С.Л. Василенко

Золотые россыпи в целочисленных прогрессиях

Лишь промелькнувший лик мгновенья
Умчится в прошлое миров…

В разное время золотое сечение (ЗС), как идеальная математическая конструкция и фундаментальная константа, исторически "всплывала" в нескольких интерпретациях:

– геометрическое построение правильного пятиугольника у Евклида;
– "кроличий" ряд Фибоначчи (1202);
– обожествление золотой пропорции Лукой Пачоли (1509);
– последовательности Фибоначчи (числа Люка и др.) с произвольными начальными условиями (1875).

Последующие обобщения, связанные с увеличением числа слагаемых, порядка возвратных уравнений или абсолютных значений коэффициентов, выводят фибоначчиевы структуры из орбиты и сферы влияния ЗС.

Но отсюда вовсе не следует, что именно приведенная очерёдность событий предопределяет преемственность причинно-следственных переходов в толковании ЗС. Равно как число π необязательно своим существованием в мироздании обязано исключительно диаметру окружности единичной длины. Поскольку идеальных окружностей в природе не наблюдается. Во всяком случае, наиболее приближенные к ним траектории космических объектов обычно представляют собой вытянутые эллипсы.

Например, вероятность случайного выбора несократимой дроби p/q или пары взаимно простых чисел из бесконечного множества натуральных чисел в точности равна $6/\pi^2 \approx 0{,}608$.

Чем не первопричина формирования π? – Благо перечислительных свойств целых чисел в мироздании предостаточно. Одних только атомов не перечесть.

Строго говоря, источником порождения ЗС в теории чисел является *процедура* получения элементов числовых последовательностей (с разными начальными условиями), которая *имеет отдалённое отношение к самим числам* Фибоначчи. Разве что их отношение в пределе стремится к своему аттрактору в виде числа ЗС. Ну, и конечно, абсолютным нонсенсом всплывают невесть, откуда взявшиеся «обобщённые золотые сечения» (?) философствующих авторов [1], что уже обсуждалось в ряде работ [2, 3].

Бессодержательность такой терминологии очевидна.

В большой мере это относится и к заключениям, основанным на подобных обобщениях. – Что-то сродни "обобщённым числам π" (?).

Причина – следствие. Числа Фибоначчи принято рассматривать в контексте их исторического появления через "кроличий" ряд, формируемый двучленно-аддитивной рекурсией вида $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ с натуральным индексом (дискретным временем) n.

Одновременно это также целочисленная геометрическая прогрессия $F_n = \left\langle \Phi^n / \sqrt{5} \right\rangle$ – как общепринятое округление нормированной (на корень из пяти) степени золотого сечения Ф до ближайшего целого числа. Здесь понятие прогрессии понимается в широком смысле, как последовательность величин, где каждый последующий элемент находится в некоей (общей для всей прогрессии) зависимости от предыдущего элемента.

Ещё проще и убедительнее в этом плане выглядит формула для чисел Люка $L_n = \left\langle \Phi^n \right\rangle$.

Но говорить здесь, что именно аддитивные свойства приводят к ЗС, а мультипликативная форма чисел F_n – вторично появляющийся продукт, не приходится.

Хотя бы потому, что аналитическая форма позволяет вычислить любой член ряда, не прибегая к длительной рекуррентной процедуре.

Да, и кажущееся на первый взгляд абстрагирование суммирующей формы от ЗС – весьма обманчиво. Ибо это тоже "типичная перезапись" ЗС:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \left(\frac{F_n}{F_{n-1}}\right)^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

То есть число золотого сечения Ф, по сути, развёрнуто в бесконечную рекурсию.

Что здесь первично (рекурсия, квадратное уравнение или целочисленная геометрическая прогрессия), в математическом контексте уже не столь важно, поскольку во всех перечисленных случаях приоткрывается нечто, «существовавшее и без этого».

Боле важно и принципиально иное: рекурсия не обязательно является первичной, приводя в пределе к ЗС. Тем более что на практике такой предел не достижим. И никаким количеством кроликов Фибоначчи и даже атомов Вселенной его не подтвердить.

Рекурсия теоретически может быть наоборот развернутым продуктом уже «готового феномена ЗС». То есть гипотетически золотое сечение изначально становится порождающим фактором двучленно-аддитивной рекурсии, а не наоборот.

Нечто похожее на порочный круг или логический парадокс в известной проблеме курицы и яйца. Одним словом, "сепульки" (С. Лем).

Так или иначе, но в вопросах первичности-вторичности следует быть аккуратным, дабы не порождать далее фантомы и противоречивые выводы.

Пожалуй, будет справедливее и надёжнее исходить из классического определения-понимания ЗС как деления непрерывной величины на две части в виде отношения, при котором меньшая часть так относится к большей, как она ко всей величине.

«Уникальная уникальность». В работе [2] в иронически-популяризированной форме описаны наиболее характерные чувственные формы отношения к феномену ЗС.

Так, почему-то принято считать или искать особенности проявления ЗС в некой гармонии, хотя субъективность "красоты" и абсолютная строгость математической конструкции никак не уживаются и тем более не уравновешиваются на одних весах.

На одной чаше «в огороде бузина...», на другой – «поверка алгеброй гармонии».

И за всей подобной мишурой невольно пропускается главное. Оно же начальное, тысячи раз переписанное, но не до конца нами осмысленное.

В чем же «уникальная уникальность» феномена ЗС?

Для любой константы в теоретических и практических исследованиях вполне достаточно приближение с ограниченным количеством значащих цифр, пусть даже очень большим.

А вот число Ф требует либо своего аналитического представления через корень из 5, либо всей бесконечной вереницы значащих цифр. В противном случае оно становится источником ложных выводов за счёт накопительной погрешности, когда происходит, нарушение изначального принципа [4], заложенного в определении.

По И.Пригожину процессы развития-движения в мироздании энтропийно необратимы, а диссипативная функция системы стремится к своему наименьшему значению.

Данному положению вторит идеальная конструкция ЗС:

$$\begin{cases} \phi^0 = \phi^{-1} - \phi^{+1}, \\ \Phi^0 = -\Phi^{-1} + \Phi^{+1}, \end{cases}$$

названная нами ранее как модель «Настоящее = Прошлое + Будущее».

Представляется, что вследствие особой уникальности фундаментальной константы Ф, это и есть базовая конструкция или остов Вселенной.

Всё остальное на неё нанизывается так, что данная формульно-формализованная система-закономерность «сидит внутри всего и вся».

Всем управляет мгновенный срез времени Φ^0.

Подобно точке в геометрии, этот срез не имеет конкретной меры. Зато можно определить отрезок между двумя точками-срезами как дление (по Козыреву). Собственно так мы измеряем временн*ы*е интервалы.

Измерить само время, нам, похоже, не дано. Хотя его можно назначить по принципу ограниченности [5], допустим на уровне 10^{-37} с, как улетающий в прошлое "мгновенья миг".

Пока же происходит подмена дифференциальных характеристик пусть мельчайшими, но всё же интегральными аналогами.

Для числа Ф нужна абсолютная идеальность. Только так обеспечивается мгновенное "пожирание" будущего прошлым. Только так обеспечивается фактическое отсутствие настоящего, которое, не успев родиться из будущего, тут же становится прошлым.

Поэтому в аналитическом представлении Ф – число иррациональное. В отличие от того же трансцендентного π или *e*. Почему и затруднительны попытки установить между ними идеальное равенство.

Например, формула $\Phi = 2\cos(\pi/5)$ абсолютно верна. Но это вовсе не выделяет самостоятельную функциональную связь между Ф и π. Просто здесь отображен генезис разных описаний одного и того же действа, поскольку и косинус, и золотое сечение являются *отношением* одноимённых геометрических отрезков. То есть имеет место запись одинакового отношения, только сопряжёнными математическими приёмами.

Аддитивно-мультипликативная связность. Как уже отмечалось, установление причинно-следственных приоритетов, особенно в математике при взаимных эквивалентных переходах, – вещь обманчивая. Так, аддитивно-суммирующая рекурсия $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ одновременно оказывается целочисленным представлением геометрической прогрессии со знаменателем Ф: $F_n = \left\langle \Phi^n / \sqrt{5} \right\rangle$.

Именно за счёт такого округления и происходит постоянное "чёт-н*е*чет дёргание" или числовое колебание с разницей ± 1, например $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Собственно в рамках двойственного характера образования чисел Фибоначчи можно говорить о дуальном наличии-альянсе у них мультипликативных и аддитивных свойств. Либо вести речь об аддитивно-мультипликативной связности (структуре) числовой последовательности.

Хотя подобные оценки требуют определенной пунктуальности.

Например, в работе [6, с. 201] число ЗС ошибочно, по моему мнению, наделяется мультипликативными свойствами на основании тождества степеней $\Phi^n \equiv \Phi \cdot \Phi^{n-1}$.

Это соотношение справедливо для любого неотрицательного числа, следовательно, нисколько не отмечает и не выделяет какие-либо специфичные признаки самой константы Ф. Но никак ни "ореол или божественный нимб во славу ЗС". Всё, что тождество характеризует, так это свойство самих степеней, ибо степенная функция является *вполне мультипликативной* по определению. – Поэтому имеет место надуманное преувеличение особой значимости ЗС там, где её нет.

С долей условности можно провести аддитивно-мультипликативные аналогии между числами Фибоначчи и степенями ЗС на основе похожести форм двух тождеств:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \qquad \Phi^{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n-1}.$$

Собственно и всё, что касается мультипликативных проявлений ЗС, – в контексте принятого понимания тех же мультипликативных функций

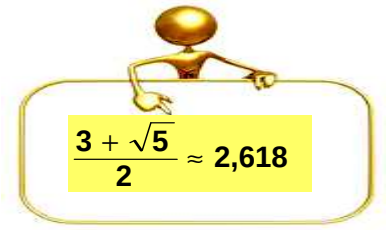
От геометрической – к арифметической прогрессии ЗС. Располагая моделью геометрической прогрессии $\langle \Phi^n \rangle$, вполне естественным становится желание рассмотреть её арифметический аналог в целочисленном представлении $\langle n\Phi \rangle$ или $\lfloor n\Phi \rfloor$.

Так мы приходим к spectrum-ряду[1], сформированному последовательными кратностями положительного действительного числа ρ, округлёнными снизу до ближайшего целого значения: $s_n = \lfloor n\rho \rfloor$ – *floor*-функция или округление действительного числа до ближайшего целого в меньшую сторону (по терминологии Айверсона).

Если основа ρ иррациональна, то s_n называется последовательностью Битти[2] [7].

Если α и β – положительные иррациональные числа, связанные соотношением $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$, то пара комплементарных последовательностей Битти $\lfloor n\alpha \rfloor, \lfloor n\beta \rfloor, n = 1, 2, 3...$ содержит все натуральные числа без повторений [8].

То есть каждое натуральное число входит один и только один раз в $\lfloor n\alpha \rfloor$ либо $\lfloor n\beta \rfloor$, чем образуется единственное разбиение натурального ряда без пропусков и перекрытий, – принцип Рэлея (1877).



В частности, положив $\alpha = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = 1 + \Phi$ приходим к самобытным последовательностям Витгофа $a_n = \lfloor n\Phi \rfloor$ и $b_n = a_n + n$ (табл. 1).

Таблица 1

Первые значения последовательностей Витгофа $a_n = \lfloor n\Phi \rfloor$ и $b_n = a_n + n$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a_n	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29	30	32	33	35	37	38	40	42	43	45	46	48
b_n	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47	49	52	54	57	60	62	65	68	70	73	75	78
Σ	**3**	**8**	11	16	**21**	24	29	32	37	42	45	50	**55**	58	63	66	71	76	79	84	87	92	97	100	105	110	113	118	121	126
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
a_n	50	51	53	55	56	58	59	61	63	64	66	67	69	71	72	74	76	77	79	80	82	84	85	87	88	90	92	93	95	97
b_n	81	83	86	89	91	94	96	99	102	104	107	109	112	115	117	120	123	125	128	130	133	136	138	141	143	146	149	151	154	157
Σ	131	134	139	**144**	147	152	155	160	165	168	173	176	181	186	189	194	199	202	207	210	215	220	223	228	231	236	241	244	249	254

Указанные (*a*, *b*)-последовательности монотонно возрастающие.

Они имеют интересные математические закономерности. Например, если $a_n = k$, то число $k + n$ не является членом данной последовательности, поскольку $b_n = k + n$.

Приведём без доказательства некоторые равенства, включая новые:

$$a_n + b_n = \lfloor b_n \Phi \rfloor, \qquad b_n = \lfloor n\Phi^2 \rfloor = \lfloor a_n \Phi \rfloor + 1;$$

$$a_{a_n} = a_n + n - 1, \qquad b_{b_n} = 3b_n - n;$$

$$a_{a_n} = b_n - 1, \qquad b_{b_n} = 3a_n + 2n;$$

[1] http://mathworld.wolfram.com/SpectrumSequence.html.
[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Beatty_sequence.

$$a_{a_n+n} = a_{b_n} = 2a_n + n, \qquad b_{b_n+n} = \frac{4}{3}\left(b_{b_n} + n\right);$$

$$a_{a_{a_n}} = b_{a_n} - 1 = a_{b_n} - 2.$$

Заслуживает внимания теорема, дающая ещё одно описание исследуемых пар [9].

Теорема. Если представить натуральное число $n-1$ в виде суммы неповторяющихся чисел Фибоначчи $n-1 = F_{k_1} + F_{k_2} + ... + F_{k_r}$, то $a_n - 1 = F_{k_1+1} + F_{k_2+1} + ... + F_{k_r+1}$.

Иначе говоря, если $n-1$ есть сумма попарно различных чисел Фибоначчи, то $a_n - 1$ есть такая же сумма чисел Фибоначчи с номерами (индексами) на единицу больше.

Функциональные матрёшки. Многократное последовательное вложение дискретных функций a_{b_n} и b_{a_n} приводит нас к следующим соотношениям:

$$a_{b_n} = b_{a_n} + 1;$$

$$a_{b_{a_{b_n}}} = b_{a_{b_{a_n}}} + 4;$$

$$a_{b_{a_{b_{a_{b_n}}}}} = b_{a_{b_{a_{b_{a_n}}}}} + 17;$$

$$a_{b_{a_{b_{a_{b_{a_{b_n}}}}}}} = b_{a_{b_{a_{b_{a_{b_{a_n}}}}}}} + 72;$$

$$a_{b_{a_{b_{a_{b_{a_{b_{a_{b_n}}}}}}}}} = b_{a_{b_{a_{b_{a_{b_{a_{b_{a_n}}}}}}}}} + 305...$$

Слагаемые справа в виде образующегося ряда целых чисел 1, 4, 17, 72, 305, 1292... – есть ни что иное как знаменатели представления $\sqrt{5}$ в виде цепной дроби

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + ...}}} = [2; 4, 4, 4...].$$

Например, $2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}} = \frac{38}{\mathbf{17}}$; $\quad 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}} = \frac{161}{\mathbf{72}}$.

Данный ряд генерируется с начальными условиями $(P_2, P_3) = (4, 17)$ по рекуррентной формуле (m = 4, 5, 6…):

$$P_m = \left\lfloor \frac{P_{m-1}^2}{P_{m-1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Это также рекуррентная последовательность[3], $m \geq 2$:

$$P_m = 4P_{m-1} + P_{m-2}.$$

[3] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://oeis.org/search?q=A001076.

Возможно и матричное представление:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} P_{m-1} & P_m \\ P_m & P_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Например, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 72 & 305 \\ 305 & 1292 \end{pmatrix}$.

Внимательно присмотревшись к числам P_m, можно заметить, что они равны половинкам чётных чисел Фибоначчи с индексами, кратными трём (*M.Catalani*, 2003):

$$P_m = \frac{F_{3m}}{2},$$

что эквивалентно суммированию:

$$P_m = \sum_{j=1}^{m} F_{3j-2}\ .$$

Окончательно последовательное вложение имеет вид $\left(a_{b_{\ldots}}\right)_{(k)} = \left(b_{a_{\ldots}}\right)_{(k)} + P_k$.

Считаем приращения. Весьма любопытно ещё одно рекуррентное правило построения последовательностей (a_n, b_n) [9], отвлечённое от исходного знания ЗС:

полагаем нулевые начальные условия $(a_0, b_0) = (0, 0)$; тогда пара (a_n, b_n) определяется так: a_n – наименьшее из натуральных чисел, которое отсутствует среди чисел $a_0 \div a_{n\text{-}1}$ и $b_0 \div b_{n-1}$, а число $b_n = a_n + n$.

Применение данного подхода на практике несколько затруднено.

Зато он наглядно показывает, как с ростом индекса n числа b_n постепенно "убегают вперёд", а ряд a_n заполняет оставшиеся пробелы, выстраивая вместе с b_n натуральный ряд.

За счет этого первые разности $a_n - a_{n-1}$ состоят из 1 и 2, аналогичные приращения $b_n - b_{n-1}$ содержат только 2 и 3.

Поэтому a_n – по сути, арифметическая прогрессия целых долей чисел $n\Phi$ [10] с иррациональным шагом Ф.

Пусть $s_n = \lfloor n\rho \rfloor$, и $h = \lfloor \rho \rfloor$, $d = \rho - \lfloor \rho \rfloor$ – соответственно целая и дробная части ρ.

Образуем первые разности: $\Delta_n = s_n - s_{n-1}$

Тогда доля приращений Δ, равных $h + 1$ или h, составляет:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \langle \Delta_k \equiv h+1 \rangle = d\ ; \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \langle \Delta_k \equiv h \rangle = 1-d\ .$$

Это верно для любой дробной основы ρ.

Но отношение единичных приращений к двоичным аналогам равно доле двоичных – лишь для величины ЗС $\rho = \Phi$ и соответствует отношению $(1-\phi)/\phi = \phi$.

Какую бы достаточно большую последовательность мы не вырезали из общего ряда a_n, соотношение в ней единиц и двоек равно почти $1-\phi$.

С увеличение длины последовательности характеристика "почти" улетучивается.

Таким образом, в первых разностях ряда a_n число единиц так относится к числу двоек, как оно – к их общему количеству:

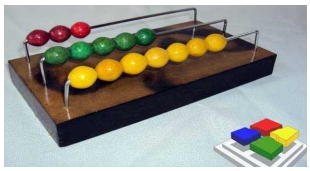
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1 - \phi .$$

"Ним" – игры. Отнимать что-либо друг у друга люди начали с незапамятных времен.

Это не могло не найти отражение "в мирных целях" в виде разновидностей всяких игр.

Одним из таких древних классов математических развлечений стали так называемые " н и м " игры[4], – вероятно, в переводе с английского *nim* "взять, стянуть".

В этих играх обычно используются сложенные кучки камешек, спичек или других фишек, которые по очереди разбираются игроками.



Классический вариант "ним" предусматривает три кучки предметов. Двое играющих поочерёдно берут предметы из этих кучек. За один раз (ход) можно взять любое их количество, но только из одной кучки.

Выигрывает игрок, взявший последний предмет.

Описания подходов к определению стратегии выигрыша, основанные на поразрядном сложении чисел в их двоичном представлении, можно найти в работах [11; 12, с. 25–27].

Если партнеры не делают ошибок, то исход игры определен уже после первого хода.

Победные алгоритмы легко получить, если рассуждать с конца, рассматривая позицию перед последним ходом, с последующим усложнением ситуации.

Существуют разновидности данной игры: удаление только из самой большой кучки (*Greedy Nim*) и др. В иных вариациях "ним", кроме удаления любого числа фишек из одной кучки, игроку позволяется забирать одинаковое число фишек из каждой кучки.

Так мы приходим к "цзяньшицзы" (выбирание камней) – очень древней китайской игре [9]. В Европе она известна как *игра Витгофа*[5] (1907) и основана на арифметической прогрессии с золотым сечением. Альтернативное прочтение: «ферзя – в угол» [9].

Это тоже игра на стратегию двух игроков.

Имеется две кучки предметов (спичек). Игроки по очереди изымают любое их число из одной кучки или равное количество из обеих кучек. Игрок, берущий последним, одерживает победу [13]. Соответственно проигрывает тот, кому нечего брать.

Любое положение в игре может быть описано парой целых чисел ($a \le b$), описывающих объемы обеих кучек. Стратегия игры всё время крутится вокруг *холодной* и *горячей* позиции.

В холодной (проигрышной) позиции игрок с очередным ходом вынужденно теряет темп лучшей игры. В горячей (выигрышной) ситуации он ходит с позиции будущего победителя.

Оптимальная стратегия заключается в переходе от горячей к любой достижимой холодной позиции.

Классификация положений "горячо – холодно" может осуществляться рекурсивно согласно следующим трём правилам:

1. (0, 0) – холодная позиция.

2. Любая позиция, из которой холодная позиция может быть достигнута единственным движением, – есть горячая позиция.

3. Если любое движение приводит к горячей позиции, то позиция холодная.

Например, все позиции формы (0, b) и (b, b) с $b > 0$ являются горячими по правилу 2.

---

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Nim.

[5] Willem Abraham Wythoff – бельгийский математик (1865–1939); "A modification of the game of nim" (1905).

Однако позиция (1, 2) холодна, поскольку все позиции (0, 1), (0, 2) и (1,1), которые могут быть получены из данного состояния, являются горячими. Холодными позициями (a, b) с наименьшими объемами становятся пары (0, 0), (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10)...

А.Витгоф обнаружил, что холодные позиции следуют регулярным образцом, определяемым золотым сечением, и определяются вышеупомянутыми парами (a_n, b_n).

То есть безопасная (для нас) n-я комбинация, которую нужно оставить противнику, равна $\lfloor n\Phi \rfloor$, $n + \lfloor n\Phi \rfloor$ и является парой элементов из комплементарных последовательностей Битти при $(\alpha, \beta) = (\Phi, \Phi^2)$ [14, с. 40].

Закон «проигрышных» пар или позиций в игре (для игрока, делающего ход):

записанная в фибоначчиевой системе счисления[6] пара чисел ($a < b$) определяет в игре "цзяньшицзы" проигрышную позицию тогда и только тогда, когда a оканчивается чётным числом нулей, а число b получается из a приписыванием ещё одного нуля в конце [11].

Представленные в табл. 1 пары чисел, – это и есть проигрышные позиции.

Вот такие необычные проявления золотого сечения.

Заключение.

1. Традиционно-привычные числа Фибоначчи являются целочисленными членами геометрической прогрессии $F_n = \left\langle \Phi^n / \sqrt{5} \right\rangle$ со знаменателем в виде золотого сечения Φ.

2. Естественно-логический переход к целочисленным членам арифметической прогрессии приводит к последовательности $a_n = \lfloor n\Phi \rfloor$ и её дополнению $b_n = a_n + n$.

3. Бесконечные (a, b)-последовательности делят весь натуральный ряд на две части так, что отношение их элементов стремится к ЗС $b_n / a_n \to \Phi$. Аналогично $a_n / n \to \Phi$.

4. Отношение количества a-чисел к количеству b-чисел приближается к золотому сечению. Это означает, что для произвольного большого натурального числа N и начального N_0 соотношение (a, b)-чисел $N_0 \le (a, b) \le N_0 + N$ подчиняется ЗС.

В натуральном ряде частоты (a, b)-чисел соответственно составляют $(\phi, 1-\phi)$.

5. Первые разности ряда a_n состоят из чисел 1 и 2 . При этом формируется устойчивая пропорция – классическая основа ЗС: число единиц m_1 так относится к числу двоек m_2 как оно – к общему количеству $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} = \phi$.

Главный вывод настоящей статьи заключается в следующем:

Помимо традиционных чисел Фибоначчи F, основанных на геометрической прогрессии золотого сечения Φ, существуют целочисленные (a, b)-последовательности Витгофа на основе арифметической прогрессии Φ.

И те и другие в разных вариантах имеют предельные аттракторы золотого сечения.

Одновременно все они допускают рекуррентные алгоритмы своей генерации без привлечения ЗС:

√ *числа Фибоначчи* – в виде двучленно-аддитивной рекурсии $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$;

√ (a, b)-*числа Витгофа* – методом последовательной сортировки, когда, начиная с условий $(a_0, b_0) = (0, 0)$, пара (a_n, b_n) определяется так: a_n – наименьшее из натуральных чисел, которое отсутствует среди величин $a_0 \div a_{n-1}$ и $b_0 \div b_{n-1}$, число $b_n = a_n + n$.

И если рекурсия (возвратное уравнение) Фибоначчи имеет адекватное эквивалентное представление в виде квадратного уравнения с корнем Φ, то в алгоритмическом образовании (a, b)-*чисел Витгофа* золотое сечение спрятано гораздо глубже.

---

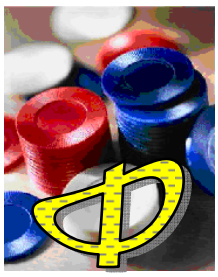
[6] Числа представляются суммами чисел Фибоначчи. Например, $100_{10} = 89 + 8 + 3 = 1000010100_F$.

Как впрочем, вероятно, и во многих других процессах и явлениях.

Нужно просто лучше искать, выходя на максимально возможное количество значащих цифр эмпирической оценки ЗС: десятки, сотни и более. А разные приближения, например, с относительной погрешностью вроде 0,01 % – стоят под очень и очень большим вопросом.

Что поделаешь? – Не каждому дано узреть промелькнувший лик-миг мгновенья.

Литература:

1. *Сороко Э.М.* Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем. Введение в общую теорию гармонии систем. – М.: КомКнига, 2009. – 264 с.
2. *Белянин В.С.* Золотое сечение – феномен новой эпохи Водолея // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=27&sm=2.
3. *Василенко С.Л.* Общее и частное в систематике золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15307, 28.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322073.htm.
4. Василенко С.Л. Бифуркации в нелинейной динамической модели на основе "золотого" сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15232 от 14.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322037.htm.
5. *Антипов М.В.* Принцип ограниченности. – РАН: Новосибирск, 1998. – 444 с. – http://osmf.sscc.ru/~amv/int1.html.
6. *Stakhov A.* Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. – N.Y.: World Scientific, 2009. – 694 p.
7. *Artstein-Avidan S., Fraenkel A.S., Sos V.T.* A two-parameter family of an extension of Beatty sequences. – 2007. – http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~fraenkel/Papers/coatp8.pdf.
8. *Баабабов А.* «Пентиум» хорошо, а ум лучше // Квант. – 1999. – № 4. – С. 36–38. – http://kvant.mirror1.mccme.ru/pdf/1999/04/kv0499baababov.pdf.
9. *Матулис А.Ю., Савукинас А.Ю.* Ферзя – в угол, "цзяньшицзы" и числа Фибоначчи // Квант. – 1984. – № 7. – С. 18–21, 29. – http://kvant.mirror1.mccme.ru/1984/07/ferzya_-_v_ugol_czyanshiczy_i.htm.
10. *Арнольд В.И.* Насколько случайны арифметические прогрессии дробных долей? // Успехи математических наук. – 2008. – Т. 63, вып. 2 (380). – С. 5–20.
11. *Яглом И.М.* Две игры со спичками // Квант. – 1971. – № 2. – С. 4–10. – http://kvant.mirror1.mccme.ru/1971/02/dve_igry_so_spichkami.htm.
12. *Фомин С.В.* Системы счисления. – 5-е изд. – М.: Наука, 1987. – 48 с.
13. *Weisstein E.W.* Wythoff's Game // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/WythoffsGame.html.
14. *Wells D.* The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. – Middlesex, England: Penguin Books, 1986.

© ВаСиЛенко, 2011