С.Л. Василенко

Новые интерпретации золотого сечения

Бди в оба

Есть одна, мало чем приметная, можно даже сказать маловыразительная математическая задачка на пропорцию, которая в своём решении приводит к замечательной, если не сказать, фундаментальной константе – числу золотого сечения (ЗС).

Что-то сродни феерическому перевоплощению "гадкого утенка" Андерсена (1843).

Достаточно простые, но весьма наглядные пропорциональные свойства ЗС в разное время восхищали не одного исследователя своей неповторимой числовой гармонией.

Стандартный вариант, выписанный практически одинаково во всех книгах и справочниках, определяет ЗС как деление непрерывной величины (отрезка, угла и т.п.) на две части в отношении, при котором целое так относится к большей части, как она – к меньшей части.

Или другая модификация (в обратных отношениях): меньшее так относится к большему, как большее – ко всей величине.

Геометрическое деление прямолинейного отрезка в пропорции ЗС или в крайнем и среднем отношении $(a+b):b=b:a$ впервые встречается в знаменитых «Началах» Евклида (~2300 лет назад), где применялось для построения правильного пятиугольника.

После чего забывается на многие века. За ненадобностью...

Есть и другой аспект.

Современные исследователи часто непреднамеренно, а порой и сознательно грешат смешиванием теории последовательностей Фибоначчи и золотого сечения, хотя это совершенно разные задачи.

Единственный момент, который позволяет их иногда рассматривать совместно, – это уникальный частный случай образования чисел Фибоначчи по простейшей аддитивно-двучленной процедуре так, что отношение соседних членов в пределе стремится к иррациональной константе ЗС.

В этом случае традиционно рассматриваются два характеристических квадратных уравнения $x^2-x-1=0$ и $x^2+x-1=0$, которые в положительных решениях дают соответственно пару взаимосвязанных чисел золотого сечения:

- $\Phi=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1{,}618$ – отношение большей части к меньшей;
- $\phi=\Phi^{-1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}618$ – отношение меньшей части к большей.

Примечательно, что Φ определяется исключительно как безразмерная величина.

Вторую же константу ϕ можно трактовать не только отношением, но и в качестве абсолютного содержания большего в целом. То есть к ней вполне приемлемо "пристёгивание" единиц измерения целого (см, км, сажень, фут и т.д.).

Оказывается, это не единственный способ алгебраического вычисления ЗС в контексте сравнения разделяемых частей.

ЗС на основе меньшей части целого. Золотое сечение единичного отрезка делит его на две неравновеликие части длиной ϕ и $(1-\phi)$.

В связи с этим вполне логично решение задачи сконцентрировать на определении меньшей части $(1-\phi)$. Тогда б*о*льшая часть образуется автоматически.

Так мы приходим к новому представлению (определению) ЗС:

целое 1 так относится к первой части $a < 1$, как она – к разности между собственным удвоением и второй частью (рис. 1):

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{2a-(1-a)}.$$

Приведя пропорцию к квадратному уравнению $a^2 = 3a-1$, получаем решение

$$a = 1-\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1-\phi \approx 0{,}382.$$

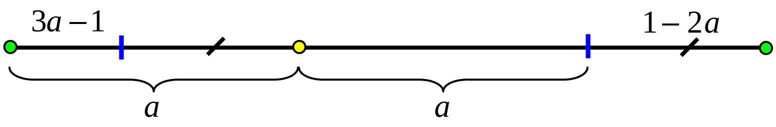
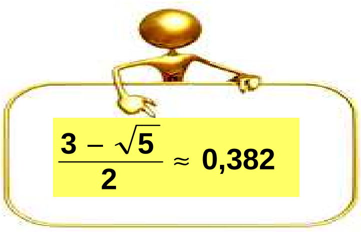


Рис. 1. Иллюстрация построения золотого сечения

Таким образом, мы произвели деление единичного отрезка в соотношении золотого сечения, а именно, определив его меньший отрезок a.



На первый взгляд, может показаться, что решение задачи более громоздко, чем классическое представление.

Возможно. Но в данном случае это не столь важно.

Главное здесь совсем другое.

Положение точки ЗС точно такое же, как и в классическом представлении.

Однако толкование и пропорциональное построение уже несколько иные.

А значит, можно ожидать синтеза новых знаний и обобщений по содержательной трактовке ЗС, позволяющих выстраивать причинно-следственные связи.

Чёт-нечет Фибоначчи. Для характеристического квадратного уравнения $a^2 = 3a-1$ адекватное возвратное уравнение рекуррентно-суммирующего типа имеет вид (n = 1, 2, 3…):

$$f_{n+1} = 3f_n - f_{n-1}.$$

С традиционными начальными условиями $(f_0,\, f_1) = (0,1)$ данная рекурсия генерирует числовую последовательность (A001906) [1]:

0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377...

А это не что иное, как ряд-модель чётных чисел Фибоначчи F_{2n} с производящей функцией $\dfrac{x}{1-3x+x^2}$.

Действительно,

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} = (F_{k-2} + F_{k-3}) + F_{k-2} = 2F_{k-2} + (F_{k-2} - F_{k-4}) = 3F_{k-2} - F_{k-4}.$$

Отношение соседних членов ряда (большего к меньшему) в пределе приводит к константе – максимальному по модулю корню уравнения $a^2 = 3a-1$:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \Rightarrow \frac{1}{a} = 1+\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1+\Phi.$$

Внеся изменение на обратное отношение (меньшее к большему), получаем непосредственно меньшую часть золотого сечения единичного отрезка:

$$\frac{f_n}{f_{n+1}} \Rightarrow a = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 - \phi .$$

Несколько поменяв начальные условия $(g_0, g_1) = (1, 2)$, воспроизводим ряд нечётных чисел Фибоначчи F_{2n+1} по схеме $g_{n+1} = 3g_n - g_{n-1}$: 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, 610... – (A001519) [1].

Переходя к непрерывному аргументу t, можно получить аналитические соотношения:

$$f(t) = \frac{\Phi^{2t} - \Phi^{-2t}}{\sqrt{5}}, \qquad g(t) = \frac{\Phi^{2t+1} + \Phi^{-2t-1}}{\sqrt{5}}$$

с их наглядным представлением, включая движение к своим аттракторам (рис. 2).

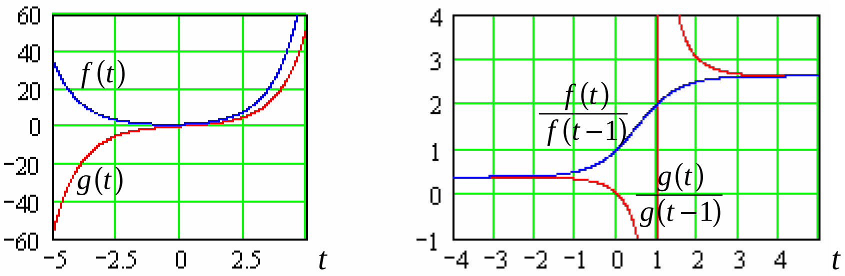


Рис. 2. Непрерывные представления чётных f и нечётных g чисел Фибоначчи и их движение к аттракторам

Важная отличительная особенность данных непрерывных функций – это их действительное представление, то есть область значений – действительные числа. В отличие, скажем, от той же непрерывной функции чисел Фибоначчи $F(t) = \dfrac{\Phi^t - (-\Phi)^{-t}}{\sqrt{5}}$ – комплексной, за счет возведения (–1) в дробную степень.

В определенной мере это обусловило отдельное рассмотрение некоторыми авторами отношений "чёт-нечет Фибоначчи" с принятием формальных обозначений гиперболических функций по основанию Ф (вместо натурального логарифма e).

Хотя никакой новой информации либо иных вычислительных преференций подобная процедура не даёт.

Более того, как показано в работах [2, 3], вместо развития это заводит исследования в "гиперболический тупик" без тени надежды на желаемое расширение теоретических линий.

ЗС в композиции чисел. В теории чисел композиция натурального числа [4] – его представление в виде упорядоченной суммы натуральных слагаемых (частей). То есть композиция (в отличие от разбиения) учитывает порядок следования частей.

Примечательно, что элемент ряда f_n равен сумме произведений элементов всех 2^{n-1} композиций числа n (*Hamilton*, 2010).

Например, восемь (2^3) возможных композиции четырёх имеют вид

$$4 = 3+1 = 1+3 = 2+2 = 2+1+1 = 1+2+1 = 1+1+2 = 1+1+1+1$$

и дают сумму соответствующих произведений: $4+3+3+4+2+2+2+1 = 21 = f_4$.

Переводя это свойство на язык золотого сечения, можно сформулировать одну из композиционных интерпретаций ЗС.

Меньшая часть ЗС – предельное отношение сумм произведений элементов во всех композициях соседних натуральных чисел (n и $n + 1$).

Возможны и другие варианты.

Так, f_n – количество композиций $2n + 1$, в которых нет частей, равных 1.

Например, для $n = 3$ имеем $f_3 = 8$, что соответствует 8-элементному множеству композиций числа 7 без единиц (знак суммы опущен): 7, 52, 25, 43, 34, 322, 232, 223.

Меньшая часть ЗС – предельное отношение количества композиций нечётных чисел без единичных элементов.

Мы далеки от мысли, что ЗС – эталон гармонии. Более того, считаем это вольным и даже надуманным представление, ибо все устойчивые соотношения в природе гармоничны хотя бы потому, что они относительно стабильны.

В данном случае всё-таки напрашивается условное образное сравнение-переход от абстрактных чисел к их множественному композиционному представлению с общей формулировкой: ЗС – *предельное отношение композиций*.

Суммирование, комбинаторика и др.

Многие аналитические свойства четных или нечётных чисел Фибоначчи вытекают из аддитивных схем-закономерностей образования этих удивительных числовых конструкций.

А значит, в той или иной мере, им присущи особенности суммирующих и комбинаторных форм, часть из которых приведена в описании числового ряда A001906 [1].

Например, можно выделить собственное суммирование или "самоё себя":

$$f_n = n + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} f_j = n + \sum_{k=1}^{n} k f_{n-k} ,$$

$$g_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} g_j = 1 + \sum_{k=1}^{n} k g_{n-k} ,$$

с одновременным взаимным перекликанием:

$$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} g_k , \qquad g_n = 1 + \sum_{k=0}^{n} f_k .$$

Не менее поразительны и комбинаторные способы вычисления:

$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+k}^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k F_k .$$

$$g_n = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{2k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n+k}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k F_{k+1} .$$

где $C_n^i = \binom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!\,(n-i)\,!}$ – биномиальные коэффициенты.

По-своему интересно двойное суммирование "чисел сочетания" (без повторения) C_a^b, полученное нами в развитие формулы (*Sloane*, 2005):

$$f_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} C_{n-i}^{j} C_{n-j}^{i} - C_{n+1}^{2},$$

объединение сочетательных и степенных признаков (*Catalani*, *Barry*, 2004):

$$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1-k}^{k} \cdot 5^{n-k} (-1)^k ,$$

$$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} C_{n-k}^{k} \cdot 3^{n-2k} (-1)^k$$

и даже периодическая транскрипция, заложенная в функции косинуса (*Deutsch*, 2006):

$$f_n = \sum_{k=0}^{\lceil n-1/2 \rceil} \left[1 + 4\cos^2\left(\frac{k}{2n} \pi \right) \right].$$

где $\lceil \xi \rceil$ – целая часть от ξ.

Как и с числами основного ряда, для них характерны тождества, в том числе с использованием чисел Фибоначчи F и Люка L, например,

$f_n^2 = f_{n-1} f_{n+1} + 1$ (*Cloitre*, 2002), $\qquad f_n = F_n L_n$ (*Beedassy*, 2004),

$g_n^2 = g_{n-1} g_{n+1} - 1$, $\qquad g_n = F_n L_{n+1} + (-1)^n$.

Также выполняется тождество $f_n^2 = \sum_{k=1}^{n} f_{2k-1}$ (*Ramsey*, 2008).

Надо сказать, это свойство любой последовательности $s_n = p s_{n-1} - s_{n-2}$ с типовыми начальными условиями $(s_0, s_1) = (0, 1)$, включая натуральный ряд $s_n = 2s_{n-1} - s_{n-2}$.

Ему вторят похожие соотношения $f_n = \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1}$ и $g_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} F_{2k}$.

Особо отметим равенство, которому едва исполнилось 2 месяца (*Adamson*, 2011), причём одинаково верное для последовательностей чётных и нечётных чисел Фибоначчи:

$$f_{n+1} = 1 + f_n + \sum_{k=1}^{n} f_k , \qquad g_{n+1} = 1 + g_n + \sum_{k=1}^{n} g_k .$$

Здесь наглядно проявляется необычайная "магия" суммирования всего ряда $\left(k = \overline{1, n}\right)$ и дополнительного сложения крайних членов.

В этих равенствах также воочию представляется обоснование необычного свойства:

f_n и g_n – наименьшее натуральное число, которое не может быть образовано суммированием *n* значений, выбранных среди предыдущих термов (с разрешёнными повторениями).

Так, при $n = 5$ за счет предшествующих элементов с возможным поворением последнего, как самого большого, можно образовать максимальное число 54 = 21+21+8+3+1.

То есть $f_5 = 55$ становится наименьшим натуральным число, которое не может быть сформировано подобным суммированием пяти значений.

А вот еще необычное матрично-степенное тождество (*Severini*, 2005):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} g_{n-1} & f_n \\ f_n & g_n \end{pmatrix}.$$

Серпантин замечательных математических выражений на этом не заканчивается, и его можно продолжать и далее.

Но уже на этом достаточно представительном материале можно подвести общую черту, отметив главную особенность.

Все приведенные соотношения имеют одно общее замечательное свойство:

отношение правых частей для двух соседних значений n и $n + 1$ в пределе приводит к числовой величине малого отрезка золотого сечения $1 - \phi \approx 0{,}382$.

Возможно, не всегда можно придать приемлемо простое и доходчивое толкование-объяснение такому отношению. Это факт.

Но то, что оно справедливо с абсолютной точностью исчисления – это также непреложная математическая истина.

Золотое сечение и матрицы Хессенберга. В линейной алгебре матрицами Хессенберга называют "почти" треугольные матрицы.

Так, верхняя матрица Хессенберга – это квадратная матрица, в которой все элементы, лежащие ниже первой "поддиагонали", равны нулю, то есть $h_{ij} = 0 \; \forall \; i > j + 1$.

Установлено (*Janjic*, 2010), что эти матрицы размерностью $n \times n$, составленные по определённым правилам, имеют определители, в точности равные f_n.

Данное свойство нами расширено и на величины g_n.

В результате чётные f_n и нечётные g_n числа Фибоначчи связаны с матрицами Хессенберга $\{\mathrm{N}^0, \mathrm{N}^1, \mathrm{S}^0, \mathrm{S}^1\}$ следующим образом:

$$f_n = \left|\mathrm{N}_n^0\right|, \qquad g_n = \left|\mathrm{N}_n^1\right|,$$

$$f_n = \left|\mathrm{S}_{n+1}^0\right|, \qquad g_n = \left|\mathrm{S}_{n+1}^1\right|.$$

Матрицы $\{\mathrm{N}^0, \mathrm{N}^1\}$ построены на основе натуральных чисел:

$$\mathrm{N}_n^0 \equiv N_{i,j}^0 = \{ j - i + 1,\ i \le j;\ \ -1,\ i = j + 1;\ 0,\ i > j + 1 \};$$

$$\mathrm{N}_n^1 \equiv N_{i,j}^1 = \left\{ N_{i,j}^0,\ N_{n,n-1} = -2 \right\},\ \ i, j = \overline{1, n}.$$

То есть, начиная с диагонали, вправо построчно записаны числа натурального ряда, а первая "поддиагональ" равна (–1).

В матрице N^1 один элемент дополнительно заменяется на (–2): $N_{n,n-1} = -2$.

В основу матриц $\{\mathrm{S}^0, \mathrm{S}^1\}$ положены числа Стирлинга $S(n, k)$ 2-го рода из n по k – в комбинаторике это количество неупорядоченных разбиений n-элементного множества на k непустых подмножеств (блоков):

$$\mathrm{S}_n^0 \equiv S_{i,j}^0 = \left\{2^{j-i}-1,\ i \le j;\quad -1,\ i = j+1;\ 0,\ i > j+1\right\};$$

$$\mathrm{S}_n^1 \equiv S_{i,j}^1 = \left\{S_{i,j}^0,\ S_{n,n-1} = -2,\quad S_{n,n} = -1\right\},\quad i,j = \overline{1,n}.$$

Начиная с диагонали, вправо построчно записаны числа Стирлинга второго рода (k = 2) $2^{j-i}-1$, а первая "поддиагональ" равна (–1). При этом на главной диагонали находятся нули.

В матрице S^1 пара элементов дополнительно заменяется: $S_{n,n-1} = -2,\quad S_{n,n} = -1$.

Примеры квадратных матриц представлены на рис. 3.

Окончательно, меньшая часть золотого сечения образуется как предел отношения определителей в разных транскрипциях матриц Хессенберга $\Omega = \left\{\mathrm{N}^0, \mathrm{N}^1, \mathrm{S}^0, \mathrm{S}^1\right\}$:

$$1-\phi = \lim_{n\to\infty}\frac{|\Omega_n|}{|\Omega_{n+1}|}-1.$$

$n = 5$

$$N^0:\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N^1:\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$n = 6$

$$S^0:\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 31 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 7 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S^1:\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 31 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 7 & 15 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Рис. 3. Матрицы Хессенберга, основанные на числах:
N – натурального ряда, S – Стирлинга второго рода $2^k - 1$

Таким образом, числа Фибоначчи, независимо от рекуррентной процедуры своего образования, "насыщаются" новым содержанием через свойства чисел натурального ряда и степени двойки $2^k - 1$. А через них обновлённое звучание получает и само золотое сечение, значение-отношение которого $\Phi \approx 1{,}618$ не случайно находится в интервале (1, 2).

Нечто похожее происходит и с матрицей Ганкеля [4] – квадратной матрицей, у которой на всех диагоналях, перпендикулярных главной, стоят равные элементы, то есть $a_{i,j} = a_{i-1,j+1}$.

Подобно тому, как определитель матрицы Ганкеля с упорядоченными возрастающими наборами натуральных чисел равен нулю, точно также равны нулю определители матрицы Ганкеля с упорядоченными возрастающими наборами чисел f_i и g_i, $i = \overline{k,\ 2n+k-2}$, $n > 2$, например, для k = 1:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_n \\ f_2 & f_3 & f_4 & \dots & f_{n+1} \\ f_3 & f_4 & f_5 & \dots & f_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n & f_{n+1} & f_{n+2} & \dots & f_{2n-1} \end{pmatrix} = 0.$$

Принимая во внимание фундаментальную значимость в математике чисел натурального ряда и степеней двойки, можно гипотетически утверждать и об основополагающей роли ЗС.

Только весь вопрос, в чём же конкретно заключается эта ключевая роль?

– Некая гармоничность (в смысле красивости), иногда приписываемая ЗС, весьма слабое, а порой и надуманное действие.

– Распространённость в растительном, а иногда и животном мире имеет место, но крайне в ограниченном проявлении. И то под вопросом истинности.

– В теории чисел и других абстрактных математических дисциплинах ЗС встречается лишь эпизодически и бессистемно.

– В физических явлениях и процессах ЗС практически неприметно.

Так что, надо полагать, основные открытия ещё впереди. Если вообще движемся в правильном направлении. Или просто не там ищем.

Заключение. Итак, очерчена ещё одна, на наш взгляд, неординарная схема-модель исследования золотого сечения.

Не исключена индивидуальная оценка, что степень новизны несколько преувеличена, поскольку в основе подхода, так или иначе, фигурируют уже знакомые числа Фибоначчи.

Такое часто происходит, когда результаты уже получены и описаны.

Исходя из самооценки, корректно воздержаться и от восхваляющих эпитетов или краснобайской терминологии типа "серебряные функции", медные пропорции и т.п., так любимой в клубном сообществе современных "золотоискателей".

И всё-таки оригинальность или, скажем так, новое звучание ЗС налицо. Стоило только перейти от сравнения соседних чисел Фибоначчи к их соотнесению через один элемент.

Устремление исследовательского взгляда на обычные вещи несколько под другим, менее привычным углом зрения – это и есть научно-познавательная деятельность в её исконном понимании.

Что же можно выделить, как говорится «в сухом остатке»?

1. Прежде всего, отметим, что при начальных условиях $(f_0,\, f_1) = (0, 1)$ изменение одного коэффициента в возвратном уравнении формирует:

$f_{n+1} = 2 f_n - f_{n-1}$ – натуральный ряд;

$f_{n+1} = 3 f_n - f_{n-1}$ – чётные числа Фибоначчи.

2. Золотое сечение обретает чёткую интерпретируемость в термах предельных отношений: композиций натуральных чисел, тождеств для чётных или нечётных чисел Фибоначчи, определителей в разных транскрипциях матриц Хессенберга и др.

Всё это позволяет нам рассчитывать на существенное расширение содержательного толкования золотого сечения, а значит, и возможность его реализуемости в различных теоретических и прикладных задачах.

Литература:

1. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – http://oeis.org/.

2. Василенко С.Л. Гиперболические лабиринты на пути к гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15513, 06.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161539.htm.

3. Василенко С.Л. Гиперболические метаморфозы аддитивно-рекуррентных последовательностей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16255, 27.12.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161750.htm.

4. Wikipedia. The free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Composition_(number_theory), http://en.wikipedia.org/wiki/Hankel_matrix.