С.Л. Василенко

Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства. Ч. 4. Перестановки, композиции, разбиения

Вначале было число, и имя ему ничто.
Потом было слово, и имя ему всё.

Можно сказать, что проявления замечательных свойств числа 12 сыплются, как из рога изобилия.

Уровень их представительства или значимости, конечно, разный.

Но, так или иначе, они дополняют друг друга, создавая неповторимый колорит и мозаику разноплановых качественных и количественных интерпретаций.

Не обошло это стороной и комбинаторику.

Многие и многие комбинаторные структуры (перестановки, композиции, разбиения с дополнительными условиями и др.) буквально "нервным пучком" переплетаются и концентрируются на качественных признаках числа 12.

Частично, в виде отдельных примеров, они уже затронуты в работе [1].

Далее мы расширим эту сферу, систематизировав наиболее выразительные числовые конструкции с явными признаками комбинаторики.

Напомним, *разбиение числа* n – всякая конечная (обычно невозрастающая) последовательность натуральных чисел, сумма которых равна n [2].

Другими словами, разбиение представляет целое число в виде натуральных слагаемых, порядок расположения которых, в отличие от композиций, роли не играет.

Итак, число 12... (продолжение)

Перестановки

Перестановки – одна из старейших задач дискретной математики.

Термин отвечает сам за себя и согласуется с известным арифметическим положением: от перемены мест слагаемых и сумма не меняется. Зато формируются новые отношения между самим числами или пронумерованными объектами: соседними, перекрёстными и т.п.

Во многом задача перекликается с рассаживанием гостей за круглым столом.

Не секрет, что в ряде случаев заложенные критерии распределения имеют определяющее значение, влияя на итоговые результаты встречи.

Произвести в точности 12 допустимых перестановок не так уж и просто, поскольку их количество невероятно быстро возрастает при расширении множества исходных элементов: число всех перестановок порядка n равно числу размещений из n по n, т.е. факториалу $n!$.

Тем не менее, такая задача становится вполне посильной с введением дополнительных ограничений или системно-организующих признаков.

- Перестановки чисел 1÷4 без учёта реверса–симметрии типа 1234 ≡ 4321 [1]:

  1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2413, 3124, 3214.

- Перестановки 1÷4, в которых в каждой соседней паре наличествуют взаимно простые числа [1]:

  1234, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 3214, 3412, 4123, 4132, 4312, 4321.

- Перестановки 1÷5, в каждой из которых содержится точно 4 случаев 132-шаблона (образца) – типа "подъёма-спада" abc: $a < c < b$ [1]:

12534 12453 14253 14523 13254 13524 15324 14352 31542 21534 21453 25143.

Например, множество {1,2,3,4} включает только одну перестановку 1432, содержащую три 132-шаблона: 143, 142 132.

Вторая перестановка 12453 имеет четыре 132-шаблона: 143, 153, 253 и 243. А вот 453 таковым не является, поскольку $3 < 4$.

- Перестановки 1÷5, в которых каждый элемент следует за его собственными делителями (A016021), в частности 2 не может находиться после 4:

12345 12354 12435 12453 12534 12543 13245 13254 13524 15234 15243 15324.

- Перестановки 1÷5, которые не содержат элементов, больше или равных сумме своих соседей в их циклическом (круговом) представлении [1]:

12354, 12453, 12543, 13452, 13542, 14532, 23541, 24531, 25431, 34521, 35421, 45321.

- Перестановки 1÷6, в которых сумма каждой соседней пары – простое число, включая сумму первого и последнего элемента (A125712):

143256, 165234, 234165, 256143, 325614, 341652,

416523, 432561, 523416, 561432, 614325, 652341.

- Перестановки 1÷7 так, что сумма каждой смежной пары – простое, не считая зеркальных отражений ($abc \equiv cba$) [1]:

1234765, 1256743, 1432567, 1476523, 1652347, 1674325,

3214765, 5216743, 3412567, 7416523, 5612347, 7614325.

Понятно, что слова длиной 7 должны начинаться и заканчиваться нечётными числами-цифрами и идти вперемежку с чётными.

- Перестановки 2÷5, в которых отсутствуют элементы, делящиеся на соседние элементы (A178845):

2345, 2354, 2534, 2543, 3254, 3452, 4325, 4352, 4523, 4532, 5234, 5432.

- Перестановки из $\{1, 2, 3, 4\}$, имеющие одну "стринг-строку" последовательных неподвижных элементов (не меняющих позицию: выделено в скобках), включая одиночки (A177265):

(1)342, (1)423, (12)43, (1234), 3(2)41, 4(2)13, 4(23)1, 24(3)1, 41(3)2, 21(34), 231(4), 312(4).

В общем случае определяется аналитически: $b_{n+1} = \dfrac{1-(-1)^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k$,

где a_k – число беспорядков (*derangement*, A000166) в перестановках из k элементов.

Существуют разные способы вычисления беспорядков, в частности:

$a_k = ka_{k-1} + (-1)^k$, $a_1 = 0$; $a_k = [k!/e]$, где $[\xi]$ – ближайшее целое к ξ или округление до целого по обычным правилам арифметики.

- Число перестановок $p\{1 \div n\}$ таких, что модуль $|p(i+1) - p(i)|$ равен 2 или 3 для всех $i = \overline{1, n-1}$ (A174703):

$n = 6$: 135246 136425 142536 146352 253146 253641

524136 524631 631425 635241 641352 642531

$n = 8$: 13685247 13685742 24136857 24758631 25741368 25863147

74136852 74258631 75241368 75863142 86314257 86314752

- Перестановки $1 \div n$, имеющие одну круговую пару-последовательность вида $(p_k, p_k + 1)$ либо $(p_n,\ p_1 = p_n+1)$ [1], $n = 4$:

1243, 1423, 1342, 3124, 3142, 4312, 2134, 4213, 2314, 2431, 4231, 3421.

- Количество пар "чётное–чётное" во всех перестановках 1÷4 (A077612):

1234 2134 3124 4123 1243 2143 3142 4132 1324 2314 3214 4213
1342 2341 3241 4231 1423 2413 3412 4312 1432 2431 3421 4321

Композиции

С композициями чисел, для которых порядок следования имеет значение, также весьма проблематично выйти на свойства нашего аттрактора 12 ввиду их чрезмерного разнообразия.

Некие параллели можно провести с разнообразием картины художника, если не только поменять местами отдельные мазки мастера, но ещё и заменить некоторые их совокупности новыми красками. И снова к нам на помощь приходят дополнительные условия, которые суживают область возможных проявлений композиций и удивительным образом выводят на свойства числа 12.

- Композиции числа $n = 6$ такие, что две соседние части не равны по модулю 4 (A062202). То есть соседние части не равны между собой или не являются числами 1 и 5:

6, 24, 42, 141, 1212, 2121, 123, 132, 213, 231, 312, 321.

- Композиции числа $n = 7$ в нечетные и относительно простые части (A108700) или конкретно через нечетные числа 1, 3 и 5 (A060961):

115, 151, 511, 133, 313, 331, 11113, 11131, 11311, 13111, 31111, 1111111.

- Композиции числа 8 такие, что никакая часть не более 3 и нет двух равных соседних частей (A155822):

323, 1232, 3212, 2132, 2312, 2123, 2321, 1313, 3131, 13121, 12131, 21212.

- Композиции 8 со строго наименьшей частью в первой позиции (A079501):

1223, 1232, 1322, 125, 152, 134, 143, 125, 152, 17, 233, 8.

Также композиции 8 такие, что первая часть – делитель числа частей.

- Композиции 13, где меньшая часть больше числа частей (A098132):

13, 10 3, 3 10, 94, 49, 85, 58, 76, 67, 544, 454, 445.

- Композиции целой части величины $\lceil n(n+2)/2 \rceil$ в точности n натуральными числами, каждое из которых не более чем $n+1$, – дважды ограниченный состав чисел: (A077047).

Действительно, имеется **12** композиций $\lceil 3(3+2)/2 \rceil = 7$ в точности тремя натуральными числами, каждое из которых не более четырёх:

124, 133, 142, 214, 223, 232, 241, 313, 322, 332, 412, 421.

- Суммарное количество апериодических k-дубль палиндромов, $2 \le k < 5$ (A181135):

$k=2$: $5 \Rightarrow 14 = 1|4$, $41 = 5|1$, $23 = 2|3$, $32 = 3|2$,

$k=3$: $311 = 3|11$, $113 = 11|3$,

$k=4$: $2111 = 2|111$, $1211 = 121|1$, $1121 = 1|121$, $1112 = 111|2$, $122 = 1|22$, $221 = 22|11$.

k-композиция числа n – упорядоченный набор k натуральных чисел (частей), сумма которых равна n.

k-композиция – апериодическая (примитивная), если её период равен k, то есть она не является объединением (конкатенацией), по крайней мере, двух меньших композиций.

- Число единиц во всех композициях числа 4 (A045623): 1111, 112, 121, 211, 13, 31.

- Композиции $n = 22$ из элементов 2 и 3, где отсутствуют последовательные повторения типа "три двойки" 2_3 и/или "две тройки" 3_2 (A133925).

Поскольку 22 – чётное, то троек должно быть чётное количество.

Двух троек мало. Мы не сможем ими разбавить двойки, чтобы избежать повторения 2_3.

Шести троек, наоборот слишком много.

Четыре тройки здесь в самый раз.

Таким образом, нам нужно распределить в композициях 3333 и 22222.

Окончательно получаем одну пару разных палиндромов (равны своим реверсам) и пять пар композиций с их зеркальными отображениями, всего **12**:

1)	3 2 2 3 2 3 2 2 3	2 3 2 3 2 3 2 3 2
2)	3 2 2 3 2 3 2 3 2	2 3 2 3 2 3 2 2 3
3)	3 2 2 3 2 2 3 2 3	3 2 3 2 2 3 2 2 3
4)	3 2 3 2 2 3 2 3 2	2 3 2 3 2 2 3 2 3
5)	3 2 3 2 3 2 3 2 2	2 2 3 2 3 2 3 2 3
6)	3 2 3 2 3 2 2 3 2	2 3 2 2 3 2 3 2 3

Подобным образом имеем точно **12** композиций числа n = 30.

Здесь уже присутствуют композиции разной длины 30 = **3**·4 + **2**·9 = **3**·6 + **2**·6.

Две композиции – палиндромы.

3 2 3 2 3 2 2 3 2 3 2 3

3 2 3 2 3 2 3 2 3 2 2 3	3 2 2 3 2 3 2 3 2 3 2 3
3 2 3 2 3 2 3 2 3 2 3 2	2 3 2 3 2 3 2 3 2 3 2 3
3 2 3 2 3 2 3 2 2 3 2 3	3 2 3 2 2 3 2 3 2 3 2 3
2 2 3 2 2 3 2 2 3 2 2 3 2	2 3 2 2 3 2 2 3 2 2 3 2 2
2 2 3 2 2 3 2 2 3 2 3 2 2	2 2 3 2 3 2 2 3 2 2 3 2 2

2 2 3 2 2 3 2 3 2 2 3 2 2

Примечательно, что количество таких композиций a_n натуральных чисел n удовлетворяет рекурентному соотношению[1]:

$$a_n = -a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5}$$

с начальными условиями $(a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; a_4 \;\; a_5) = (0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 2)$.

Двоичные последовательности

- Число двоичных последовательностей длиной 5, содержащих точно одну подпоследовательность 001 (A118425):

$$00\underline{001},\ 01001,\ 10001,\ 11001,$$
$$0\underline{001}0,\ 00011,\ 10010,\ 10011,$$
$$\underline{001}00,\ 00101,\ 00110,\ 00111.$$

- Двоичные последовательности длиной 5 без начальных повторений (A122536). Другими словами, первые $k \geq 1$ символов не равны следующим k символам:

01000, 01001, 01100, 01101, 01110, 01111, 10000, 10001, 10010, 10011, 10110, 10111.

- Двоичные последовательности длиной 6, содержащие точно одну подпоследовательность 0011 (A118885):

$$000011,\ 000110,\ 000111,\ 001100,\ 001101,\ 001110,$$
$$001111,\ 010011,\ 100011,\ 100110,\ 100111,\ 110011.$$

- Двоичные последовательности длиной 6, содержащие точно одну подпоследовательность 0110 (A118892), 0011 (A118885):

$$00\underline{0110},\ 010110,\ 100110,\ 110110,$$
$$0\underline{0110}0,\ 001101,\ 101100,\ 101101,$$
$$\underline{0110}00,\ 011001,\ 011010,\ 011011.$$

- Двоичные последовательности длиной 6, в которых самый длинный "пробег" нулей составляет точно 3 (A000102, с учетом реверса–симметрии):

000100 000101 000110 000111 010001 100011

001000 101000 011000 111000 100010 110001

Альтернативное прочтение: количество композиций (упорядоченных сумм натуральных слагаемых.) числа 7, в которых обязательно присутствует 4:

1+1+1+4 1+1+4+1 1+2+4 1+4+2 2+1+4 3+4

4+1+1+1 1+4+1+1 4+2+1 2+4+1 4+1+2 4+3

- Двоичные последовательности длиной 7, содержащие точно одну подпоследовательность 0000 (A118425):

---

[1] http://oeis.org/A133925.

0010000, 0110000, 1010000, 1110000, 0100001, 1100001 и их реверсы.

Разбиения

С ростом числа n количество его разбиений (в виде суммы положительных целых чисел) $p(n)$ возрастает экспоненциально согласно асимптотическому выражению (Харди–Рамануджан)

$$p(n) \approx \frac{\exp\left(\pi\sqrt{2n/3}\right)}{4n\sqrt{3}},$$

и имеет следующую производящую функцию (Эйлер, 1740):

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

Уже для $n = 6$ обычное разбиение $p(6) = 11$.

Добавление разнообразных дополнительных условий сдвигает планку в сторону уменьшения числа разбиений, так что теоретически для очень больших чисел можно ограничить величину $p(n)$, например, где-то на уровне сотни. – Во многом здесь проявляются чисто комбинаторные закономерности.

Тем не менее, число 12 в этом контексте поразительным образом вплетается в самые разные разбиения.

Их множество слабо поддаётся реальному счёту.

Поэтом остановимся только на некоторых из них, охватывающих репрезентативный набор чисел и ограничивающих условий.

В нашем случае, особый интерес представляют, прежде всего, те случаи, которые позволяют произвести разбиения самого числа 12 различными 12-ю способами, а именно:

- Само число **12** имеет ровно **12** разбиений на факториальные части 1!, 2!, 3! [1]:

  66, 62_3, 62211, 621_4, 61_6, 2_6, 2_51_2, 2_41_4, 2_31_6, 2_21_8, 21_{10}, 1_{12}.

 Нижний индекс означает количество повторений данной цифры.

- Количество шестёрок 6 = **12**/2 во всех разбиениях **12** равно **12** (A024790):

  66, **6**51, **6**42, **6**411, **6**33, **6**321, **6**31_3, **6**222, **6**2211, **6**21_4, **6**1_6.

- Разбиения **12** на три части (A069905):

  10 1 1, 921, 831, 822, 741, 732, 651, 642, 633, 552, 543, 444.

- Разбиения **12** на простое количество различных частей (A085756):

  11 1, 10 2, 93, 921, 84, 831, 75, 741, 732, 651, 642, 543.

- Разбиения **12** на непростые (составные) числа (A002095):

  12, 10 1 1, 91_3, 84, 81_4, 66, 6411, 61_6, 4_3, 4411, 41_8, 1_{12}.

- Разбиения **12** на различные части, не содержащие 6 (A015753):

12, 11 1, 10 2, 93, 921, 84, 831, (75, 741, 732), 543, 5421.

- Разбиения **12** на различные части, не содержащие 7 (A015754) привносит (651, 642, 6321).

- Разбиения **12** на части без единиц и без повторения чётных частей (A117275):

12, 10 2, 93, 84, 75, 732, 642, 633, 552, 543, 4332, 3_4.

- Разбиения **12** на части 5*k*+1 и 5*k*+3 (A035372):

11 1, 831, 81_4, 66, 633, 631_3, 61_6, 3_4, 3_31_3, 3_21_6, 31_9, 1_{12}.

- Разбиения **12** на части 7*k*+1 и 7*k*+2 (A035372):

921, 91_3, 822, 8211, 81_4, 2_6, 2_51_2, 2_41_4, 2_31_6, 2_21_8, 21_{10}, 1_{12}.

- Разбиения **12** на части, наибольшая из которых k содержится $\lceil k/2 \rceil$ раз (A118082):

552, 5511, 4432, 44311, 4422, 44211, 4421_4, 32_41, 32_31_3, 32_21_5, 321_7, 31_9.

Также разбиения **12**, в которых наименьшая часть равна $\lceil k/2 \rceil$, где k – количество частей:

11 1, 10 1 1, 921, 831, 741, 651, 6222, 5322, 4422, 4332, 42222, 33222.

- Разбиения $n+3 = \mathbf{12}$ на части, наибольшая из которых равна 3 (A00139):

3_4, 3_321, 3_31_3, 332_3, 332211, 3321_4, 331_6, 32_41, 32_31_3, 32_21_5, 321_7, 31_9.

Также разбиения $n+3 = \mathbf{12}$ точно на 3 части:

10 1 1, 921, 831, 822, 741, 732, 651, 642, 633, 552, 543, 444.

Также количество треугольников, которые можно образовать с целочисленными сторонами и нечётным периметром $2n+3 = 21$:

10 10 1, 10 9 2, 10 8 3, 10 7 4, 10 6 5, 9 9 3, 9 8 4, 9 7 5, 9 6 6, 8 8 5, 8 7 6, 7 7 7.

Также разбиения $n+6 = 15$ на 3 различные части:

12 2 1, 11 3 1, 10 4 1, 10 3 2, 951, 942, 861, 852, 843, 762, 753, 654.

Также разбиения $2n+9 = 27 = 3^3$ на 3 различные нечётные части:

23 3 1, 21 5 1, 19 7 1, 19 5 3, 17 9 1, 17 7 3, 15 11 1, 19 9 3, 19 7 5, 15 13 1, 15 11 3, 15 9 5.

- Количество упорядоченных пар разбиений 4, не имеющих общих частей (A054440):

(4, 31), (31, 4), (4, 22), (22, 4), (4, 211), (211, 4),

(4, 1_4), (1_4, 4), (31, 22), (22, 31), (22, 1_4), (1_4, 22).

- Разбиения числа 5 на числа-факториалы $K = k!$ (*1*=0!, *1*=1!, *2*=2!, *6*=3!...) (A064985):

221, *220*, *2111*, *2110*, *2100*, *2000*, *11110*, *11100*, *11000*, *10000*, *00000*.

- Разбиения числа 6 в виде суммы 1, 2 и 3 такой, что в ней нет двоек, предшествующих любой единице (A124062):

1_6, 1_42, 1122, 2_3, 123, 132, 312, 33, 1_33, 1131, 1311, 31_3.

- Разбиения 7 на части, не превышающие 5 и не повторяющиеся более 5 раз (A102424):

$$52,\ 511,\ 43,\ 421,\ 4111,\ 331,\ 322,\ 3211,\ 31_4,\ 2_31,\ 221_3,\ 21_5.$$

- Разбиения 7, в которых наименьшая часть и отличия между последовательными частями составляет как минимум 3 [1]:

22111 2221 3211 322 331 511 4111 421 43 52 61 7

Здесь также допускаются альтернативные интерпретации:
- число разбиений, в которых никакая часть не повторяется более трёх раз;
- число разбиений без повторяющихся четных частей.

- Разбиения 7, которые имеют слагаемое, делящее остальные слагаемые конкретного разбиения (A083710). Всего имеется 15 разбиений семи. Из них три (43, 52, 322) не удовлетворяют заданному критерию. Итого: 15–3 = 12.

- Разбиения числа 7 с различным количеством чётных и нечётных частей (A171967).

Всего имеется 15 разбиений семи. Из них три (61, 52, 43) имеют одинаковое количество чётных и нечётных частей. Итого: 15–3 = 12.

- Разбиения 7, не имеющие составных частей с кратностью 3 (A118807).

Из всех 15 разбиений числа 7 лишь три нарушают принятое условие: 4111, 22111, 2221. Остальные 12 – удовлетворяют.

- Разбиения $n = 7$ на 3-содержащие части вида $2^i 3^j$ (A105420), то есть 1, 2, 3, 4, 6 ...:

$$61,\ 43,\ 421,\ 4111,\ 331,\ 322,\ 3211,\ 31_4,\ 2221,\ 22111,\ 21_5,\ 1_7.$$

- Разбиения 7 без четвёрок [1] или без пятёрок (A035948):

$$7,\ 61,\ 52,\ 511,\ 331,\ 322,\ 3211,\ 31_4,\ 2_31,\ 221_3,\ 21_5,\ 1_7.$$

$$7,\ 61,\ 43,\ 421,\ 4111,\ 331,\ 3211,\ 31_4,\ 2221,\ 221_3,\ 21_5,\ 1_7.$$

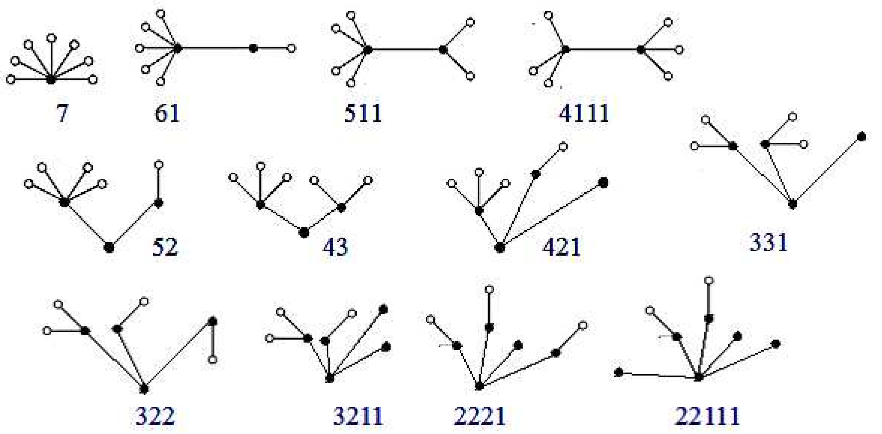
- Разбиения 7 такие, что все части, с возможным исключением наименьшей, появляются только однажды (A115029):

$$7,\ 61,\ 52,\ 511,\ 43,\ 421,\ 4111,\ 322,\ 3211,\ 31_4,\ 21_5,\ 1_7.$$

- Разбиения 7 на части, количество которых не равно 2 (A058984):

$$7, 511, 421, 4111, 331, 322, 3211, 31111, 2221, 22111, 21_5, 1_7.$$

Также количество 7-реберных деревьев графов, подобных звездам [3], то есть с 2-составными частями, но без разбиений типа 1_7, 21_5, 31_4:



- Разбиения 7 такие, что количество нечётных частей не меньше чётных (A130780):

7, 61, 52, 511, 43, 4111, 331, 3211, 31_4, 22111, 21_5, 1_7.

- Разбиения n = 8 на части, произведение которых ≤ n (A096276):

8, 71, 611, 51_3, 4211, 41_4, 321_3, 31_5, 2_311, 221_4, 21_6, 1_8.

- Разбиения 8 на биномиальные коэффициенты 1, 2, 3, 6... (A161240):

62, 611, 332, 3311, 3221, 321_3, 31_5, 2_4, 2_31_2, 2_21_4, 21_6, 1_8.

- Разбиения числа 8, в которых нечетные части и части, кратные трём, присутствуют с четными кратностями, и нет ограничений на остальные части (A101230):

44, 422, 4211, 41_4, 332, 3311, 2_4, 2_311, 221_4, 21_6, 1_8.

- Разбиения 8, в которых нечетные части и части, кратные 3 и 5, присутствуют в чётном количестве, и нет ограничений на остальные части (A102346):

62, 611, 44, 422, 4211, 41_4, 2_4, 22211, 221_4, 21_6, 1_8.

- Разбиения 8, в которых меньшие части встречаются не чаще бóльших частей (A171979):

8, 71, 62, 53, 521, 44, 431, 332, 3311, 2_4, 2_311, 1_8.

- Количество треугольных разбиений 8 (A089647), в которых числа не возрастают вдоль рядов и колонок:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	61	51	41	52	42	32	43	33	311	211	221
	1	2	3	1	2	3	1	2	11	21	11
									1	1	1

- Симметричные разбиения 8 (A005987):

8, 44, 323, 3113, 2222, 242, 11411, 161, 1112111, 211112, 12221, 11111111.

Заметим, что симметричные представления 121121 и 112211 с точки зрения разбиений адекватны 211112.

- Имеется точно **12** сопряжено-конгруэнтных разбиений 8 (A137438):

8/1+1+1+1+1+1+1+1	$\Rightarrow$ 1 (mod 7)	1
1+7/1+1+1+1+1+1+2	$\Rightarrow$ 1, 2 (mod 5)	2
2+6/1+1+1+1+2+2	$\Rightarrow$ 1, 2 (mod 5)	2
4+4/2+2+2+2	$\Rightarrow$ 0 (mod 2)	1
1+1+6/1+1+1+1+1+3	$\Rightarrow$ 0, 1 (mod 3)	2
2+3+3/2+3+3	$\Rightarrow$ 0, 2 (mod 3)	2
1+1+2+4/1+1+2+4	$\Rightarrow$ 1, 2 (mod 3)	2
	Итого:	**12**

- Число $a_n = 12$ разбиений $n = 8$ на части $a_1 \div a_{n-1}$ (A007209) 1, 2, 2, 4, 5, 7, 9, 12…:

  71, 521, 5111, 44, 422, 4211, 41_4, 2_4, 2_31_2, 2_21_4, 21_6, 1_8.

- Разбиения чисел 8 и 9 на палиндромы [1]:

  8 44 161 242 323 2222 3113 11411 1112111 211112 12221 11111111;

  9 333 1113111 21312 11511 252 414 171 2111112 22122 31113 111111111.

Обратим внимание, что здесь существуют и другие палиндромы, например для 8 – это 1331 121121 21212, но они повторяют уже имеющиеся разбиения 3113 и 211112.

- Разбиения $n = 9$ на нечётное число частей, меньшая из которых равна 1 (A027187):

  711, 621, 531, 51_4, 441, 421_3, 331_3, 32211, 31_6, 2_41, 2_21_5, 1_9.

Также разбиения $n - 1 = 8$ на чётное число частей:

71, 62, 53, 51_3, 44, 4211, 3311, 3221, 31_5, 2_4, 2_21_4, 1_8.

- Разбиения 9 на части, каждая из которых повторяется 1, 4 или 5 раз (A100853):

  9, 81, 72, 63, 621, 54, 531, 51_4, 432, 41_5, 321_4, 2_41.

- Разбиения 9 такие, что чётные части появляются единожды, а нечётные – не более двух раз (A118246):

  9, 81, 72, 711, 63, 621, 54, 531, 5211, 432, 4311, 3321.

- Разбиения 9, в которых количество чётных частей не меньше нечётных (A171966):

  81, 72, 63, 621, 54, 522, 441, 432, 4221, 3222, 22221, 222111.

- Разбиения 9, имеющие только одну часть, которая появляется 1 раз (A116596):

  9, 81, 72, 711, 63, 6111, 54, 522, 441, 41_5, 31_6, 21_7.

- Разбиения 9 на части, не содержащие $7k$, $7k \pm 3$: 3, 4, 7... (A035939):

  9, 81, 621, 6111, 522, 5211, 51111, 2_41, 2_31_3, 2_21_5, 21_7, 1_9.

- Разбиения 9 на 3-содержащие части, не превышающие 3 (A117220):

  333, 3321, 33111, 3222, 32211, 321_4, 31_6, 2_41, 2_31_3, 221_5, 21_7, 1_9.

- Разбиения $n = 10$ без частей, равных единице (A002865):

$$10,\ 82,\ 73,\ 64,\ 622,\ 55,\ 532,\ 442,\ 433,\ 42_3,\ 3322,\ 2_5.$$

Также разбиения $n = 10$, в которых наибольшая часть используется, по крайне мере, дважды (*Arndt*, 2011):

$$55, 442, 4411, 3_31, 3322, 33211, 332_4, 2_5, 2_41_2, 2_31_4, 2_21_6, 1_{10}.$$

Также разбиения $n - 1 = 9$ так, что наименьшая часть присутствует единожды:

$$9,\ 81,\ 72,\ 63,\ 621,\ 54,\ 531,\ 441,\ 432,\ 4221,\ 3321,\ 2_41.$$

- Разбиения 10, содержащие не более одной части ≤ 2 (A121659):

$$10,\ 91,\ 82,\ 73,\ 64,\ 631,\ 55,\ 541,\ 532,\ 442,\ 433,\ 3331.$$

- Разбиения 10 на части, конгруэнтные {0, 1, 3, 5} (mod 6), то есть 1, 3, 5, 6, 7, 9... (A096981):

$$91,\ 73,\ 71_3,\ 631,\ 61_4,\ 55,\ 5311,\ 51_5,\ 3_31,\ 3_21_4,\ 31_7,\ 1_{10}.$$

- Разбиения 10, где наименьшая и наибольшая части повторяются по 1 разу (A117298):

$$(10),\ 91,\ 82,\ 73,\ 721,\ 64,\ 631,\ 541,\ 532,\ 5221,\ 4321,\ 32221.$$

- Разбиения 10 на части, не содержащие формы $4k+2$, $16k$, $16k+5$ и $16k–5$ (A036022), что эквивалентно наличию 1, 3, 4, 7, 8, 9...

$$91,\ 811,\ 73,\ 71_3,\ 4411,\ 433,\ 431_3,\ 41_6,\ 3_31,\ 3_21_4,\ 31_7,\ 1_{10}.$$

- Разбиения числа $\lceil 5n/2 \rceil = 10$ на $n = 4$ неотрицательные слагаемые, каждое из которых не более 5 (A001975):

$$3331,\ 3322,\ 4411,\ 4321,\ 4222,\ 5311,\ 5221,\ 5500,\ 5410,\ 5320,\ 4420,\ 4330.$$

- Разбиения чисел 10 и 11, в которых ни одна часть не представлена более двух раз и нет частей отличающихся друг от друга на единицу, то есть отсутствуют соседние натуральные числа (A070047):

$$10,\ \ 91,\ \ 82,\ \ 811,\ 73,\ \ 64,\ \ 631,\ 622,\ 55,\ \ 5311,\ \ 442,\ 4411;$$

$$11,\ \ 10\,1,\ 92,\ \ 911,\ 83,\ \ 74,\ \ 731,\ 65,\ \ 641,\ 6311,\ \ 551,\ 533.$$

- Разбиения 11 на части p так, что $\max(p) - \min(p) = 3$ (A128508):

$$74,\ 542,\ 52_3,\ 4421,\ 441_3,\ 4331,\ 43211,\ 431_4,\ 42_31,\ 4221_3,\ 421_5,\ 41_7.$$

- Разбиения 11 на неодинаковые целые числа, то есть ни одно из слагаемых в конкретном разбиении не повторяется (A078408):

$$11,\ 10\,1,\ 92,\ 83,\ 821,\ 74,\ 731,\ 65,\ 641,\ 632,\ 542,\ 5321.$$

- Разбиения 11 на части, не содержащие формы $9k$, $9k+1$ или $9k-1$ (A035940):

$$\underline{11},\ 74,\ 722,\ 65,\ 632,\ 542,\ 533,\ 5222,\ 443,\ 4322,\ 3332,\ 32222.$$

- Разбиения 11 на разные части (A000009):

$\underline{11}$, 10 1, 92, 83, 821, 74, 731, 65, 641, 632, 542, 5321;

эквивалентные разбиения 11 на нечётные части:

$\underline{11}$, 911, 731, 71111, 551, 533, 53111, 51_6, 33311, 331_5, 31_8, 1_{11};

разбиения 11 так, что если *k* – наибольшая часть, то присутствуют все части 1÷*k*:

43211, 33221, 322211, 3221_4, 321_6, 31_8, $2_5 1$, $2_4 1_3$, $2_3 1_5$, $2_2 1_7$, 21_9, 1_{11};

также число связанных пороговых[2] графов с 11 рёбрами;

также разбиения 11, в котором наибольшая часть присутствует нечётное число раз, а все другие части – чётное число раз:

911, 722, 71111, 5222, 52211, 521_4, 51_6, 33311, 322211, 3221_4, 321_6, 31_8.

Удивительную закономерность, что количество разбиений некоторого числа *n* на неодинаковые части равно количеству разбиений *n* на нечётные части, установил ещё замечательный математик Эйлер.

- Разбиения числа 13 без составных частей 1 и 3 (A181531):

13 = 11+2 = 9+4 = 9+2+2 = 8+5 = 7+6 = 7+4+2 = 7+2+2+2 = 6+5+2 = 5+4+4 = 5+4+2+2 = 5+2+2+2+2.

- Разбиения 13 на нечётные части, в которых наибольшая часть содержится лишь однажды (A117409):

13, $11\ 1_2$, 931, 91_4, 751, 733, 731_3, 71_6, 53311, 531_5, 51_8, 31_{10}.

- Разбиения 13 на различные части, не содержащие 3 (A015745)

13, 12 1, 11 2, 10 2 1, 94, 85, 841, 76, 751, 742, 652, 6421.

- Разбиения 13 на различные части, наименьшая из которых – нечётная (A026832)

13, 12 1, 10 3, 10 2 1, 931, 85, 841, 751, 643, 6421, 643, 5431.

- Разбиения 13 на части без единиц, но с содержанием 3 (A085811):

10 3, 832, 733, 643, 6322, 553, 5332, 4432, 43_3, 432_3, $3_3 22$, 32_5.

- Разбиения 13 на различные 5-гладкие числа[3] (A112582) 1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15...:

12 1, 10 3, 10 2 1, 94, 931, 85, 841, 832, 652, 643, 6421, 5431.

Натуральное число называется *k*-гладким, если все его простые делители не превосходят *k*. Это значит, что нет простых сомножителей, больших *k*. Эти числа особенно важны в алгоритмах факторизации.

- Разбиения 13, 14 на 6*k*+1 и 6*k*+2, то есть 1, **2**, 7, **8**, 13, **14** (A035642) так, чтобы в каждом разбиении содержалась хотя бы одна часть такого вида:

8221_2, 821_4, 81_6, 72221, 722111, 7211111, $2_6 1_2$, $2_5 1_4$, $2_4 1_6$, $2_3 1_8$, $2_2 1_{10}$, 21_{12};

8221, 821_3, 81_5, 7222, 7221_2, 721_4, $2_6 1$, $2_5 1_3$, $2_4 1_5$, $2_3 1_7$, $2_2 1_9$, 21_{11}.

---

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Threshold_graph.
[3] http://mathworld.wolfram.com/SmoothNumber.html.

- Разбиения 14 на части $5k+1$, $5k+4$, то есть 1, 4, 6, 9, 11, 14... (A003114):

$$14,\ 11\ 1_3,\ 941,\ 91_5,\ 6611,\ 644,\ 641_4,\ 61_8,\ 4_31_2,\ 4_21_6,\ 41_{10},\ 1_{14}.$$

Также разбиения 14 так, что если k – наибольшая часть, то каждая из остальных частей $\{1, 2, ..., k-1\}$ повторяется, по крайней мере, дважды:

$$3_32_21,\ 3_22_31_2,\ 3_22_21_4,\ 32_41_3,\ 32_31_5,\ 32_21_7,\ 2_61_2,\ 2_51_4,\ 2_41_6,\ 2_31_8,\ 2_21_{10},\ 21_{12}\ .$$

Также разбиения 14 так, что если k – наибольшая часть, то k содержится, по крайней мере, k раз:

$$3_42,\ 3_411,\ 3_3221,\ 3_321_3,\ 3_31_5,\ 2_7,\ 2_61_2,\ 2_51_4,\ 2_41_6,\ 2_31_8,\ 2_21_{10},\ 1_{14}.$$

- Разбиения 14 на 3 неупорядоченные взаимно простые части (A023023)

$$257,\ 275,\ 527,\ 572,\ 725,\ 752,\ 347,\ 374,\ 437,\ 473,\ 734,\ 743.$$

- Разбиения 14 на части $6k+1$ и $6k+3$, то есть 1 , 3, 7, 9, 13... (A035366):

$$13\ 1,\ 9311,\ 91_5,\ 77,\ 7331,\ 731_4,\ 71_7,\ 3_41_2,\ 3_31_5,\ 3_21_8,\ 31_{11},\ 1_{14}.$$

- Разбиения 14 на различные части с чётным рангом (A117192)

$$6_21_2,\ 5_22_2,\ 5_21_4,\ 4_22_21_2,\ 4_21_6,\ 3_41_2,\ 3_22_4,\ 3_22_21_4,\ 3_21_8,\ 2_61_2,\ 2_41_6,\ 2_21_{10}.$$

- Разбиения 14 на счастливые числа 1, 3, 7, 9, 13... (A066920):

$$13\ 1,\ 9311,\ 91_5,\ 77,\ 7331,\ 731_4,\ 71_7,\ 3_41_2,\ 3_31_5,\ 3_21_8,\ 31_{11},\ 1_{14}.$$

В теории чисел, *счастливое число*[4] (A000959) – натуральное число в множестве, порождённом "сито", похожем на решето Эратосфена, генерирующее простые числа.

- Разбиения 15 на простые части 2, 3, 5, 7, 11, 13... (A000607):

$$13\ 2,\ 11\ 2\ 2,\ 753,\ 7332,\ 72_4,\ 5_3,\ 5532,\ 53322,\ 52_5,\ 3_5,\ 3_32_3,\ 32_6.$$

- Разбиения 15 на *нечётное* число частей, наименьшая из которых равна 2 (A027188):

$$11\ 2\ 2,\ 10\ 3\ 2,\ 942,\ 852,\ 762,\ 63222,\ 54222,\ 53322,\ 4432_3,\ 43_32,\ 3_42_3,\ 32_6.$$

- Разбиения 15 на части, не содержащие формы $4k+2$, $8k$, $8k+3$ и $8k-3$ (A036016) или, что эквивалентно, с включением форм $8k\pm1$ и $8k+4$, то есть 1, 4, 7, 9, 12, 15...

$$15,\ 12\ 1_3,\ 941_2,\ 91_6,\ 771,\ 744,\ 741_4,\ 71_8,\ 4_31_3,\ 4_21_7,\ 41_{11},\ 1_{15}.$$

- Разбиения 15, в которых каждая часть k повторяется, по крайней мере, k раз (A117144):

$$3_5,\ 3_41_3,\ 3_32_3,\ 3_32_21_2,\ 3_31_6,\ 2_71,\ 2_61_3,\ 2_51_5,\ 2_41_7,\ 2_31_9,\ 2_21_{11},\ 1_{15}.$$

- Разбиения 15 на части $4k+2$ и $4k+3$, то есть 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15... (A035366):

$$15,\ 11\ 2\ 2,\ 10\ 3\ 2,\ 762,\ 7332,\ 72_4,\ 663,\ 63_3,\ 632_3,\ 3_5,\ 3_32_3,\ 32_6.$$

- Разбиения 15 на части, не содержащие формы $4k+2$, то есть 2, 6, 10, 14... (A036024)

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Lucky_number.

$15,\ 12\,3,\ 11\,4,\ 933,\ 87,\ 843,\ 753,\ 744,\ 5_3,\ 5433,\ 4_33,\ 3_5.$

- Разбиения 15 на *чётное* число частей, наименьшая из которых равна 2 (A027194):

$13\,2,\ 9222,\ 8322,\ 7422,\ 7332,\ 6522,\ 6432,\ 5532,\ 5442,\ 52_5,\ 432_4,\ 3_32_3.$

- Разбиения 15 на нечётные части с повторением каждой нечётное число раз (A117958):

$15,\ 11\,3\,1,\ 951,\ 933,\ 93111,\ 753,\ 751_3,\ 731_5,\ 555,\ 53331,\ 3_5,\ 1_{15}.$

- Разбиения $n = 5$-го треугольного числа 15 только числами $1 \div n$ и точно n элементами или термами (A076822):

55311, 55221, 54411, 54321, 54222, 53322, 53331, 44421, 44331, 44322, 43332, 33333.

- Разбиения 15 точно на два набора неравных нечётных частей (A117955):

$13\ 1\ 1,\ 11\ 1_4,\ 91_6,\ 933,\ 71_8,\ 771,\ 51_{10},\ 551_5,\ 31_{12},\ 331_9,\ 3331_6,\ 3333111.$

- Разбиения 15 с нулевой эксцентрикой, когда количество единиц u равно количеству частей, которые больше u (A064410):

14 1, 10 3 1 1, 9411, 8511, 7611, 83211, 74211, 65211, 632211, 542211, 4322211, 444111.

- Разбиения 15, 16 и 17 на первые три треугольных числа 1, 3 и 6 (A086159):

$663,\ 661_3,\ 6333,\ 6331_3,\ 631_6,\ 61_9,\ 3_5,\ 3_41_3,\ 3_31_6,\ 3_21_9,\ 31_{12},\ 1_{15};$

$6631,\ 661_4,\ 63_31,\ 6331_4,\ 631_7,\ 61_{10},\ 3_51,\ 3_41_4,\ 3_31_7,\ 3_21_{10},\ 31_{13},\ 1_{16};$

$66311,\ 661_5,\ 63_311,\ 6331_5,\ 631_8,\ 61_{11},\ 3_511,\ 3_41_5,\ 3_31_8,\ 3_21_{11},\ 31_{14},\ 1_{17}.$

- Разбиения 16 на квадраты и кубы (A131799) 1, 4, 8, 9, 16...:

$16,\ 941_3,\ 91_7,\ 88,\ 844,\ 841_4,\ 81_8,\ 4_4,\ 4_31_4,\ 4_21_8,\ 41_{12},\ 1_{16}.$

- Разбиения 16, 17, 18 на степени различных простых чисел, включая 1 (A106245) $1,2,3,2^2,5,7,2^3,3^2,11,13,2^4,17$...:

$2^4,\ 13\,3,\ 13\,2\,1,\ 11\,5,\ 11\,2^2\,1,\ 11\,3\,2,\ 7531,\ 752^2,\ 73^2,\ 72^31,\ 53^22,\ 52^33;$

$17,\ 13\,2^2,\ 13\,3\,1,\ 11\,5\,1,\ 11\,3\,2\,1,\ 7532,\ 752^21,\ 73^21,\ 53^221,\ 3^22^3,\ 532^31,\ 2^41.$

$17\,1,\ 13\,5,\ 13\,2^2\,1,\ 13\,3\,2,\ 11\,7,\ 11\,5\,2,\ 11\,3\,2^2,\ 75321,\ 72^33,\ 73^22,\ 53^22^2,\ 3^22^31.$

- Разбиения 17, в которых каждая часть появляется 2, 3 или 5 раз (A089958). Либо то же самое: число разбиений, в которых каждая часть по модулю 12, конгруэнтна 2, 3, 6, 9, 10:

$771_3,\ 661_5,\ 5_311,\ 55221_3,\ 4_31_5,\ 443_3,\ 44331_3,\ 442_31_3,\ 44221_5,\ 3_511,\ 3_32_311,\ 332_31_5.$

- Разбиения 17 на части, не содержащие степени двух 1, 2, 4, 8, 16... (A101417):

17, 14 3, 12 5, 11 6, 11 3 3, 10 7, 953, 773, 755, 665, 6533, 53333.

- Разбиения 17 на части ≥ 4 (A008484):

17, 13 4, 12 5, 11 6, 10 7, 98, 944, 854, 764, 755, 665, 5444.

- Разбиения 17 на части $6k \pm 1$, то есть $1,5,7,11,13,17\ldots$ (A003105):

17, $13\ 1_4$, 11 5 1, $11\ 1_6$, 771_3, 755, 751_5, 71_{10}, 5_31_2, 5_21_7, 51_{12}, 1_{17}.

Также разбиения на нечётные части, где ни одна из частей не повторяется более 2 раз:

17, 15 1 1, 13 3 1, 11 3 3, 11 5 1, 971, 953, 773, 7721, 755, 75311, 55331.

Также разбиения на отличные части, конгруэнтные 1 и 2 (mod 3), то есть не кратные 3:

17, 16 1, 14 2 1, 13 4, 11 5 1, 11 4 2, 10 7, 10 6 1, 10 5 2, 872, 854, 7541.

- Разбиения 18 на нечётное число частей, наибольшая из которых равна 3 (A026923):

3_4321, 3_42_3, 3_421_4, $3_32_31_3$, 3_321_7, 332_51_2, 332_31_6, 3321_{10}, 32_71, 32_51_5, 32_31_9, 321_{13}.

- Разбиения 18, 19 на части $8k+1$ и $8k+4$, то есть 1, 4, 9, 12, 17... (A035450):

17 1, $12\ 4\ 1_2$, $12\ 1_6$, 99, 9441, 941_5, 91_9, 4_41_2, 4_31_6, 4_21_{10}, 41_{14}, 1_{18};

$17\ 1_2$, $12\ 4\ 1_3$, $12\ 1_7$, 991, 94411, 941_6, 91_{10}, 4_41_3, 4_31_7, 4_21_{11}, 41_{15}, 1_{19}.

- Разбиения 19 на части $7k+1$ и $7k+5$, то есть 1 , 5, 8, 12, 15, 19... (A035429):

19, $15\ 1_4$, 12 5, $12\ 1_7$, 881_3, 8551, 851_6, 81_{11}, 5_31_4, 5_21_9, 51_{14}, 1_{19}.

- Разбиения 19 на части $8k+1$ и $8k+3$, содержащие, по крайней мере, одну часть каждого типа (1, 9, 17...) и (3, 11, 19...) (A035680):

$11\ 3_2\ 1_2$, $11\ 3\ 1_5$, $11\ 1_8$, 93_31, 93_21_4, 931_7, 3_61, 3_51_4, 3_41_7, 3_31_{10}, 3_21_{13}, 31_{16}.

- Разбиения 20 на части, в которых квадрат наибольшей части равен сумме квадратов остальных частей (A098101):

10 10, 7631_4, 762_31, 75422, 74_31, 6521_7, 643221_3, 642_5, 63_3221, 53221_8, 52_51_5, 41_{16}.

- Разбиения 20 на нечётное число частей, наименьшая из которых равна 3 (A027189):

14 3 3, 13 4 3, 12 5 3, 11 6 3, 10 7 3, 983, 8543, 83_4, 743_3, 653_3, 55433, 54443.

- Разбиения 20 на простое число простых частей (A085755):

17 3, 13 7, 11 7 2, $11\ 3\ 2_3$, 772_3, 75332, 5_332, 732_5, 552_5, 53_32_3, 3_62.

- Разбиения 20 на "звериные" числа[5] (A067591) – числа, в двоичном представлении которых содержится чётное количество единиц (A001969): 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 17, 18, 20...

20, 17 3, 15 5, 12 5 3, 10 10, 10 5 5, 9 6 5, 9 5 3 3, 6 6 5 3, 6 5 3 3 3, 5 5 5 5, 5 3 3 3 3 3.

- Разбиения 21 на $5k$ и $5k+2$, то есть 2, 5, 7, 10, 12, 15, 17 (A035368):

17 2 2, $15\ 2_3$, 12 7 2, 12 5 2 2, 10 9 2, 10 7 2 2, $10\ 5\ 2_3$, 7_3, 7752, 75522, 5_32_3, 52_8.

- Разбиения 21 на части, меньшая из которых равна 4 (A026797):

17 4, 13 4 4, 12 5 4, 11 6 4, 10 7 4, 984, 9444, 8544, 7644, 7554, 6654, 54444.

- Разбиения 21, 22 и 23 на нечётные треугольные числа 1, 3, 15, 21 (A09919):

[5] http://mathworld.wolfram.com/EvilNumber.html.

21, $15\ 3_2$, $15\ 3\ 1_3$, $15\ 1_6$, 3_7, $3_6 1_3$, $3_5 1_6$, $3_4 1_9$, $3_3 1_{12}$, $3_2 1_{15}$, 31_{18}, 1_{21}.

$21\ 1$, $15\ 3_2\ 1$, $15\ 3\ 1_4$, $15\ 1_7$, $3_7 1$, $3_6 1_4$, $3_5 1_7$, $3_4 1_{10}$, $3_3 1_{13}$, $3_2 1_{16}$, 31_{19}, 1_{22}.

$21\ 1_2$, $15\ 3_2\ 1_2$, $15\ 3\ 1_5$, $15\ 1_8$, $3_7 1_2$, $3_6 1_5$, $3_5 1_8$, $3_4 1_{11}$, $3_3 1_{14}$, $3_2 1_{17}$, 31_{20}, 1_{23}.

- Разбиения 22 и 23 на части $5k+3$, $5k+4$: 3, 4, 8, 9, 13, 14, 18, 19, 23… (A035374):

19 3, 18 4, 14 8, 14 4 4, 13 9, 13 3 3 3, 994, 94333, 8833, 84433, $4_4 3_2$, 43_6;

23, 19 4, 14 9, 14 3 3 3, 13 4 3 3, 9833, 94433, 8843, 84443, 83_5, $4_5 3_1$, $4_2 3_5$.

- Разбиения 22, 23 на тетраэдрические числа 1, 4, 10, 20... (A068980):

$20\ 1_2$, $10\ 10\ 1_2$, $10\ 4_3$, $10\ 4_2\ 1_4$, $10\ 4\ 1_8$, $10\ 1_{12}$, $4_5 1_2$, $4_4 1_6$, $4_3 1_{10}$, $4_2 1_{14}$, 41_{18}, 1_{22};

$20\ 1_3$, $10\ 10\ 1_3$, $10\ 4_3 1$, $10\ 4_2\ 1_5$, $10\ 4\ 1_9$, $10\ 1_{13}$, $4_5 1_3$, $4_4 1_7$, $4_3 1_{11}$, $4_2 1_{15}$, 41_{19}, 1_{23}.

Тетраэдрическое или треугольно-пирамидальное число (A000292) – фигурное число, представляющее тетраэдр – пирамиду с треугольным основанием и тремя гранями

Тетраэдрическое число a_n равно сумме первых n треугольных чисел $n(n+1)(n+2)/6$.

- Разбиения 23 на различные части, меньшая из которых равна 3 (A026824):

20 3, 16 4 3, 14 6 3, 13 7 3, 12 8 3, 11 9 3, 11 5 4 3, 10 6 4 3, 9743, 9653, 8753.

- Разбиения 24 на различные части, являющиеся простыми или квадратами простых чисел 4, 9... (A111902):

19 5, 19 3 2, 17 7, 17 5 2, 17 4 3, 13 11, 13 9 2, 13 7 4, 13 5 4 2, 11 9 4, 11 7 4 2, 9 7 5 3.

- Разбиения 24 и 26 на части $6k+3$, $6k+4$: 3, 4, 9, 10, 15, 16, 21, 22… (A035387):

21 3, 16 4 4, 15 9, 15 3 3 3, 10 10 4, 10 4 4 3 3, 9933, 94443, 93_5, 4_6, $4_3 3_4$, 3_8;

22 4, 16 10, 16 4 3 3, 15 4 4 3, 10 9 4 3, $10\ 4_4$, $10\ 4\ 3_4$, 9944, 983_3, 9443_3, $4_5 3_2$, $4_2 3_6$.

- Разбиения 25 на треугольные числа $n(n+1)/2$ = 1, 3, 6, 10, 15, 21…, где каждая часть повторяется, по крайней мере, 2 раза (A161103):

$10\ 10\ 1_5$, $6_3 1_7$, 66331_7, $6633 1_4$, 661_{13}, $3_7 1_4$, $3_6 1_7$, $3_5 1_{10}$, $3_4 1_{13}$, $3_3 1_{16}$, $3_2 1_{19}$, 1_{25}.

- Разбиения 25 на части $5k$ и $5k+3$: 3, 5, 8, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 25.. (A035369):

25, 20 5, 15 10, 15 5 5, $13\ 3_4$, 10 10 5, $10\ 5_3$, $10\ 3_5$, 883_3, 853_4, 5_5, 553_5.

- Разбиения 25, 26 на различные нечётные части (A000700):

25, 21 3 1, 19 5 1, 17 7 1, 17 5 3, 15 9 1, 15 7 3, 13 11 1, 13 9 3, 13 7 5, 11 9 5, 9 7 5 3 1;

25 1, 23 3, 21 5, 19 7, 17 9, 17 5 3 1, 15 11, 15 7 3 1, 13 9 3 1, 13 7 5 1, 11 9 5 1, 11 7 5 3,

Также разбиения такие, что наибольшая часть k повторяется нечётное число раз, а каждая из остальных частей {1, 2, ..., $k-1$} – чётное число раз.

- Разбиения $3^3 = 27$ на две части, имеющие различные простые сигнатуры (A077563):

26 1, 25 2, 24 3, 23 4, 22 5, 20 7, 19 8, 18 9, 17 10, 16 11, 15 12, 14 13.

Простая сигнатура[6] числа n – отсортированный список ненулевых степеней α_k в его разложении (факторизации) на простые сомножители $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots$.

Так, пара чисел (21, 6) = (3·7, 2·3) имеет одинаковые сигнатуры–степени 1 1.

- Разбиения 27 на части вида $7k+2$, $7k+4$ (*2*,4,*9*,11,*16*,18,*23*,25...) с содержанием хотя бы одной части каждого вида (A035663):

25 2 2, 23 4, 18 9, 16 11, 11 $4_3 2_2$, 11 $4_2 2_4$, 11 4 2_6, 9 4_3, 94_42, 94_32_3, 94_22_4, 942_6.

- Разбиения 27 на части $7k+3$ и $7k+4$, то есть 3, 4, 10, 11, 17, 18, 24, 25... (A035435):

24 3, 18 3_3, 17 10, 17 4 3 3, 11 10 3 3, 11 4_4, 11 4 3_4, 10 10 4 3, 10 $4_2 3_3$, $4_6 3$, $4_3 3_5$, 3_9.

- Разбиения 28 на бриллиантовые числа (A078972) – полупростые числа (произведение двух простых) 4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 25, 35... , у которых простые сомножители имеют одинаковое количество десятичных цифр, (A114325):

15 9 4, $(14)_2$, 14 10 4, 14 6 4_2, $(10)_2$ 4_2, 10 9_2, 10 6_3, 10 6 4_3, 9964, $6_4 4$, $6_2 4_4$, 4_7.

- Разбиения 29 на части вида $7k+3$, $7k+5$: 3,5,10,12,17,19,24,26,31... (A035436):

26 3, 24 5, 19 10, 19 5 5, 17 12, 17 3_4, 12 12 5, 12 5 3_4, 10 10 3_3, 10 5 5 3_3, $5_4 3_3$, 53_8.

- Разбиения 29 на части вида $8k+2$, $8k+5$: 2,5,10,13,18,21,26,29… (A035456):

29, 21 8, 18 5 2_3, 13 10 2_3, 13 5 5 2_3, 13 2_8, 10_2 5 2 2, 10 5_3 2 2, 10 5 2_7, $5_5 2_2$, $5_3 2_7$, 52_{12}.

- Разбиения 29 на части, меньшая из которых равна 6 (A026799):

23 6, 17 6 6, 16 7 6, 15 8 6, 14 9 6, 13 10 6, 12 11 6, 11 6 6 6, 10 7 6 6, 9866, 9776, 8876.

- Разбиения 29, 31 на части $7k+3$ и $7k+5$, то есть 3, 5, 10, 12, 17, 19, 24, 26, 31... (A035436):

26 3, 24 5, 19 10, 19 5_2, 17 12, 17 3_4, 12 12 5, 12 5 3_4, 10 10 3_3, 10 5_2 3_3, $5_4 3_3$, 53_8;

31, 26 5, 19 12, 19 3_4, 17 5 3_3, 12 10 3_3, 12 5_2 3_3, 10 10 5 3_2, 10 5_3 3_2, 10 3_7, $5_5 3_2$, $5_2 3_7$.

- Разбиения 31, 32 и 34 на различные нечётные части, наибольшая из которых конгруэнтна 3 (mod 4), то есть 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31... (A027358):

31, 27 3 1, 23 7 1, 23 5 3, 19 11 1, 19 9 3, 19 7 5, 15 13 3, 15 11 5, 15 9 7, 15 7 5 3 1, 11 9 7 3 1;

31 1, 27 5, 23 9, 23 5 3 1, 19 13, 19 9 3 1, 19 7 5 1, 15 13 3 1, 15 11 5 1, 15 9 7 1, 15 9 5 3, 11 9 7 5;

31 3, 27 7, 23 11, 23 7 3 1, 19 15, 19 11 3 1, 19 9 5 1, 19 7 5 3, 15 13 5 1, 15 11 7 1, 15 11 5 3, 15 9 7 3.

- Разбиения 34 и 37 на части, равные 2 (mod 5): 2,7,12,17,22,27,32,37... (A109698):

32 2, 27 7, 22 12, 22 2_6, 17 17, 17 7 2_5, 12 12 2_5, 12 7 7 2_4, 12 2_{11}, $7_4 2_3$, $7_2 2_{10}$, 2_{17};

37, 27 2_5, 22 7 2_4, 17 12 2_4, 17 7 7 2_3, 17 2_{20}, 12 12 7 2_3, 12 7_3 2 2, 12 7 2_9, $7_5 2$, $7_3 2_8$, 72_{15}.

---

[6] http://mathworld.wolfram.com/PrimeSignature.html.

- Разбиения 12·3 = 36 на различные части, каждая из которых делит последующую часть (A184999):

36, 35 1, 34 2, 33 3, 32 4, 30 6, 30 5 1, 28 7 1, 27 9, 24 12, 24 8 4, 20 10 5 1.

- Разбиения $2^5–1 = 31$ и $p_{12} = 37$ на сумму двух простых и полупростого чисел (A133850):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
31	2 3 26	2 7 22	2 19 10	2 23 6	3 3 25	3 7 21	3 13 15	3 19 9	5 5 21	5 11 15	5 17 9	11 11 9
37	2 2 33	2 13 22	2 29 6	2 31 4	3 13 21	3 19 15	5 7 25	5 11 21	5 17 15	5 23 9	11 11 15	11 17 9

- Разбиения 38 на различные нечётные части, меньшая из которых конгруэнтна 3(mod 4), то есть 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35 (A027348):

35 3, 31 7, 27 11, 23 15, 23 7 5 3, 21 9 5 3, 19 11 5 3, 19 9 7 3, 17 13 5 3, 17 11 7 3, 15 13 7 3, 15 11 9 3.

- Разбиения 39 на целые степени разных простых чисел, кроме 1 и 2 (A035942):

31 5 3, 29 7 3, 5^2 11 3, 5^2 3^2 5, 23 13 3, 23 11 5, 23 3^2 7, 19 17 3, 19 13 7, 19 11 3^2, 17 13 3^2, 13 11 7 5 3.

- Разбиения 40 на различные простые числа (A000586):

37 3, 31 7 2, 29 11, 23 17, 23 7 5 3 2, 19 13 5 3, 19 11 7 3,

19 9 7 5, 19 9 7 3 2, 17 13 5 3 2, 17 11 7 3 2, 17 9 7 5 2.

- Максимально рафинированные разбиения 42 на отдельные (различные части) части (A179009). Рафинирование (очистка) означает, что ни одна из уже имеющихся частей разбиения не может быть разбита на части, отличные от существующих.

14 7654321, 13 8654321, 12 9654321, 12 8754321, 11 10 654321, 11 9754321,

10 8765321, 10 9764321, 98765421, 11 986431, 11 10 76521, 11 10 86421.

- Разбиения 44 на различные полупростые числа 4, 6, 9, 10, 14, 15, 21, 22, 25, 26, 33, 34, 35, 38, 39 (A112020):

38 6, 35 9, 34 10, 34 6 4, 26 14 4, 25 15 4, 25 10 9, 25 9 6 4, 21 14 9, 21 19 9 4, 15 14 9 6, 15 10 9 6 4.

- Разбиения 46 на различные простые части-числа в количестве простых чисел (A045450):

43 3, 41 5, 41 3 2, 37 7 2, 31 13 2, 29 17,

29 7 5 3 2, 23 13 5 3 2, 23 11 7 3 2, 19 17 5 3 2, 19 13 7 5 2, 17 13 11 3 2.

- Варианты представления числа $12·4+1 = 7^2$ в виде 3 простых чисел (A054860):

43 3 3, 41 5 3, 37 7 5, 31 13 5, 31 11 7, 29 17 3, 29 13 7, 23 23 3, 23 19 7, 23 13 13, 19 19 11, 19 17 13.

- Разбиения 50 на различные ненулевые числа Манкала (Калахари, A007952) 0, 1, 3, 5, 9, 11, 17, 21, 29, 33, 41, 47, 57, 59, 77... (A141272):

47 3,   41 9,   41 5 3 1,   33 17,   33 11 5 1,   33 9 5 3,   29 21,

29 17 3 1,   29 11 9 1,   21 17 11 1,   21 17 9 3,   21 17 11 1.

Числа Калахари образуются многократным просеиванием через "порожденное решето": удерживая первые n чисел, просеиваем каждое (n+1)-е.

0 1 3 5 ~~7~~ 9 11 ~~13~~ 15 17 ~~19~~ 21 23 ~~25~~ 27 29 ~~31~~ 33 35 ~~37~~ 39 41 ~~43~~ 45 47 ~~49~~ 51 53 ~~55~~ 57 59 ~~61~~ 63...
0 1 3 5 9 11 ~~15~~ 17 21 23 ~~27~~ 29 33 35 ~~39~~ 41 45 47 ~~51~~ 53 57 59 ~~63~~ 65 69 71 ~~75~~ 77 81 83 ~~87~~ 89...
0 1 3 5 9 11 17 21 ~~23~~ 29 33 35 41 ~~45~~ 47 53 57 59 ~~65~~ 69 71 77 81 ~~83~~ 89 93 95 101 ~~105~~ 107...
0 1 3 5 9 11 17 21 29 33 ~~35~~ 41 47 53 57 59 ~~69~~ 71 77 81 89 93 ~~95~~ 101 107 113 117 119 ~~129~~ 131...
0 1 3 5 9 11 17 21 29 33 41 47 ~~53~~ 57 59 71 77 81 89 ~~93~~ 101 107 113 117 119 131 ~~137~~ 141 149...

- Разбиения 58 на части, каждая из которых имеет с цифровой корень (многократное суммирование цифр) = 2 (A116372):

(2+...+2),   11+11+(2+...+2),   11+11+11+11+(2+...+2),   20+(2+...+2),   20+20+(2+...+2),

20+11+11+(2+...+2),   29+29,   29+11+(2+...+2),   38+20,   38+(2+...+2),   47+11,   56+2.

Аналогичное разбиение 65:

11+(2+...+2),   11+11+11+(2+...+2),   11+11+11+11+11+(2+...+2),   20+11+(2+...+2),

20+11+11+11+(2+...+2),   29+(2+...+2),   29+11+11+(2+...+2),   29+20+(2+...+2),

29+11+20+(2+...+2),   38+11+(2+...+2),   47+(2+...+2), 65.

- Разбиения 61 на различные нечётные части, наименьшая из которых – 7 (A027352):

45 9 7,   43 11 7,   41 13 7,   39 15 7,   37 17 7,   35 19 7,   33 21 7,   31 23 7,   29 25 7,

21 13 11 9 7,   19 15 11 9 7,   17 15 13 9 7.

- Разбиение 66 на части, конгруэнтные 5 (mod 6) (A109702):

41 5_5, 35 11 5_4, 29 17 5_4, 29 $(11)_2$ 5_3, $(23)_2$ 5_4, 23 17 11 5_3,

23 $(11)_3$ 5_2, $(17)_3 5_3$, $(17)_2$ $(11)_2$ 5_2, 17 $(11)_4$ 5, $(11)_5$ 5_2, 11 5_{11}.

- Разбиения 69 на различные нечётные части, наименьшая из которых – 9 (A027353):

49 11 9,   47 13 9,   45 15 9,   43 17 9,   41 19 9,   39 21 9,   37 23 9,   35 25 9,   33 27 9,   31 29 9,

21 15 13 11 9,   19 17 13 11 9.

- Существует наименьшее число 75, имеющее ровно **12** разбиений на неодинаковые части, большие 1, каждая из которых делится следующей частью (A184998):

75,   72 3,   70 5,   66 6 3,   63 9 3,   60 10 5,   60 12 3,   60 15,   54 18 3,   50 25,   48 24 3,   40 20 10 5.

Само же число 12 имеет 4 подобные разбиения: 12,   10 2,   9 3,   8 4.

- Разбиения $8n - 1 = 2^4 \cdot 12 - 1 = 191$ в виде суммы 7 нечётных квадратов (A130872):

191 = 169+9+9+1+1+1+1 = 121+25+9+9+9+9+9 = 121+25+25+9+9+1+1 = 121+49+9+9+1+1+1 =
= 81+25+25+25+25+9+1 = 81+49+25+9+9+9+9 = 81+49+25+25+9+1+1 = 81+49+49+9+1+1+1 =
= 81+81+9+9+9+1+1 = 81+81+25+1+1+1+1 = 49+49+25+25+25+9+9 = 49+49+49+25+9+9+1.

- Разбиения на 10 квадратов (A025434):

69

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9	16	16	16	25	25	25	36	36	36	36	49
9	9	16	16	9	16	25	4	9	16	25	9
9	9	9	16	9	9	9	4	9	4	1	4
9	9	4	9	9	4	4	4	9	4	1	1
9	9	4	4	9	4	1	4	1	4	1	1
9	4	4	4	4	4	1	4	1	1	1	1
9	4	4	1	1	4	1	4	1	1	1	1
4	4	4	1	1	1	1	4	1	1	1	1
1	4	4	1	1	1	1	4	1	1	1	1
1	1	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1

75

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9	16	16	25	25	25	25	36	36	36	36	49
9	16	16	9	16	16	25	9	16	16	25	9
9	9	16	9	9	16	9	9	4	16	4	4
9	9	9	9	4	9	4	9	4	1	4	4
9	9	4	9	4	4	4	4	4	1	1	4
9	9	4	4	4	1	4	4	4	1	1	1
9	4	4	4	4	1	1	1	4	1	1	1
4	1	4	4	4	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

78

16	16	16	25	25	25	25	36	36	36	36	49
16	16	16	9	16	16	25	9	16	16	25	9
9	16	16	9	9	16	9	9	4	16	4	4
9	9	16	9	4	9	4	9	4	4	4	4
9	4	9	9	4	4	4	4	4	1	4	4
9	4	1	4	4	4	4	4	4	1	1	4
4	4	1	4	4	1	4	4	4	1	1	1
4	4	1	4	4	1	1	1	4	1	1	1
1	4	1	4	4	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	1

80

9	16	16	25	25	25	25	36	36	36	36	49
9	16	16	9	16	16	25	9	16	25	36	9
9	9	16	9	9	16	9	9	9	9	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	4	4	1	4
9	9	9	9	4	9	4	9	4	1	1	4
9	9	4	9	4	1	4	4	4	1	1	1
9	9	4	4	4	1	1	1	4	1	1	1
9	1	4	4	4	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

83

16	16	25	25	25	25	36	36	36	36	36	49
16	16	9	16	16	25	9	16	16	25	36	9
9	16	9	9	16	9	9	9	16	9	4	9
9	9	9	9	9	9	9	4	9	4	1	4
9	9	9	4	9	4	9	4	1	4	1	4
9	4	9	4	4	4	4	4	1	1	1	4
9	4	4	4	1	4	4	4	1	1	1	1
4	4	4	4	1	1	1	4	1	1	1	1
1	4	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	4	1	1	1	1	1	1	1	1

86

16	16	16	25	25	25	36	36	36	36	36	49
16	16	16	9	16	25	9	16	16	25	36	9
9	16	16	9	16	9	9	9	16	9	4	9
9	9	16	9	9	9	9	4	9	4	4	4
9	9	9	9	9	4	9	4	4	4	1	4
9	4	9	9	4	4	4	4	1	4	1	4
9	4	1	4	4	4	4	4	1	1	1	4
4	4	1	4	1	4	4	4	1	1	1	1
4	4	1	4	1	1	1	4	1	1	1	1
1	4	1	4	1	1	1	1	1	1	1	1

- Разбиения n на различные части $\geq k$:

k, n = 2, 14 (A025147): 14, 12 2, 11 3, 10 4, 95, 932, 86, 842, 752, 743, 732, 653;

k, n = 3, 17 (A025148): 17, 14 3, 13 4, 12 5, 11 6, 10 7, 10 4 3, 98, 953, 863, 854, 764;

k, n = 4, 20 (A025149): 20, 16 4, 15 5, 14 6, 13 7, 12 8, 11 9, 11 5 4, 10 6 4, 974, 965, 875;

k, n = 6, 25 (A025151): 25, 19 6, 18 7, 17 8, 16 9, 15 10, 14 11, 13 12, 12 7 6, 11 8 6, 10 9 6, 10 8 7;

k, n = 7, 28 (A025152): 28, 21 7, 20 8, 19 9, 18 10, 17 11, 16 12, 15 13, 13 8 7, 12 9 7, 11 10 7, 11 9 8;

k, n = 9, 33 (A025154): 33, 24 9, 23 10, 22 11, 21 12, 20 13, 19 14, 18 15, 17 16, 14 10 9, 13 11 9, 12 11 10.

- Разбиения n на различные части, наименьшая из которых равна k:

k, n = 1, 15 (A096765): 14 1, 12 2 1, 11 3 1, 10 4 1, 951, 9321, 861, 8421, 7521, 7431, 6531, 54321;

k, n = 2, 19 (A096749): 17 2, 14 3 2, 13 4 2, 12 5 2, 11 6 2, 10 7 2, 10 4 3 2, 982, 9532, 8632, 8542, 7642;

k, n = 3, 23 (A026824): 20 3, 16 4 3, 15 5 3, 14 6 3, 13 7 3, 12 8 3, 11 9 3, 11 543, 10 643, 9743, 9653, 8753;

$k, n = 5, 30$ (A026826): 25 5, 19 6 5, 18 7 5, 17 8 5, 16 9 5, 15 10 5, 14 11 5, 13 12 5, 12 765, 11 865, 10 965, 10 875;

$k, n = 6, 34$ (A026827); $k, n = 8, 41$ (A026829); $k, n = 8, 45$ (A026830).

- Количество разбиений подмножества чисел $\{1 \div n\}$ на триплеты $[a, b, a+b]$ так, чтобы последнее число $n = 10$ находилось в одном из триплетов (A002848):

[1, 4, 5], [2, 6, 8], [3, 7, 10]	[1, 4, 5], [3, 6, 9], [2, 8, 10]	[1, 5, 6], [3, 4, 7], [2, 8, 10]
[1, 6, 7], [4, 5, 9], [2, 8, 10]	[1, 7, 8], [2, 3, 5], [4, 6, 10]	[1, 8, 9], [2, 3, 5], [4, 6, 10]
[1, 8, 9], [2, 4, 6], [3, 7, 10]	[1, 8, 9], [2, 5, 7], [4, 6, 10]	[2, 4, 6], [3, 5, 8], [1, 9, 10]
[2, 6, 8], [3, 4, 7], [1, 9, 10]	[2, 6, 8], [4, 5, 9], [3, 7, 10]	[2, 7, 9], [3, 5, 8], [4, 6, 10]

- Разбиения простого p_n на сумму двух полупростых чисел (A172366):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_{55} = 257$	4 253	10 247	22 235	38 219	39 218	51 206	55 202	74 183	91 166	111 146	115 142	123 134
$p_{57} = 269$	4 265	10 259	15 254	22 247	34 235	51 218	55 214	82 187	86 183	91 178	111 158	123 146
$p_{59} = 277$	10 267	15 262	51 226	58 219	62 215	74 203	94 183	111 166	118 159	119 158	122 155	134 143

Ряд замечательных свойств числа 12 проявляются не только в разнообразии самих разбиений отдельно взятых чисел.

Возможны и другие подходящие признаки.

Например, в виде суммирования тех или иных однотипных свойств.

Вот, например, некоторые подобные представления:

- Суммарное количество всех разбиений для каждого из начальных чисел (0, 1, 2, 3, 4): $1+1+2+3+5 =$ **12** [1].

- Общее количество разбиений чисел от 1 до 6 на треугольные числа (A185976):

1, 11, (3, 111), (31, 1111), (311, 11111), (6, 33, 3111, 111111).

- Общее количество частей в разбиениях 16 на разные нечётные части (A079499):

15+1 = 13+3 = 11+5 = 9+7 = 7+5+3+1.

- Сумма наибольших частей во всех разбиениях 6 на нечетные части (A092322):

$6 \Rightarrow 51, 33, 3111, 111111 \Rightarrow 5+3+3+1 =$ **12**.

- Сумма разностей между наибольшей и наименьшей частями во всех разбиениях 7, которые не содержат одинаковых частей (A117455):

$7, 61, 52, 43, 421 \Rightarrow (7-7)+(6-1)+(5-2)+(4-3)+(4-1) =$ **12**.

- Сумма наибольших частей в разбиениях четвёрки (A097979): $\underline{4}$, $\underline{3}$+1, $\underline{2}$+2, $\underline{2}$+1+1, $\underline{1}$+1+1+1 равна **12**.

- Сумма наименьших частей во всех композициях четвёрки (A097939): $\underline{4}$, 3+$\underline{1}$, $\underline{1}$+3, $\underline{2}$+2, 2+1+$\underline{1}$, $\underline{1}$+2+1, $\underline{1}$+1+2, $\underline{1}$+1+1+1 равна **12**.

- Сумма наибольших частей во всех разбиениях 7 на нечётные части (A092311):

511, 331, 31_4, 1_7. Сумма равна 5+3+3+1 = **12**.

- Суммарное количество всех частей в разбиениях 9 на простые части (A084993):

72, 522, 333, 3222.

- Количество пятёрок во всех разбиениях 11 (A024789):

6**5**, **55**1, **5**42, **5**411, **5**33, **5**321, **5**3111, **5**222, **5**2211, **5**21111, **5**111111.

- Суммарное количество всех частей в разбиениях 16 или 18 только на нечётные части (A079499):

15 1, 13 3, 11 5, 9 7, 9 3 3 1; 17 1, 15 3, 13 5, 11 7, 11 3 3 1.

- Суммарное количество всех частей в разбиениях 21 или 24 только на нечётные различные части (A024938):

19 2, 13 5 3, 11 7 3, 11 5 3 2;

19 3 2, 19 5, 17 7, 17 5 2, 13 11.

Некоторые задачи на разбиения тесно переплетаются с геометрическими задачами, например:

- Количество четырехугольников (с целочисленными сторонами), которые могут быть сформированы с периметром 14 (A062890), равно **12**.

Другими словами, разбиение числа 14 на четыре части так, что сумма любых трех больше чем четвертая часть:

6611, 6521, 6431, 6422, 6332, 5531, 5522, 5441, 5432, 5333, 4442, 4433.

- Количество шестиугольников (с целочисленными сторонами), которые могут быть сформированы с периметром 13 (A069907), также равно **12**.

Иначе говоря, разбиение числа 13 на шесть частей так, что сумма любых пяти больше чем шестая часть:

631_4, 6221_3, 541_4, 5321_3, 52_311, 4421_3, 4331_3, 432211, 42_41, 333211, 332_31, 32_5.

- Число $225=15^2$ имеет в точности **12** разбиений на разные квадраты (A030273):

$$225 = 15^2 = 12^2 + 9^2 = 11^2 + 10^2 + 2^2 = 14^2 + 5^2 + 2^2 = 10^2 + 8^2 + 6^2 + 5^2 = 11^2 + 8^2 + 6^2 + 2^2 =$$
$$= 12^2 + 8^2 + 4^2 + 1^2 = 13^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2 = 14^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 = 10^2 + 8^2 + 6^2 + 4^2 + 3^2 =$$
$$= 12^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 2^2 = 11^2 + 7^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2.$$

Есть и другие числа, которые раскладываются на сумму разных квадратов 12-ю способами: 174, 194, 214, 225, 244, 248, 265, 268, 281, 297. Но полный квадрат 15^2 – из них единственный.

• Каждое число n имеет несколько разбиений на различные части. Для одного из таких разбиений произведение соответствующих частей $P(n)$ будет максимальным.

Оно связано с треугольными числами T_m и определяется по формуле [4]:

$$P(n)=\left\{\frac{(m+1)!}{m-k},\ k<m-1;\quad \frac{m+2}{2}m!,\ k=m-1;\quad (m+1)!,\ k=m\right\},$$

где $m=\left\lceil\left(\sqrt{1+8n}-1\right)/2\right\rceil$ – номер ближайшего к n треугольного числа $T_m=m(m+1)/2\le n$.

В частности (A034893), для $n = 7 = 4 + 3$ величина $P(n) = 3\cdot 4 = \mathbf{12}$.

Но для нас более примечательно другое: начиная с $n = \mathbf{12}$, все числа $P(n)$ кратны **12**.

продолжение следует…

Литература:

1. *Василенко С.Л.* Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства. Ч. 1. Теория чисел // Академия Тринитаризма.

2. *Эндрюс Г.* Теория разбиений: Пер. с англ. – М.: Наука: Главфизматлит, 1982. – 256 с.

3. *Bomfim W.* Star-like trees of 7 edges and correspondent partitions. – 2011. – http://oeis.org/wiki/File:Figura1.png.

4. *Doslic T.* Maximum product over partitions into distinct parts // Journal of Integer Sequences. – 2005. – Vol. 8. – Article 05.5.8. – http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL8/Doslic/doslic15.pdf.

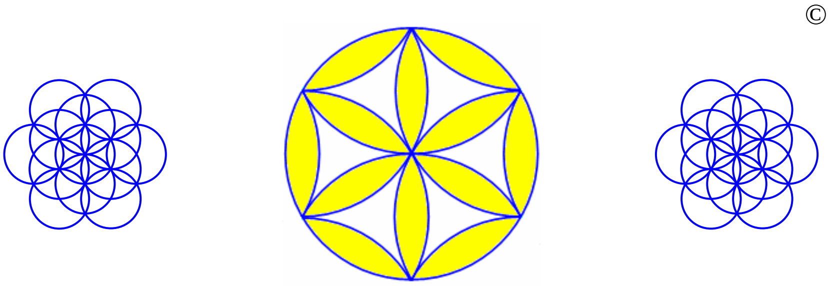


Таблица 1

Примерные разбиения натуральных чисел n в количество точно 12 шт.

n	Вид (форма) разбиений	№ ряда
13	Формы $4k$+1 и $4k$+3; наличие обоих типов	A035625
13	Формы $8k$+1 и $8k$+2	A035448
13	Различные части, каждая из которых появляется ≤ 4 раза Также формы {1,3,7,9} (mod 10)	A096938
14	Нечётные части; наибольшая = 4	A026924
14	Формы $7k$+1 и $7k$+2; наличие обоих типов	A035657
15	Формы {1,5,6} (mod 8)	A108932
15	Простые Чена[7]	A112021
15	Формы $7k$+1 и $7k$+3	A035397
16	Степени других целых чисел 1, 4, 8, 9, 16...	A078635
16	Формы $7k$+1 и $7k$+4	A035398
17	Формы $5k$+1 и $5k$+4; наличие обоих типов	A035633
17	Формы $6k$±1 Нечётные части; число каждой части ≤ 2	A003105
18	Формы $6k$+1 и $6k$+4; наличие обоих типов	A035644

[7] Простое число p – простое Чена, если p+2 – тоже простое или полупростое (произведение двух простых). http://mathworld.wolfram.com/ChenPrime.html.

19	ЦБК[8], каждая часть повторяется ≥ 3 раз	A161242
20	Квадраты чисел Также: число частей, равных k, кратно k для всех k	A001156
20	Формы $7k+2$ и $7k+3$	A035431
20	Формы $7k+1$ и $7k+6$	A035430
20	Формы 1 (mod 4)	A035451
20	Нет форм $4k+2,\ 8k,\ 8k \pm 1$	A036015
20,21	ЦМЧ[9], каждая часть повторяется ≥ 3 раз	A161256
21	Нечётные части ≥ 3	A087897
21	Различные части p_k такие, что если $k! = j$, то $\lvert p_k - p_j \rvert \geq 5$	A025159
21	Формы $6k+1$ и $6k+5$; наличие обоих типов	A035645
22	Формы $7k+1$ и $7k+5$; наличие обоих типов	A035660
22	Формы $8k+1$ и $8k+6$	A035452
23	Числа Каталана[10]; каждая часть повторяется ≥ 3 раз	A161228
23	Формы $8k+1$ и $8k+7$	A035453
23	Формы $8k+1$ и $8k+5$; наличие обоих типов	A035682
23	Формы $7k+2$ и $7k+3$; наличие обоих типов	A035662
24	Нечётные части; наименьшая = 4	A027190
24,25	Формы 1 (mod 5)	A109697
24,26	Формы $6k+3$ и $6k+4$	A035387
25	Различные нечётные части	A069911
25	Простые числа ≥ 3	A099773
25	Различные части ≥ 6	A025151
25	Формы $7k+2$ и $7k+5$	A035433
25	Формы $7k+1$ и $7k+6$; наличие обоих типов	A035661
25,26	Формы $8k+1$ и $8k+6$; наличие обоих типов	A035683
25,26	Каждая часть повторяется ≥ 5 раз	A160975
26	Числа Люка; каждая часть повторяется ≥ 5 раз	A161271
26,27	Различные части такие, что $3u < v$ для всех пар $(u < v)$	A132011
27,28	Формы {1,9,11} (mod 14)	A116458
28	Различные части ≥ 7	A025152
28	Различные части p_k такие, что если $k! = j$, то $\lvert p_k - p_j \rvert \geq 8$	A025162
28	Формы $7k+2$ и $7k+6$; наличие обоих типов	A035665
28÷30	Формы 1 (mod 6)	A109701
29	Формы $8k+1$ и $8k+7$; наличие обоих типов	A035684
29÷31	10 квадратов	A025425
30	Различные части, меньшая из которых = 5	A026826
31	Два простых и одно полупростое число	A133850
31	Различные нечётные бесквадратные[11] числа Также различные части m, если $2m$ – бесквадратное	A134337

[8] Центральные биномиальные коэффициенты – число сочетаний из $2n$ по n: 1, 2, 3, 6, 10, 20, 35, 70... Числа располагаются в треугольнике Паскаля в точности посередине чётных рядов. – http://en.wikipedia.org/wiki/Central_binomial_coefficient.

[9] Центральные многоугольные числа – обозначают максимальное число кусков круга (блина, пиццы), который можно образовать рядом прямых разрезаний. Они равны треугольным числам плюс единица $n(n+1)/2 + 1$: 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22... – http://en.wikipedia.org/wiki/Central_polygonal_numbers.

[10] n-е число Каталана – количество разбиений выпуклого $(n+2)$-угольника на треугольники непересекающимися диагоналями, или количество способов соединения $2n$ точек на окружности n непересекающимися хордами. – http://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_numbers.

[11] Числа, которые не делятся ни на один квадрат. – http://en.wikipedia.org/wiki/Square-free_integer.

32,33	Числа Каталана; каждая часть повторяется ≥ 5 раз	A161230
32,34	9 квадратов	A025424
32÷35	Формы 1 (mod 7)	A109703
33	Формы $7k+4$ и $7k+5$	A035438
33	Различные нечётные части, наименьшая = 1 Наибольшая часть – 1 раз, остальные – чётное число повторений	A027349
33	Различные части ≥ 9	A025154
34	ЦБК, каждая часть повторяется ≥ 7 раз	A161246
34	Различные части, меньшая из которых = 6	A026827
34	Числа не делятся на 4 и повторяются ≥ 7 раз	A161298
34	Числа Фибоначчи; каждая часть повторяется ≥ 7 раз	A161031
34	Числа Люка; каждая часть повторяется ≥ 7 раз	A161273
34	Простые числа, включая 1; каждая часть повторяется ≥ 7 раз	A161082
34÷42	Различные части такие, что $u^2 < v$ для всех пар $(u < v)$	A132015
35	Две отличные от квадратов части	A172151
36	Различные части ≥ 10	A025155
36	Формы $7k+5$ и $7k+6$	A035440
36	Наименьшая часть равна 8	A026801
36,39	42,43,46,54,71. Различные части, каждая часть делит последующую	A122651
37	Числа Каталана; каждая часть повторяется ≥ 6 раз	A161231
40	Формы $7k+4$ и $7k+6$; наличие обоих типов	A035670
40	Наименьшая часть равна 9	A026802
40	Различные простые Чена	A112022
40,41	Формы $8k+5$ и $8k+6$	A035466
40÷45	Части с цифровым корнем[12] =1; $\mathrm{dr}(n) = 1 + (n-1)(\mathrm{mod}\ 9)$	A116371
41	Различные части, меньшая из которых = 8	A026829
41	Числа Каталана; каждая часть повторяется ≥ 7 раз	A161232
42,43	Формы $8k+6$ и $8k+7$	A035468
44,45	Числа не делятся на 4 и повторяются ≥ 10 раз	A161301
44,45	Числа Фибоначчи; каждая часть повторяется ≥ 10 раз	A161034
45	Числа Люка; каждая часть повторяется ≥ 10 раз	A161276
44,45	Простые числа, включая 1; каждая часть повторяется ≥ 10 раз	A161085
44,45	ЦБК, каждая часть повторяется ≥ 10 раз	A161249
44,46	Треугольные числа; каждая часть повторяется ≥ 5 раз	A161106
45	Различные части, наименьшая = 9,	A026830
45	Каждая часть повторяется ≥ 10 раз	A160980
48	Различные части такие, что $5u < v$ для всех пар $(u < v)$	A147583
48,49	Нечётное число частей, наибольшая = 2	A026922
48,51	Числа Каталана; каждая часть повторяется ≥ 10 раз	A161235
48,51	Числа Люка; каждая часть повторяется ≥ 12 раз	A161278
49	Каждая часть повторяется ≥ 11 раз	A160981
49	Числа не делятся на 4 и повторяются ≥ 11 раз	A161301
49	Числа Фибоначчи; каждая часть повторяется ≥ 11 раз	A161035
49	Числа Люка; каждая часть повторяется ≥ 11 раз	A161277
49	ЦБК, каждая часть повторяется ≥ 11 раз	A161250
49	Простые числа, включая 1; часть частей повторяется ≥ 11 раз	A161086
49,50	Треугольные числа; каждая часть повторяется ≥ 6 раз	A161107
49,50	3 части, образующие стороны равнобедренного треугольника	A059169

[12] http://en.wikipedia.org/wiki/Digital_Root.

49÷51	Нечётные части; каждая часть повторяется ≥ 7 раз	A161043
50	Чётное количество различных простых чисел	A184171
50	Формы 4 (mod 5)	A109700
50,51	Различные простые ≥ 3	A024939
51,52	Нечётное количество различных простых чисел	A184172
51	Каждая часть повторяется ≥ 12 раз	A160982
51,53	Числа Фибоначчи; каждая часть повторяется ≥ 12 раз	A161036
52	Формы $8k+6$ и $8k+7$; наличие обоих типов	A035699
52,53	Нечётные квадраты	A167661
52,53	Числа Каталана; каждая часть повторяется ≥ 11 раз	A161236
52,54	Числа не делятся на 3 и повторяются ≥ 12 раз	A161290
54,55	Нечётные части; каждая часть повторяется ≥ 8 раз	A161044
54,55	Числа Люка; каждая часть повторяется ≥ 13 раз	A161279
54,55	Кубы чисел	A003108
54,57	Числа Каталана; каждая часть повторяется ≥ 12 раз	A161237
54,57	ЦМЧ, каждая часть повторяется ≥ 12 раз	A161265
58,59	ЦМЧ, каждая часть повторяется ≥ 13 раз	A161266
58,59	Числа не делятся на 3 и повторяются ≥ 13 раз	A161291
59,61	Треугольные числа; каждая часть повторяется ≥ 8 раз	A161109
60,63	Числа Каталана; каждая часть повторяется ≥ 14 раз	A161239
62	Каждая часть повторяется ≥ 15 раз	A160985
73	Каждая часть повторяется ≥ 18 раз	A160988
73,74	Квадраты чисел; каждая часть повторяется ≥ 7 раз	A161095
73,74	Формы 6 (mod 7)	A109708
74,76	Треугольные числа; каждая часть повторяется ≥ 11 раз	A161112
75	Каждая часть повторяется ≥ 19 раз	A160989
79,80	Треугольные числа; каждая часть повторяется ≥ 12 раз	A161113
81÷83	Треугольные числа; каждая часть повторяется ≥ 13 раз	A161114
97,98	Квадраты чисел; каждая часть повторяется ≥ 11 раз	A161099
102,103	Квадраты чисел; каждая часть повторяется ≥ 12 раз	A161100