В.П. Шенягин

Нуль (ноль): число, функция, образ, проявление и систематизация

Начнем с начала …, начнем с нуля

$$0+0=0\cdot 0=0^0=0$$

Содержание

Введение

Нуль – как зеркало: взаимодействуя со всеми, никогда не показывает себя

Наблюдение автора

Примечание:

«взаимодействует со всеми», т.е. с числами и иными математическими понятиями, по-особому проявляя себя с бесконечностью, единицей, числом *e* и минус единицей

Актуальность нуля

Большинство отраслей науки и техники предполагает знание предельных значений параметров. Математический аппарат в этой части опирается и на соотношения нуля с другими предельными значениями, что диктует необходимость систематизации его проявлений.

Настоящей роли нуля математики не знали долго.

Более того, история не располагает достоверными данными, где и когда он появился впервые.

Нуль, возможно, является индийским изобретением, математики которого работали над введением нуля в свою систему счисления на протяжении 500 лет, начиная с Брахмагупты в VII веке.

Считают [1, с. 109], что «изобретение девяти первых цифр (в десятичной позиционной системе счисления – *добавлено В.Ш.*) с точки зрения науки является второстепенным фактом при соотнесении с изобретением нуля».

Главная задача состояла в подчинении нуля основным арифметическим операциям. Впрочем, эта задача является актуальной, но во многом нерешенной и поныне, особенно в алгебраических действиях.

Неуловимый нуль

Как констатируют Дж. Дж. О'Коннор и Е.Ф. Робертсон в «Истории нуля» «Ноль таинственно появлялся, только чтобы исчезнуть вновь, кажется, как будто все математики, которые вели его поиски, все же не осознавали его фундаментальную важность, даже если и чувствовали ее».

Нуль по сравнению со всеми числами в своем проявлении ведет себя необычно, неочевидно и даже парадоксально. При этом в предельных отношениях он часто связан с единицей и бесконечностью, а также с числом *e* и минус единицей.

Некоторые числовые соотношения с использованием нуля, не нарушающие строгих доказательств, приняты математиками в качестве аксиом. Поэтому нуль занимает особое место в аксиоматическом способе поиска и определения значений, особенно экстремальных, в отображении действительности и выражении мнимого.

Однако формул с участием нуля в предельных отношениях весьма немного. При этом не д***о***лжно быть, чтобы такой важности число, как нуль, было лишено многих стандартных математических действий над числами, среди которых арифметические (сложение, вычитание, умножение и деление) и алгебраические (возведение в степень, извлечение корня и нахождение логарифма).

Частично восполним данный пробел, по-иному взглянув на правила и аксиомы, например, запрещающие деление на нуль, а также на соотношения, признанные неопределенностями вида $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, 0^0, ∞^0 с целью раскрытия некоторых из них, отчасти нестрого.

Именно нестрогого раскрытия, поскольку, согласно Википедии, «раскрытие неопределенностей — это методы вычисления пределов функций, заданных формулами, которые в результате формальной подстановки в них предельных значений аргумента теряют смысл, то есть переходят в выражения …, по которым невозможно судить о том, существуют или нет искомые пределы, не говоря уже о нахождении их значений, если они существуют».

Ранее известные формулы (как теоремы, так и аксиомы), а также рассмотренные, вероятно, впервые, изложим системно.

Принято считать, что существуют два способа использования нуля:

– нуль – индикатор пустого места в разрядной системе счисления. Так, при записи числа 2010 нуль используется для того, чтобы 2 и 1 стояли в нужных разрядах;

– нуль используется как число само по себе.

Но нуль также следует воспринимать и как функцию (нулевую функцию).

Более того, нуль целесообразно воспринимать и как образ, особенно в философской системе взглядов, с философской точки зрения, как знак.

При этом в каждом из случаев существуют различные аспекты его проявлений: концепция, понятие, наименование.

Нуль как число

Сложение

1. При сложении с нулем число не меняется:

$$a + 0 = a. \tag{1}$$

Нуль нейтрален в операции сложения.

Вычитание

2. При вычитании нуля число не меняется:

$$a-0=a. \tag{2}$$

Нуль нейтрален в операции вычитания.

Умножение

3. Нуль, умноженный на любое число, включая нуль, есть нуль:

$$0\cdot a=0. \tag{3}$$

$$0\cdot 0=0. \tag{4}$$

4. Нуль, умноженный на бесконечность, есть единица:

$$0\cdot\infty=1. \tag{5}$$

В [1, с. 80] это воспринимается в качестве математической демонстрации.

Впрочем, принято считать (см. Википедию), что $0\cdot\infty$ есть неопределенность.

5. Факториал нуля есть единица:

$$0!=1. \tag{6}$$

Деление

6. Нуль является целым числом и делится на все натуральные числа:

$$\frac{0}{a}=0. \tag{7}$$

Перед последующим изложением материала станет уместным, казалось бы не к месту, следующий эпиграф:

> Чтобы найти истину, каждый должен хоть раз в жизни
> освободиться от усвоенных им представлений
> и совершенно заново построить систему своих взглядов
> *Р. Декарт*

7. Утверждение 1. *Делить на нуль нельзя, за исключением деления* 1 *и* ∞*, причем бесконечности в любой степени.* (Δ1)

Здесь и далее с использованием символа Δ нумеруются утверждения, предлагаемые автором.

Забегая вперед, отметим, что

$$\frac{1}{0}=\infty, \tag{8}$$

$$\frac{\infty^0}{0}=\infty,\ \frac{\infty}{0}=\infty^2,\ \frac{\infty^2}{0}=\infty^3,\ \ldots, \tag{9}$$

хотя общепринято считать, что делить на нуль нельзя вовсе, поэтому, якобы, даже $\frac{1}{0}\neq\infty$, а неопределенность вида $\frac{0}{0}$ раскрывается, например, по правилу Лопиталя.

Покажем, что традиционное утверждение «делить на нуль нельзя» неполное и расширим его до утверждения 1 ($\Delta 1$) с использованием формул (8), (9), (10), впрочем, нестрого.

Выражению (5) соответствует бесспорное соотношение

$$\frac{1}{\infty}=0 \text{ или, точнее, } \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\,.$$

Но выражению (5) соответствует и не принимаемое пока соотношение (8) $\frac{1}{0}=\infty$.

8. Утверждение 2. *Единица, деленная на нуль, обращается в бесконечность*:

$$\frac{1}{0}=\infty\,. \qquad (\Delta 2)$$

9. Утверждение 3. *Бесконечность, деленная на нуль, дает бесконечность в квадрате*:

$$\frac{\infty}{0}=\infty^2\,. \qquad (\Delta 3) \quad (10)$$

С учетом ($\Delta 1$) и ($\Delta 2$)

$$\frac{\infty}{0}=\frac{\frac{1}{0}}{0}=\frac{1}{0}:0=\frac{1}{0}\cdot\frac{1}{0}=\left(\frac{1}{0}\right)^2=\infty^2\,.$$

Формула ($\Delta 3$), (10) в какой-то мере, не исключая шуточную по С.А. Алферову, эквивалентна его выражению $\infty:\frac{0}{0}=\infty^2$, приведенному в работе [2], при $\frac{0}{0}=0$. Однако, не хочется переводить (11) в шутку, считая дальнейшие рассуждения и выкладки пусть не вполне, но в меру состоятельными.

Действительно, бесконечность характеризует запредельную величину, и эту парадигму распространяют на любую неограниченную по величине систему, не обращая внимания на ее мерность.

Проведя такое разграничение, т.е. *разграничение по мерности*, следует признать, что одномерное пространство, например прямая линия, станет характеризоваться величиной ∞, например протяженностью в метрических единицах измерения, скажем, в метрах.

Тогда следует записать ∞ м, как величину, так и размерность.

Переходя к двумерному пространству, т.е. плоскости, рассмотрим бесконечный квадрат со сторонами протяженностью по ∞ количеству метров каждой.

Откуда следует, что его площадь, как величина и размерность, определится следующим образом:

$$\infty\text{ м}\cdot\infty\text{ м}=(\infty\text{ м})^2=\infty^2\text{ м}^2\,. \qquad (11)$$

Здесь следует вспомнить высказывание К.Ф. Гаусса (1831 г.): «Я возражаю против использования бесконечных величин как чего-то завершенного, это не допустимо в математике. Бесконечность – это всего лишь речевой оборот, реальное значение которого – предел, к которому неограниченно приближаются определенные отношения, в то время как другим позволено бесконечно увеличиваться».

Поэтому бесконечность, обозначаемая как ∞ и как речевой оборот, не является наибольшей предельной завершенной величиной. Отсюда величину ∞^2 следует признать состоятельной и корректной (математически и образно), впрочем, как ниже и ∞^3, как и более того.

Как здесь не вспомнить фразу Аристотеля о том, что «в бесконечности нет разницы между возможностью и существованием».

10. Утверждение 4. *Бесконечность в квадрате, деленная на нуль, дает бесконечность в кубе*:

$$\frac{\infty^2}{0} = \infty^3. \qquad (\Delta 4) \qquad (12)$$

Аналогично вышеизложенному

$$\frac{\infty^2}{0} = \frac{\left(\frac{1}{0}\right)^2}{0} = \left(\frac{1}{0}\right)^2 : 0 = \left(\frac{1}{0}\right)^2 \cdot \frac{1}{0} = \left(\frac{1}{0}\right)^3 = \infty^3.$$

Такое решение корректнее записи

$$\frac{\infty^2}{0} = \frac{\left(\frac{1}{0}\right)^2}{0} = \frac{1}{0 \cdot 0 \cdot 0} = \frac{1}{0^3} = \left(\frac{1}{0}\right)^3 = \infty^3,$$

поскольку сохраняет размерность как в знаменателе, так и в числителе.

Перейдем к трехмерному пространству, т.е. объему, и рассмотрим бесконечный куб со сторонами протяженностью по ∞ количеству метров каждой.

Откуда следует, что его объем, как величина и размерность, определится следующим образом

$$\infty\ \text{м} \cdot \infty\ \text{м} \cdot \infty\ \text{м} = (\infty\ \text{м})^3 = \infty^3\ \text{м}^3. \qquad (13)$$

Поэтому величину ∞^3, имеющую соответствующую размерность, также логично признать состоятельной.

11. Утверждение 5. *Бесконечность в n-ой степени, деленная на нуль, дает бесконечность в степени n+1*:

$$\frac{\infty^n}{0} = \infty^{n+1}. \qquad (\Delta 5) \qquad (14)$$

Однако (15) в части визуального представления менее очевидно и практически обычно будет заканчиваться третьей степенью.

12. Утверждение 6. *Бесконечность в нулевой степени, деленная на нуль, есть бесконечность*:

$$\frac{\infty^0}{0} = \infty. \qquad (\Delta 6) \qquad (15)$$

Сравнение (Δ2) $\frac{1}{0} = \infty$ и (Δ8) $\frac{\infty^0}{0} = \infty$ приводит к формуле:

$$\infty^0 = 1, \qquad (16)$$

что не противоречит (21).

В результате (15), (11), (13), (14) составляют ряд:

$$\frac{\infty^0}{0} = \infty,\ \frac{\infty}{0} = \infty^2,\ \frac{\infty^2}{0} = \infty^3,\ ...,\ \frac{\infty^n}{0} = \infty^{n+1} \qquad (17)$$

Ряд (17) эквивалентен последовательности:

$$\frac{1}{0} = \infty,\ \frac{1}{0^2} = \infty^2,\ \frac{1}{0^3} = \infty^3,\ \ldots,\ \frac{1}{0^n} = \infty^n, \qquad (18)$$

$$\frac{1}{0}=\infty,\ \left(\frac{1}{0}\right)^2=\infty^2,\ \left(\frac{1}{0}\right)^3=\infty^3,\ \ldots,\ \left(\frac{1}{0}\right)^n=\infty^n.$$

Ряд (17) также эквивалентен системе:

$$\begin{aligned}&0\cdot\infty=\infty^0=1;\\&0\cdot\infty^2=(0\cdot\infty)\cdot\infty=1\cdot\infty=\infty;\\&0\cdot\infty^3=(0\cdot\infty)\cdot\infty^2=1\cdot\infty^2=\infty^2;\\&\ldots;\\&0\cdot\infty^{n+1}=(0\cdot\infty)\cdot\infty^n=1\cdot\infty^n=\infty^n.\end{aligned} \tag{19}$$

Отсюда следует утверждение.

13. Утверждение 7. *Нуль при умножении на бесконечность в степени снижает ее степень на одну*. (Δ7)

Систему (19) и утверждение (Δ7) геометрически можно трактовать следующим образом. Линия бесконечной длины, умноженная на нуль, превращается в сингулярную точку как нечто целое, воспринимаемое как единица. Квадрат со сторонами бесконечной длины, умноженный на нуль, превращается в линию бесконечной длины. Куб со сторонами бесконечной длины, умноженный на нуль, становится бесконечным квадратом, т.е. квадратом со сторонами бесконечной длины.

Здесь нуль в бесконечном атрибуте ведет себя как похититель пространства, а, точнее, его мерности, создавая своеобразный образ, о чем будет сказано ниже.

Из ряда (18) следует:

$$\begin{aligned}&0\cdot\infty=1;\\&0^2\cdot\infty^2=1,\ (0\cdot\infty)^2=1^2;\\&0^3\cdot\infty^3=1,\ (0\cdot\infty)^3=1^3;\\&\ldots;\\&0^n\cdot\infty^n=1,\ (0\cdot\infty)^n=1^n.\end{aligned} \tag{20}$$

Ряд (20) приводит к следующему утверждению.

14. Утверждение 8. *Произведение нуля и бесконечности в соответствующих одинаковых степенях порождает единицу в соответствующей степени и мерности*:

$0^n\cdot\infty^n=(0\cdot\infty)^n=1^n$ или в краткой записи $0^n\cdot\infty^n=1$. (Δ8)

Это логично и математически корректно, по крайней мере, для трехмерного пространства.

Возведение в степень

15. Любое число, не равное нулю, в нулевой степени есть единица (степень с нулевым показателем):

$$a^0=1, \tag{21}$$

где $a\neq0$, поскольку нуль в нулевой степени равен нулю или единице $0^0=\begin{cases}0,\\1.\end{cases}$

При этом бесконечность в нулевой степени равна единице:

$$\infty^0=1, \tag{22}$$

что не противоречит (16), а, значит, оправдывает (Δ2) и (Δ8).

Принято считать, что нулевая степень числа 0 не имеет смысла, то есть 0^0 не определено. Однако это неверно.

Википедия утверждает, что $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$ или в краткой записи $0^0 = 1$. Однако это неполно, поскольку 0^0 также равен и нулю, т. е. $0^0 = 0$.

16. Теорема 1 (как минимум **утверждение 9**). *Нуль в нулевой степени равен нулю или единице*:

$$0^0 = \begin{cases} 0, \\ 1. \end{cases} \qquad (\Delta 9) \qquad (23)$$

Нуль в нулевой степени равен нулю или единице в зависимости от контекста (конкретного текста), вернее в зависимости от конмодели (конкретной математической модели).

Покажем нестрого, что $0^0 = 1$.

С одной стороны

$$0^0 = 0^{1-1} = 0 \cdot 0^{-1} = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0}.$$

С другой стороны

$$\frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot \infty = 1.$$

Откуда $0^0 = 1$, что и требовалось утверждать.

Докажем, что $0^0 = 0$.

Доказательство 1.

Решим уравнение

$$x + x = x^x. \qquad (24)$$

$$2x = x^x, \; x^x - 2x = 0, \; x\left(x^{x-1} - 2\right) = 0.$$

Откуда

$$x_1 = 0. \qquad (25)$$

$$x^{x-1} - 2 = 0, \; x^{x-1} = 2,$$

$$x_2 = 2. \qquad (26)$$

Проверка уравнения (24) при $x_1 = 0$ показывает, что

$$0 + 0 = 0^0.$$

Поскольку $0 + 0 = 0$, то $0^0 = 0$, что и требовалось доказать для (23).

Доказательство 2.

Решим уравнение

$$x \cdot x = x^x. \qquad (27)$$

Преобразуем

$$x^2 = x^x; \; x^x - x^2 = 0; x^2\left(x^{x-2} - 1\right) = 0.$$

Откуда

$$x^2 = 0,$$

$$x_1 = 0. \qquad (28)$$

$$x^{x-2} - 1 = 0, \; x^{x-2} = 1,$$

$$x_2 = 2, \; x_3 = 1. \qquad (29)$$

Проверка уравнения (27) при $x_1 = 0$ свидетельствует, что

$$0 \cdot 0 = 0^0.$$

Т.к. $0 \cdot 0 = 0$, то и $0^0 = 0$, что вторично и требовалось доказать для (23).

Кстати, объединив уравнения (24) и (27), получим:

$$x + x = x \cdot x = x^x. \qquad (30)$$

Корни уравнения (30) $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Их подстановка в (30) приводит к видам:

$$0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0^0,$$

$$2 + 2 = 2 \cdot 2 = 2^2.$$

Видимо, только 2 и 0 обладают свойством равновесия значений, будучи самими с собой сложенными, перемноженными и возведенными в свою степень.

При этом результат действий с числом 2 есть 4, новое число:

$$2 + 2 = 2 \cdot 2 = 2^2 = 4.$$

Результат действий с числом 0 дает 0, оставаясь самим собой:

$$0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0^0 = 0. \qquad (31)$$

Выражение (31) справедливо лишь для числа нуль.

17. Нуль формулой (31) и особенно видом 0^0 *выражает свою нулевую сущность*:

$$0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0^0 = 0,$$

которая создает образ сингулярного нуля, что поясняется ниже.

Забегая вперед, аналогично можно записать:

$$0 - 0 = \frac{0}{0} = \sqrt[0]{0} = 0.$$

Объединив с (31), получим

$$0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0^0 = 0 = \sqrt[0]{0} = \frac{0}{0} = 0 - 0,$$

$$0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0^0 = 0 = 0^{\frac{1}{0}} = 0 \cdot 0^{-1} = 0 - 0.$$

Для завершенности рассмотрим уравнение

$$x + x = x \cdot x. \qquad (32)$$

Его решением будет $2x = x^2$, $x^2 - 2x = 0$, $x(x-2) = 0$ с корнями $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

Заметим, что в выражении $2x = x^2$ нельзя левую и правую части сократить на x, сразу получив $x = 2$, поскольку x может быть равным нулю, что и есть в действительности, а делить на нуль нельзя, кроме единицы и бесконечности.

18. Утверждение 10. *Нуль в минус единичной степени равен бесконечности*:

$$0^{-1} = \infty. \qquad (\Delta 10)$$

$$0^{-1} = \frac{1}{0} = \infty.$$

19. Утверждение 11. *Нуль в бесконечной степени равен нулю*:

$$0^{\infty} = 0. \qquad (\Delta 11)$$

Запишем выражение в виде, в т. ч. с учетом числового примера к формуле (42):

$$0^{\infty} = 0^{\frac{1}{0}} = \sqrt[0]{0} = 0.$$

Извлечение корня

20. Утверждение 12. *Корень нулевой степени из единицы есть число* e *или* $\frac{1}{e}$:

$$\sqrt[0]{1} = \begin{cases} e, \\ e^{-1}, \end{cases} \qquad (\Delta 12) \quad (33)$$

где $e = 2{,}7182818\ldots, e^{-1} = 0{,}3678794\ldots.$

Доказательство – не строгое, поскольку основано на утверждении (Δ1).

Известен предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (34)$$

Заменив $\infty = \frac{1}{0}$, получим

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty = \left(1+\frac{1}{\frac{1}{0}}\right)^{\frac{1}{0}} = (1+0)^{\frac{1}{0}} = \sqrt[0]{1}. \qquad (35)$$

Более строго выражение (35) запишется в виде

$$\lim_{\xi\to\infty}\sqrt[\xi]{1+\xi} = e. \qquad (36)$$

где ξ – положительная сколь угодно малая величина.

Пример:

при $\xi = 0{,}001$ получим $\sqrt[0{,}001]{1+0{,}001} \approx 2{,}717$;

для $\xi = 0{,}00001$ значение корня равно $\sqrt[0{,}00001]{1+0{,}00001} \approx 2{,}71827$;

при $\xi = 0{,}000000001$ получим $\sqrt[0{,}000000001]{1+0{,}000000001} \approx 2{,}718281827 \approx e$.

Результат подтверждает справедливость части формулы (33).

Рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}. \qquad (37)$$

Заменив $\infty = \frac{1}{0}$, получим

$$e^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \left(1-\frac{1}{\infty}\right)^\infty = \left(1-\frac{1}{\frac{1}{0}}\right)^{\frac{1}{0}} = (1-0)^{\frac{1}{0}} = \sqrt[0]{1}. \qquad (38)$$

Результат (38) эквивалентен пределу $\lim_{\xi\to 0}\sqrt[\xi]{1-\xi}$.

Его величина стремится к числу e^{-1}.

Например:

для $\xi = 0{,}00001$ получим

$$\sqrt[0{,}00001]{1-0{,}00001} = \sqrt[0{,}00001]{0{,}99999} \approx 0{,}367878 \approx e^{-1};$$

для $n = 99999$ находим

$$\left(1-\frac{1}{99999}\right)^{99999} \approx 0{,}367879 \approx e^{-1}.$$

Попутное замечание. Максимальное значение корня $\sqrt[x]{x}$, как известно [3, с. 129], достигается при $x = e$:

$$\max\left(\sqrt[x]{x}\right) = \sqrt[e]{e} = 1{,}4446678\ldots. \tag{39}$$

Противоположная задача, т. е. поиск минимального значения степени y^y, приводит к решению при $y = \frac{1}{e} = e^{-1}$:

$$\min\left(y^y\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = \left(e^{-1}\right)^{e^{-1}} = 0{,}6922006\ldots. \tag{40}$$

Покажем это. Если $\sqrt[e]{e}$ есть максимальное значение корня, то соответствующая ему обратная величина даст минимальное знание:

$$\frac{1}{\sqrt[e]{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}.$$

Обозначив $\frac{1}{e} = y$, получим $\min\left(y^y\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = \left(e^{-1}\right)^{e^{-1}}$, что соответствует (40).

При этом полученные величины (39) и (40) взаимообратные, т.е.

$$\min\left(y^y\right) = \frac{1}{\max\left(\sqrt[x]{x}\right)}; \tag{41}$$

$$y = \frac{1}{e},\ x = e,\ y = \frac{1}{x};$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\sqrt[e]{e}} = \frac{1}{1{,}4446678\ldots} = 0{,}6922006\ldots.$$

Выражения (40) и (41), возможно, ранее неизвестны.

21. Утверждение 13. *Корень нулевой степени из нуля есть нуль*:

$$\sqrt[0]{0} = 0. \qquad (\Delta 13) \tag{42}$$

Например,

$$\sqrt[0{,}00000001]{0{,}00000001} \approx 0.$$

22. Теорема 2. *Непрерывный повторный квадратный корень из нуля равен нулю или единице* [4]:

$$\sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \ldots}}} = \begin{cases} 0, \\ 1 \end{cases} \tag{43}$$

или точнее

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \ldots}}} = \begin{cases} 0, \\ 1. \end{cases}$$

Доказательство 1.

Рассмотрим уравнение

$$r_m^2 - r_m - m = 0, \tag{44}$$

где m – число, определяющее номер коэффициента r.

Данное уравнение характеризует пропорции, получившие авторское название - корневые r-пропорции (точнее, квадратичные корневые r-пропорции) и обозначенные r_m (*root* – корень, сущность) [4].

Из уравнения (44) вытекает равенство

$$r_m^2 = m + r_m, \tag{45}$$

которое фрактально может быть представлено в виде непрерывного повторного корня

$$r_m = \sqrt{m + r_m} = \sqrt{m + \sqrt{m + r_m}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{m + \sqrt{m + \sqrt{m + \ldots}}}, \tag{46}$$

где n – целое число, определяющее количество чисел m под знаком корня.

При $m = 0$ равенство (46) примет вид

$$r_0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \ldots}}}, \tag{47}$$

или в краткой записи

$$r_0 = \sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \ldots}}}. \tag{48}$$

При $m = 0$ уравнение (44) запишется в виде

$$r_0^2 - r_0 = 0.$$

Откуда

$$r_0(r_0 - 1) = 0. \tag{49}$$

Корнями уравнения (49) и, что тоже, равенства (47), являются $r_{0_1} = 1$ и $r_{0_2} = 0$, что соответствует (43).

Доказательство 2.

Справедливость системы (43) можно доказать по-иному.

Из уравнения (44) также следует выражение

$$r_m = 1 + \frac{m}{r_m}, \tag{50}$$

которое фрактально может быть представлено непрерывной цепной дробью

$$r_m = 1 + \frac{m}{r_m} = 1 + \cfrac{m}{1 + \cfrac{m}{r_m}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \cfrac{m}{1 + \cfrac{m}{1 + \ldots}}\right). \tag{51}$$

Предельные значения повторного корня (46) и непрерывной дроби (51), полученные из одного и того же выражения (44), равны между собой, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{m + \sqrt{m + \sqrt{m + \ldots}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \cfrac{m}{1 + \cfrac{m}{1 + \ldots}}\right).$$

При $m = 0$ последнее равенство примет вид

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \ldots}}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \cfrac{0}{1 + \cfrac{0}{1 + \ldots}}\right). \tag{52}$$

Правая часть равенства (52) равна единице, поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\cfrac{0}{1+\cfrac{0}{1+\ldots}}\right)=1+\lim_{n\to\infty}\cfrac{0}{1+\cfrac{0}{1+\ldots}}=1.$$

Следовательно, и левая часть равенства (52) также равна единице, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0+\ldots}}}=1,$$

или в краткой записи

$$\sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0+\ldots}}}=1,$$

что, в совокупности с очевидным

$$\sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0+\ldots}}}=0,$$

соответствует (43).

Кстати, выражение (43) при $\sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0+\ldots}}}=1$ не нарушает системы представления нечетных *s*-пропорций корневыми r-пропорциями как показано автором в [4]:

$$s_3=\frac{3+\sqrt{13}}{2}=1+\frac{1+\sqrt{13}}{2}=\sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0+\ldots}}}+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots}}}=r_0+r_3,$$

что предполагается в меру подробно изложить в отдельной статье в ближайшее время.

Соотношению (43) дано название *квадратичная фрактальность нуля* [4].

23. Теорема 3. *Непрерывный повторный кубический корень из нуля равен нулю, единице или минус единице* [4]:

$$\sqrt[3]{0+\sqrt[3]{0+\sqrt[3]{0+\ldots}}}=\begin{cases}-1,\\ \ \ 0,\\ \ \ 1.\end{cases} \tag{53}$$

Доказательство.

Рассмотрим уравнение

$$r_m^3-r_m-m=0. \tag{54}$$

где m – число, определяющее номер коэффициента r.

Из уравнения (54) следует равенство

$$r_m^3=m+r_m,$$

которое фрактально может быть представлено в виде непрерывного повторного корня

$$r_m=\sqrt[3]{m+r_m}=\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+r_m}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+\sqrt[3]{m+\ldots}}}.$$

При $m=0$ последнее равенство примет вид

$$r_0=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{0+\sqrt[3]{0+\sqrt[3]{0+\ldots}}}$$

или в краткой записи

$$r_0=\sqrt[3]{0+\sqrt[3]{0+\sqrt[3]{0+\ldots}}}. \tag{55}$$

При $m=0$ уравнение (54) составит

$$r_0^3-r_0=0.$$

Откуда

$$r_0(r_0^2-1)=0.$$

Корнями последнего уравнения и, что тоже, равенства (55), являются $r_{0_1}=1$, $r_{0_2}=0$ и $r_{0_3}=-1$, что соответствует (53).

Соотношение (53) получило авторское название *кубическая фрактальность нуля* [4].

Статья об исследованиях повторных корней (46), приведших в т. ч. к результатам (43) и (53), указана в реферативном журнале «Математика» Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ) РАН [5].

Нахождение логарифма

24. Число нуль не имеет ни действительного логарифма, ни логарифмов в комплексной форме [6, с. 192]. (56)

25. Число 1 имеет бесконечное множество натуральных логарифмов, равных значениям $2\pi i, -2\pi i, 4\pi i, -4\pi i$ и т. д., среди которых лишь один действительный, число 0 [6, с. 193]:

$$\ln 1=\{\ldots,\ -4\pi i,\ -2\pi i, 0, 2\pi i, 4\pi i, \ldots\}. \tag{57}$$

Число «–1» также имеет бесконечное множество натуральных логарифмов, значения которых есть числа $\pi i, -\pi i, 3\pi i, -3\pi i$ и т. д., но среди них нет ни одного действительного [6, с. 193]:

$$\ln(-1)=\{\ldots,\ -3\pi i,\ -\pi i, \pi i, 3\pi i, \ldots\}.$$

26. Отсюда заключают, что *нуль четное число*. (58)

Разобраться в загадке о логарифмах неположительных чисел первым сумел Л. Эйлер, исправив ошибочность суждений даже таких математиков, как И. Бернулли, Г. Лейбниц, Ж. Д'Аламбер.

Вышеизложенные утверждения можно воспринимать как определения и даже теоремы с различной степенью уверенности в приведенных доказательствах.

Нулевая функция

Нахождение производной (дифференцирование)

1. Производная постоянной величины равна нулю:

$$(c)'=0. \tag{59}$$

Интегрирование

2. Интеграл в бесконечных пределах от модуля нулевой функции $N(t)$ равен нулю [7, с. 15]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|N(t)|dt=0. \tag{60}$$

В свою очередь нулевая функция есть функция, интеграл от которой равен нулю независимо от выбора пределов интегрирования.

К числу нулевых функций относятся:

– функция, в явном виде равная нулю;

– функция $\delta^0(t)$, которая по определению равна единице при $t=0$, где t – время, и нулю при всех других значениях t;

– функция $\sum a_i \delta^0(t-t_i)$.

Нулевые функции не зависят от чередования их положительных и отрицательных значений, что не определяет их нулевое значение. Они представляются математически корректно даже в случае разрывных функций.

Данный материал в несколько сокращенном виде «Нуль: Число и функция» был направлен под № 60 для участия в Международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применение», DSPA-2007, состоявшаяся 28-30 марта 2007 г. в г. Москве, но был отклонен, насколько помнится, якобы из-за невозможности бесконечности иметь вторую и иные степени.

Часть результатов, изложенных выше, были доложены и с интересом обсуждены в 2008 г. на 57-ой научно-технической конференции МИРЭА, секции «Радиотехника» [8, с. 54], за что автор благодарен и признателен профессору Нефедову Виктору Ивановичу и доценту Смирнову Александру Александровичу.

Философский образ

У Первых Знак Число и Буква О в почёте.
Это ключ –
Родник, Источник чистый жизни.
Ключом открывают Мир
Вит «Праведы. Сила. Силы»

Нуль – зеркало

1. *Нуль – как зеркало*.

Прочтем эпиграф как сленговую модель, вынесенный в начало: «Нуль – как зеркало: взаимодействуя со всеми, никогда не показывает себя».

Отступление от темы. Образ зеркала автор использует при изучении риска и его подачи слушателям фразой «риск – как зеркало: взаимодействуя со всеми, никогда не показывает себя». Отметим, что риск главным образом присущ динамическим системам и имеет смысл только в них, сопровождая практически все операции в динамичном мире. В статике риск фактически отсутствует, не нарушая устойчивость.

Сингулярный нуль

2. **Предположение 1.** *Нуль – как сингулярная точка*.

$$0^0 = 0\ (\to 1). \qquad (\nabla 1) \quad (61)$$

Нуль в таком представлении можно наименовать сингулярным нулем.

Возможно, что оно выражает непостижимость нуля, нуля сингулярного.

Здесь и далее с использованием символа ∇ нумеруются авторские предположения.

Пространство и антипространство

3. Предположение 2. *Производная точки тождественна интегралу объема и наоборот*. $(\nabla 2)$

В символьной записи, где производная точки есть $(\cdot)'$ или P' (P – *point*), а интеграл объема это $\int V$ (V – *volume*), данное предположение символьно (символически) запишется в виде:

$$P' \equiv \int V \text{ или } (\cdot)' \equiv \int V.$$

Несколько точнее ($\nabla 2$) перефразируется так: производная точки $(\cdot)'$ стремится к интегралу объема $\int V$ и наоборот:

$$(\cdot)' \to \int V,$$
$$\int V \to (\cdot)'.$$

При этом и точка, и объем проходят следующие трансформации (преобразования, превращения).

Точка *P*, интегрируясь, превращается в линию *L* (*line*), та, интегрируясь, трансформируется в площадь *S* (*square*), она, интегрируясь, преобразуется в объем *V* (*volume*), который, интегрируясь, превращается в производную точки P':

$$P \to L \to S \to V \to P',$$
$$P \to \left(\int P \equiv L\right) \to \left(\int L \equiv S\right) \to \left(\int S \equiv V\right) \to \left(\int V \equiv P'\right). \qquad (62)$$

Процесс представляет последовательность операций интегрирования, т.е. взаимодействия и объединения с подобными объектами с последующим переходом (перескоком) на качественно новый уровень, допустим, что после наращивания значения до существенной (бесконечной) величины.

Объем *V*, дифференцируясь, превращается в площадь *S*, та, дифференцируясь, трансформируется в линию *L*, она, дифференцируясь, преобразуется в точку *P*, которая, дифференцируясь, превращается в интеграл объема $\int V$:

$$V \to S \to L \to P \to \int V,$$
$$V \to (V' \equiv S) \to (S' \equiv L) \to (L' \equiv P) \to \left(P' \equiv \int V\right). \qquad (63)$$

Здесь процесс представляет последовательность операций дифференцирования, т.е. дифференциацию себе подобных в ходе взаимодействия с ними с последующим переходом (соскоком) на качественно новый уровень после существенного снижения значения до ничтожной величины.

Итак, утверждение ($\nabla 2$) примет вид:

$$\frac{d(\cdot)}{dx} \to \int_{-\infty}^{+\infty} V dx,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} V dx \to \frac{d(\cdot)}{dx}$$

или системно

$$\begin{cases} \dfrac{d(\cdot)}{dx} \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} V dx; \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} V dx \to \dfrac{d(\cdot)}{dx}. \end{cases} \qquad (64)$$

Но вопрос также состоит и в том, где происходит граничное преобразование – в трехмерном пространстве или многомерном.

Образы-объекты и образы-процессы трехмерного пространства

Выражения (62) и (63) отвечают логике трехмерного пространства, где существуют четыре символьных объекта-пространства: точка *P* (*point*), линия *L* (*line*), площадь *S* (*square*), объем *V* (*volume*).

Заметим, что:

– линия L (*line*) у большинства ассоциируется с понятием длины (протяженности) L (*long*) и характеризуется длиной, выражаясь в единицах длины;

– площадь S (*square*) как объект характеризуется величиной, одноименно называемой площадью S (*square*), выражаясь в единицах площади;

– собственно пространством именуют объем как объект, величина которого оценивается объемом V (*volume*), выражаясь в единицах объема;

– точку P (*point*) как пространство большинство не воспринимает вовсе и считает, что она не имеет размерности и, следовательно, единицы измерения точки.

Здесь следует указать на необходимость введения нового образа-объекта – собственно пространства на базе образа-процесса как интеграла объема. Итак.

Предположение 3. *Пространство есть интеграл объема*:

$$Sp = \int V dx,$$

где Sp – пространство (*space*).

Аналогично следует указать на необходимости введения другого нового образа-объекта – антипространства на базе образа-процесса как дифференциации (производной) точки. Итак.

Предположение 4. *Антипространство есть производная точки*:

$$aSp = \frac{d(\cdot)}{dx},$$

где aSp – антипространство.

Можно интерпретировать, что пространство как интеграл объема есть *всё*, а антипространство как производная точки есть *ничто*. И они равны. «Всё и ничто – одно и то же» (Дешан).

Процитируем А.А. Овсейцева: «*Ничто* – это нечто не означает полное отсутствие *Всего*. Она лишь противоположность *Всему*, которая просто сливается со своей противоположностью и вместе с ней лежит в основе «начала начал» для всего мира. Именно в этой ситуации и проявляется троичность (*Всякая Вещь – Всё – Ничто*)».

Как гласит старая южная поговорка: «Любой может сосчитать, сколько семян в яблоке. Но никто не может сосчитать, сколько яблок в одном семени».

Объектно-процессные названия сведем в таблицу.

	Объект	Единицы измерения величин объекта		Значение (величина) объекта	Значение (величина) объекта
				Расширение (интегрирование)	Сжатие (дифференцирование)
1.	Анти-пространство			Тождество пространству	Производная точки
2.	Точка			Интеграл антипространства	Производная линии
3.	Линия	Единицы длины	ΔL	Интеграл точки	Производная площади
4.	Площадь	Единицы площади	ΔS	Интеграл линии	Производная объема
5.	Объем	Единицы объема	ΔV	Интеграл площади	Производная пространства

6.	Пространство			Интеграл объема	Тождество антипространству

При этом пространство и антипространство не есть объекты, отличающиеся друг от друга противоположными знаками, например (+) и (–), следовательно, они не преобразуются с использованием арифметических и даже алгебраических действий.

Пространство и антипространство характеризуются противоположными процессами и преобразуются друг в друга (аннигилируют) по правилам операций, описываемых в терминах высшей математики с использованием интегрального и дифференциального исчисления, взятия пределов бесконечно больших и бесконечно малых величин.

Вполне возможно, что данная философия потребует развития имеющихся и даже становления новых разделов математики как королевы наук. Поскольку «в любой науке ровно столько истины, сколько в ней математики» (Кант).

Преобразования в многомерном пространстве

Если преобразование, аналогичное (64), возможно лишь в многомерном пространстве, то количество объектов составит не четыре, а возрастет неограниченно. Для описания процесса на языке математики потребуется введение неограниченного числа названий объектов или, при упрощении, их нумерация в виде O_i (O – *object*):

$$O_1 \to O_2 \to \ldots \to O_i \to \ldots \to O_n,$$

где $n \to \infty$.

$$O_1 \to \left(\int O_1 \equiv O_2\right) \to \left(\int O_2 \equiv O_3\right) \to \ldots \to \left(\int O_{n-1} \equiv O_n\right) \to \left(\int O_n \equiv O_1\right). \quad (65)$$

Аналогично, только в обратном порядке,

$$O_n \to O_{n-1} \to \ldots \to O_i \to \ldots \to O_1,$$

$$O_n \to \left(O_n' \equiv O_{n-1}\right) \to \ldots \to \left(O_2' \equiv O_1\right) \to \left(O_1' \equiv O_{n-1}\right). \quad (66)$$

Процессы (65) и (66) многоступенчатые, отсюда возможен вывод о том, что Вселенная оперирует образами-объектами и образами-процессами лишь в трехмерном пространстве.

Если Она отдает предпочтение многомерности пространства, то с целью сокращения времени преобразования всего цикла по цепи (65), (66) продолжительность операций интегрирования и дифференцирования для разных объектов будет различной. Так, для старших степеней мерности, начиная с бесконечной, длительность преобразования будет мгновенной, затем, сообразно меняясь, станет краткосрочной, далее – среднесрочной и, наконец, долгосрочной, но лишь для пространства в три измерения и четырех объектов. Последнее происходит с нашей Вселенной.

Возможно, так поступает природа с многочленными рядами, взвешивая их по степени важности, напоминая нечто подобное преобразованиям типа бином Ньютона, ряд Тейлора и т.п. В них результат, как сумма членов ряда, в основном определяется несколькими начальными членами ряда, игнорируя последующие ввиду малости их вклада. Другими словами, высшие гармоники ряда воспринимаются лишь как шум.

Природа, развиваясь с учетом принципа результативности, экономичности и устойчивости, следует по пути упрощения процесса, ограничиваясь двумя-тремя (четырьмя) первичными членами последовательности (ряда).

Отсюда должен следовать механизм, уменьшающий количество пространств до трехмерного уровня, что возможно выполнить с использованием нуля, образно представив механизм утверждением (19) $0 \cdot \infty^{n+1} = \infty^n$. Здесь нуль выступает в роли поглотителя, «пожирателя» пространства, являясь его своеобразным архиватором. Итак.

Нуль – архиватор пространства

4. Предположение 5. *Нуль – как архиватор* (*поглотитель*) *пространства*:

$$0\cdot\infty^{n+1}=\infty^{n}. \qquad (\nabla 3)$$

Заключение

Ноль таинственно появлялся, только чтобы исчезнуть вновь,
кажется, как будто все математики, которые вели его поиски,
все же не осознавали его фундаментальную важность,
даже если и чувствовали ее
Дж. Дж. О'Коннор, Е.Ф. Робертсон «История нуля»

Выводы и систематизация

Расширение свойств нуля и *систематизация его проявлений*, сведенные в таблицу, позволяют заострить внимание на уникальности нуля для более осознанного использования в теоретических исследованиях и практических расчетах в различных областях знаний.

Действие	Формула или утверждение	№№ пункта	№№ формулы, утверждения	Новизна (+)
	Нуль – целое число	6	7	–
	Нуль – четное число	26	58	–
Сложение	$a+0=a$	1	1	–
Вычитание	$a-0=a$	2	2	–
Умножение	$0\cdot a=0$	3	3	–
	$0\cdot 0=0$	3	4	–
	$0\cdot\infty=1$	4	5, 19	–
	$0\cdot\infty^{2}=\infty$	13	19	+
	$0\cdot\infty^{3}=\infty^{2}$	13	19	+
	$0\cdot\infty^{n+1}=\infty^{n}$	13	19	+
	$0^{n}\cdot\infty^{n}=1$	14	Δ8	+
	$0!=1$	5	6	–
Деление	$\frac{0}{a}=0$	6	7	–
	Делить на нуль нельзя, за исключением единицы и бесконечности, причем бесконечности в различных степенях	7	Δ1	+
	$\frac{1}{0}=\infty$	8	Δ2, 8	+
	$\frac{\infty^{0}}{0}=\infty$	12	Δ6, 15	+

	$\frac{\infty}{0}=\infty^2$	9	Δ3, 10	+
	$\frac{\infty^2}{0}=\infty^3$	10	Δ4, 12	+
	$\frac{\infty^n}{0}=\infty^{n+1}$	11	Δ5, 14	+
	$\frac{1}{\infty}=0$	–	–	–
Возведение в степень	$a^0=1$, где $a\neq 0$	15	21	–
	$0^0=\begin{cases}0,\\1\end{cases}$	16	23, Δ9	+
	$\infty^0=1$	15	22	–
	$0^\infty=0$	19	Δ11	–
	$0^{\frac{1}{0}}=0$	–	–	+
	$0^{-1}=\infty$	18	Δ10	+
Извлечение корня	$\sqrt[0]{0}=0$	21	Δ3, 42	+
	$\sqrt{0+\sqrt{0+\sqrt{0+...}}}=\begin{cases}0,\\1\end{cases}$	22	43	+
	$\sqrt[3]{0+\sqrt[3]{0+\sqrt[3]{0+...}}}=\begin{cases}-1,\\0,\\1\end{cases}$	23	53	+
	$\sqrt[0]{1}=\begin{cases}e,\\e^{-1}\end{cases}$	20	33, Δ12	+
Нахождение логарифма	Число нуль не имеет ни действительного логарифма, ни логарифмов в комплексной форме	24	56	–
	$\ln 1=\{\ldots,\ -4\pi i,\ -2\pi i, 0, 2\pi i, 4\pi i, \ldots\}$	25	57	–
Смешанные действия	$0+0=0\cdot 0=0^0=0$	17	31	+
	$0-0=\frac{0}{0}=\sqrt[0]{0}=0$	19	–	+
	$0-0=0\cdot 0^{-1}=0^{\frac{1}{0}}=0$	–	58	+

При этом выражения, отмеченные в таблице знаком (+), возможно, ранее неизвестны.

В случае их известности автор просит указать источник и воспримет данный факт с интересом и благодарностью.

Размышления об образе нуля

Автор отдает себе отчет в том, что настоящий материал во многом носит дискуссионный характер ввиду неочевидности многих утверждений и их не строгого доказательства. Впрочем, полученные выводы не противоречат друг другу и адекватны традиционным определениям и действиям с нулем.

В случае выявления противоречий в формулах и утверждениях, обусловленных взаимодействиями нуля, единицы, минус единицы и бесконечности, следует обращать внимание не только на размер (величину), но и мерность, в числе которой точка (ничто и всё), линия (длина), площадь (квадрат), объем (куб). Единица, будучи нейтральной в операциях умножения и деления, не влияет на размер (величину), но способна повлиять на мерность, изъясняясь в терминах геометрии, представляя собой, к примеру, 1 м, $1\,\text{м}^2$, $1\,\text{м}^3$.

Скажем более, 0, 1, –1 и ∞ как символы и их взаимодействие призваны оказать помощь философии в объяснении мира, его становлении и эволюционном развитии, и могут восприниматься в виде философских образов.

При этом нужна гармоничность и однозначность восприятия нуля как числа, функции, математического символа, знака и философского образа.

Поистине, много противоречивого вобрал в себя нуль, да еще и в комплекте с единицей, единицей с минусом, числом *e*, бесконечностью и минус бесконечностью.

Эти противоречия призвана выразить математика.

Часть из них изложены выше, многие требуют дальнейших исследований и предположений на уровне аксиом, предположений, утверждений, определений и теорем.

Эта неточность и противоречивость нулю простительна, ведь нуль – как зеркало: взаимодействуя со всеми, никогда не показывает себя.

А что мы желаем увидеть в зеркале и что видим, по большей части зависит от объекта.

Само же зеркало может быть истинным от природы или кривым от субъекта-исследователя.

Проникнуть в образное «зазеркалье» весьма и весьма непросто.

Из математических противоречий начинает складываться туманный философский образ нуля.

Так что термин «начнем с начала – начнем с нуля» неисчерпаем, бесконечен и бессрочен.

А пока в этом далеко небесспорном изыскании поставим одну из промежуточных точек …

Литература

1. *Папюс*. Наука о числах. – М.: ООО «Фирма «Издательство АСТ», 1999. – 384 с.

2. *Алферов С.А.* Обобщенная формула Золотой пропорции // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12686, 08.12.2005.

3. *Гарднер М*. Математические досуги. Пер. с англ. Ю.А. Данилова. Под ред. Я.А. Смородинского – М.: Мир, 1972. – 496 с.

4. *Шенягин В.П.* Сущность чисел и их взаимосвязь с золотой ϕ-пропорцией // INTERMATIC-2004. Материалы Международной научно-практической конференции «Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения», 7-10 сентября 2004 г., г. Москва. – М.: МИРЭА – ЦНИИ «Электроника», 2004, часть 2. – с. 26-31.

5. 07.04-13А.26. Сущность чисел и их взаимосвязь с золотой ϕ-пропорцией. Шенягин В.П. Intermatic-2004: Материалы Международной научно-практической конференции «Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения», Москва, 7-10 сент., 2004. Ч. 2. – М.: Изд-во МИРЭА; Изд-во ЦНИИ «Электроника», 2004, с. 26-31. Библ. 7. Рус. – М.: РАН, Всероссийский институт научной и технической информации (ВИНИТИ), Реферативный журнал, 13. Математика. Сводный том. 4, 2007. –

с. 6.

6. *Балк М.Б.* Реальные применения мнимых чисел / М.Б. Балк, Г.Д. Балк, А.А. Полухин. – К.: Радянська школа, 1988. – 255 с.

7. *Брейсуэлл Р.* Преобразование Хартли: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 175 с.

8. *Шенягин В.П.* Числа в радиотехнике: нуль, число е, $\sqrt{2}$ / Программа 57-й научно-технической конференции Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), секция радиотехники и связи, 14-26 мая 2008 года, г. Москва. Программа. – М.: МИРЭА, 2008. – 88 с., с. 54.

9. *Вит*. Праведы. Сила. Силы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16322, 26.01.2011.

10. *Овсейцев А.А*. Начало начал – причина причин фрактальной логики (Взаимодействие и взаимообмен всего со всем и во всем) // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.16479, 09.04.2011.

$$0+0=0\cdot 0=0^{0}=0=\sqrt[0]{0}=\frac{0}{0}=0-0$$

$$0+0=0\cdot 0=0^{0}=0=0^{\frac{1}{0}}=0\cdot 0^{-1}=0-0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d(\cdot)}{dx}\to\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}Vdx \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}Vdx\to\dfrac{d(\cdot)}{dx} \end{cases}$$