных пирамид Вассера
(длина ребра c = 1)

n		h	a	S_b	S_o	V	α	β
2		$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,866	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,866	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,866	0	0	90	60
3		$\sqrt{\frac{2}{3}}$ 0,816	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,866	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 1,299	$\frac{\sqrt{3}}{4}$ 0,433	$\frac{\sqrt{2}}{12}$ 0,118	70,5	54,7
4		$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 0,707	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,866	$\sqrt{3}$ 1,732	1	$\frac{\sqrt{2}}{6}$ 0,236	54,7	45
5		$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ 0,526	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,866	$\frac{5\sqrt{3}}{4}$ 2,165	$\frac{5}{4}\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$ 1,720	$\frac{\sqrt{5}}{12}\Phi$ **0,302**	37,4	31,7
6		0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,866	$3\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2,598	$3\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2,598	0	0	0

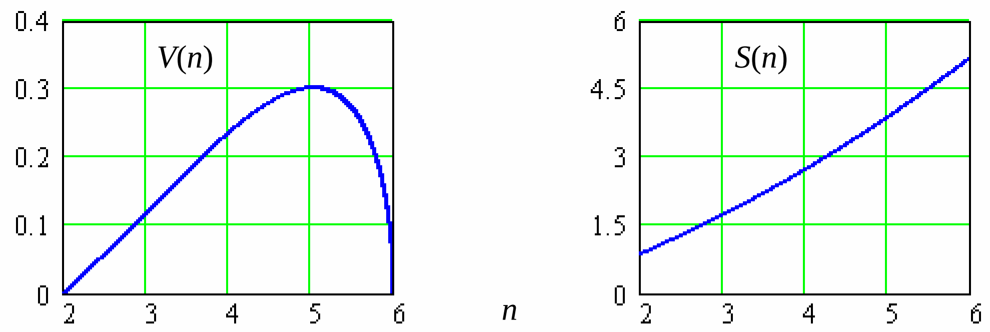


Рис. 1. Зависимость объема V и полной поверхности S пирамид Вассера
от размерности основания n: длина ребра c = 1

Размеры конуса соответствуют окружности, описанной вокруг правильного пятиугольника, как наибольшего из возможных n-угольников (n = 3, 4, 5) платоновых тел.

12 конусов, которые соответствуют самой плотной упаковке, расположены по направляющим граням икосаэдра. При этом максимальная плотность конусной упаковки выражается через число золотого сечения Ф и составляет 6(1–sinarctgФ) ≈ 89,6 %.

б) Итак, мы довольно подробно изучили характеристики пирамид, у которых всё рёбра равны c, независимо от длины-размерности основания n.

Выберем теперь в качестве определяющего размера радиус окружности R, описанной вокруг основания пирамиды.

То есть базовой формой является один и тот же круг, в который вписывается основание пирамиды, и уже далее, с полученной стороной-ребром, воссоздаются боковые рёбра.

В этом случае рёбра будут одинаковыми в границах одной пирамиды, но разными в зависимости от n.

Длина ребра равна $c = 2R\sin\frac{\pi}{n}$.

Высота пирамиды составит $h = R\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{n} - 1}$.

Площадь основания $S_\text{o} = \sqrt{3}nR^2\sin^2\frac{\pi}{n}$.

Площадь боковой поверхности $S_\text{b} = \frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}$.

Суммарная площадь $S = nR^2\left(\sqrt{3}\sin^2\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)$.

Объём пирамиды $V = \frac{n}{6}R^3\sin\frac{2\pi}{n}\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{n} - 1}$.

По мере увеличения числа сторон n в основании пирамиды имеет место (табл. 2) уменьшение большинства параметров $\{c, h, a, S_\text{b}, \alpha, \beta\}$.

Таблица 2

Параметры равно-рёберных пирамид Вассера

(радиус описанной окружности основания R = 1)

n	c	h	a	S_b	S_o	V	α	β
2	2	$\sqrt{3}$ 1,732	$\sqrt{3}$ 1,732	$2\sqrt{3}$ 3,464	0	0	90	60
3	$\sqrt{3}$ 1,732	$\sqrt{2}$ 1,414	$\frac{3}{2}$ 1,5	$9\frac{\sqrt{3}}{4}$ 3,897	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$ 1,299	$\sqrt{\frac{3}{8}}$ 0,612	70,5	54,7
4	$\sqrt{2}$ 1,414	1	$\sqrt{\frac{3}{2}}$ 1,225	$2\sqrt{3}$ 3,464	2	$\frac{2}{3}$ **0,667**	54,7	45
5	$\sqrt{2-\phi}$ 1,176	ϕ 0,618	$\frac{\sqrt{6-3\phi}}{2}$ 1,018	$5\sqrt{3}\frac{5-\sqrt{5}}{8}$ 2,992	$\frac{5}{4}\sqrt{2+\Phi}$ 2,378	$\frac{5}{24}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ 0,490	37,4	31,7
6	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 0,866	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 2,598	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 2,598	0	0	0

Постоянно возрастает лишь площадь основания S_b.

Как видно (рис. 2), величины объёма и полной поверхности $S = S_b + S_o$ имеют наибольшие значения для четырёхгранной пирамиды Вассера.

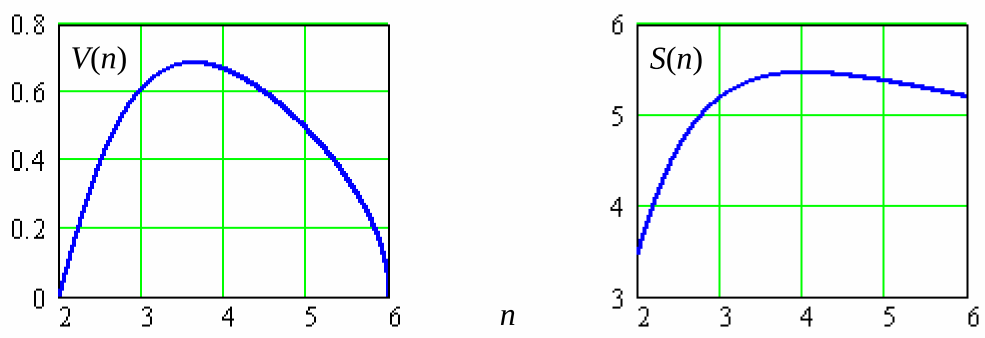


Рис. 2. Зависимость объема V и полной поверхности S пирамид Вассера от размерности основания n: радиус описанной окружности $R = 1$

Причём математический экстремум функции поверхности $S(n)$ приходится почти точно на $n = 4$, а экстремум условно непрерывной функции объёма $V(n)$ соответствует дробной размерности $n = 3{,}62$.

Хотя если оперировать содержательно-дискретной переменной n, то и площадь и объём имеют максимальные значения для "квадратной" пирамиды ($n = 4$).

Фрактальная золотоносность пирамид Вассера. Боковые грани пирамид Вассера в виде равносторонних треугольников имеют ярко выраженное проявление золотой пропорции не только в её предельной (1), но и фрактальной структуризации [10, 11].

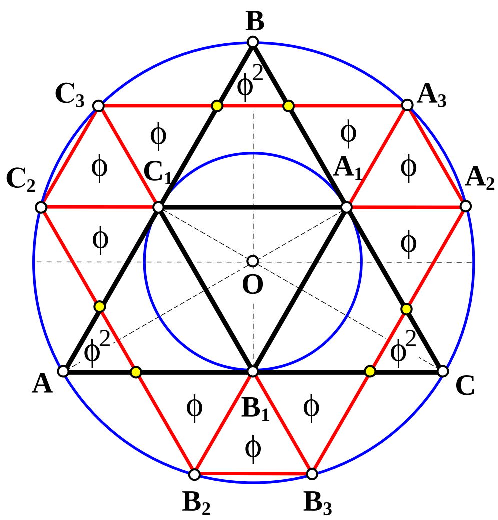


Рис. 3. Первооснова фрактальной структуры "золотоносных" равносторонних треугольников

Построим равносторонний треугольник ΔABC, опишем вокруг него окружность и впишем равносторонний треугольник $\Delta A_1B_1C_1$, стороны которого продлим до пересечения с проведенной окружностью в точках: A_2, A_3, B_2, B_3, C_2, C_3 (рис. 3).

Мы получаем целое множество золотых сечений.

Покажем это на языке алгебраической геометрии.

Пусть $c = 2$ – сторона равностороннего треугольника ΔABC.

Радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно равны:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6}c, \qquad R = \frac{\sqrt{3}}{3}c.$$

Высота BB_1 треугольника равна $h = \sqrt{3}c/2$.

Длина хорды (в описанной окружности), проходящей через середины сторон треугольника, определяется по теореме Пифагора:

$$l = 2\sqrt{R^2 - d^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}c = (2\phi + 1)\frac{c}{2},$$

где $d = R - \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}c$ – кратчайшее расстояние от хорды до центра окружности (по перпендикуляру).

Равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ (со сторонами $c/2$) – по сути, является вписанным в ΔABC. Продолжая его стороны (красными линиями) до пересечения с описанной окружностью, получаем три равносторонних треугольника, стороны которых имеют длину Ф и к тому же делятся в соотношении золотого сечения

$$\frac{C_1A_1}{A_1A_2} = \frac{A_1C_1}{C_1C_2} = \frac{CB}{BK} \ldots = \frac{c/2}{c\phi/2} = \Phi.$$

Каждая сторона исходного треугольника ΔABC также делится золотым сечением, причем дважды (на каждой половине в желто-окрашенных точках): $\phi/\Phi^{-2} = \Phi$.

Длину хорды CB_3 можно определить из треугольника по теореме косинусов:

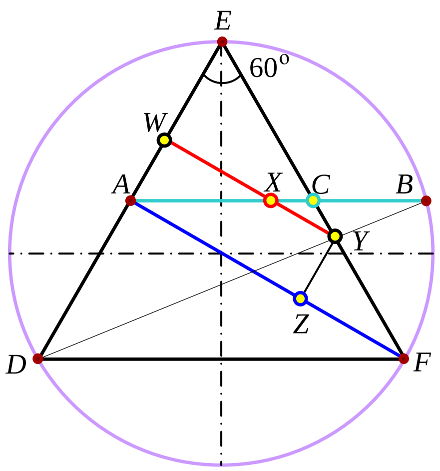
$$l = \sqrt{\phi^2 + \phi^4 - 2\phi^3\cos(2\pi/3)} = \phi\sqrt{1+\phi^2+\phi} = \phi\sqrt{2},$$

где $\cos(2\pi/3) = \cos(120^o) = -0{,}5$; $\phi^2 + \phi = 1$.

Тогда отношение двух соседних неравных хорд равно: $CB_3/B_2B_3 = \phi\sqrt{2}/\phi = \sqrt{2}$.

Но и это не всё.

Несколько добавочных линий (рис. 4), и на базе равностороннего треугольника появляется дополнительный набор золотых сечений.



Последовательность построений:

ΔEDF, $\bullet A\,(EA = AD)$, $\bullet C\,(EC = CF)$,
$AB\,(AC)$, DB, $YZ \perp AF$, $YW \perp ED$.

$$\Phi = \frac{AC}{CB} = \frac{EY}{YF} = \frac{AZ}{ZF} = \frac{WX}{XY} = \frac{EW}{WA} = \overset{\frown}{EB}\Big/\overset{\frown}{BF}$$

$$\Phi = \frac{AB}{AC} = \frac{EF}{EY} = \frac{AF}{AZ} = \frac{WY}{WX} = \frac{EA}{EW} = \overset{\frown}{EF}\Big/\overset{\frown}{EB}$$

Рис. 4. Формирование множества золотых сечений на основе равностороннего треугольника

Аналогичным образом могут быть выполнены геометрические построения относительно и других серединных точек треугольника (типа C).

Этим самым разрушается привычный миф об исключительной "золотоносности" пентаграммы и связанной с ней пятиконечной звезды.

Как видно, равносторонний треугольник способен продуцировать целый букет золотых сечений.

По аналогии с рассмотренным выше предельным выражением золотоносности пирамид приходим к следующему выводу:

пирамиды Вассера – фрактально-золотые пирамиды, с формообразующим содержанием золотой пропорции в её фрактальном выражении.

Описанные схемы-построения окончательно ломают также устойчивый стереотип, будто треугольники не имеют непосредственной взаимосвязи с золотым сечением.

Вместо заключения. Мы уже отмечали, что версия-гипотеза о преимущественном распространении *четырёхгранной пирамиды* в увязке со сторонами света является наиболее убедительной и правдоподобной.

Ну, и конечно, относительная простота геометрического построения квадрата.

Более того, в терминологии пирамид Вассера этот вариант многократно усиливается тем, что площадь поверхности и объём "квадратного" аналога максимальны:

n	3	4	5
S	5,196	**5,464**	5,370
V	0,612	**0,667**	0,490

Известные "рукотворные" пирамиды на Земле отличаются от своих равно-рёберных аналогов размерами высоты. Но это отличие не является таким уж значительным.

В своих исследованиях учёные принимают самые разные единицы измерения пирамид.

Выискивают в них разные константы: π, Φ и даже основание натурального логарифма e, которое впервые появилось в работе Непера (1618), хотя и не явно.

Однако всё может оказаться прозаическим мотивом. В построении пирамид люди стремились достичь сразу несколько разных эффектов и старались выкладывать боковые грани более или менее похожими на равносторонние треугольники.

Во-первых, это достаточно эстетично и гармонично – обозревать со всех сторон равно-рёберную пирамиду. Понятно, что речь идёт, прежде всего, о проектных макетах мелкого масштаба, которые архитекторы могли выставлять напоказ правителям или другим лицам, принимающим решение.

Прототипы можно было крутить-вертеть, созерцая под любым углом зрения.

И если по каким-либо причинам кому-то казалось что-то не так, вершину могли приплюснуть или наоборот приподнять.

Во-вторых, такая конструкция имеет два явных максимума:

– наибольшее сосредоточение внутреннего объёма;
– наибольшую площадь обмена-взаимодействия с окружающей средой.

Равносторонние треугольники или близкие к ним (в зависимости от угла зрения) вполне могли задумываться людьми как некоторые маяки-радары для обмена с Космосом: визуального, приёмно-отражательного и т.п.

Отсюда и возникали неимоверно большие размеры.

Похоже, человек "вкладывал" в пирамиды не конкретные числа-константы, которые можно выявить только специальным счётом. Он, как мог, изначально задавал правильные формы, которые позже по ряду причин могли корректироваться и/или сбиваться. В том числе и целенаправленно, из расчёта настройки на специальные области небосвода. – Как знать?

И уже по мере практического наращивания боковых рёбер и граней (тщательного, но всё ж не очень) создавались конкретные формы.

А вот *пятигранная равно-рёберная пирамида* с её предельным и фрактальным выражением золотой пропорции в виде равносторонних треугольников вполне приспособлена для гипотезы о структурировании живой материи.

Другими словами, базис-каркас изначальной формы высокоорганизованных биологических структур составляет пятигранная пирамида Вассера с равными рёбрами.

Она входит в подкласс предельно-золотых конструкций и отличается максимальным объёмом. При одних и тех же затратах на строительство за счёт такой конфигурации достигается наибольший объём жизненного пространства.

Именно стремление занять как можно большее пространство в условиях гравитации и обусловил в конечном итоге распространение пятиконечных или пятичленных форм многих биологических объектов.

Результатом длительных эволюций высокоорганизованных форм стала система пятого порядка в виде равно-рёберной пирамиды с её фрактальным и предельным выражением золотой пропорции посредством пяти боковых равносторонних треугольников.

Но это тема отдельного исследования...

Литература:

1. *Series W.L.* The shape of the Great Pyramid. – Wilfrid Laurier Univ. Press, 2000. – 293 p.
2. *Brier B., Houdin J.P.* The secret of the great pyramid: how one man's obsession led to the solution of ancient Egypt's greatest mystery. – HarperCollins, 2009. – 224 p.
3. *Димде А.* Целительная сила пирамид. – М.: Фаир–Пресс, 2000. – 320 с.
4. *Подборка* про свойства пирамид. – 2011. – http://piramida-stroim.ru/items/items1/pro-svoystva-piramid.
5. *Василенко С.Л.* Анализ семинара-2012 «гармония + математика» // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 01.02.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=62&sm=2.
6. *Василенко С.Л.* Пирамидальная золотоносность // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.02.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=64&sm=2 / Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17305, 11.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161930.htm.
7. *Василенко С.Л.* Главная тайна золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17178, 04.01.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322109.htm.
8. *Василенко С.Л.* "Двенадцать" в основаниях мироустройства // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 07.08.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11264.html.
9. *Василенко С.Л.* Золотые купола в задаче конусной упаковки евклидового пространства // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.07.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=31&sm=2 // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 17.07.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11225.html.
10. *Василенко С.Л.* Математические начала гармонии: русская матрешка в геометрических образах гармонической пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15978, 04.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161668.htm.
11. *Василенко С.Л.* Геометрия золотого сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16409, 05.03.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161806.htm.