С.Л. Василенко

Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства. Ч. 3. Разные направления

Вначале было число, и имя ему ничто.
Потом было слово, и имя ему всё.

Многочисленные уникальные свойства и проявления числа 12, на наш взгляд, дают достаточное основание считать его одной из главенствующих формообразующих структур в моделировании-описании мироздания.

В предыдущих частях мы имели удовольствие наблюдать, как 12 неожиданно "выныривает" в самых разных ситуациях в теории чисел, геометрии, теории графов.

Однако было бы несправедливо считать изложенный ранее материал некой квинтэссенцией или гимном незатейливой дюжине (12).

Представляется, что человек только вначале пути настоящего осознания феномена 12.

Поэтому есть смысл продолжить начатые исследования, расширив область рассмотрения другими направлениями.

В той или иной мере они частично пересекаются с теорией чисел. И это понятно. Поскольку изучаются количественные аспекты целого положительного числа.

Итак, число 12… (продолжение)

- Количество (±1, 0)-неприводимых кубических многочленов (третьей степени), неразложимых на нетривиальные (не константные) многочлены (A087610[1]).

Такие многочлены с коэффициентами (±1, 0) не поддаются превращению или не могут быть разложены на множители в виде нетривиальных полиномов, чьи коэффициенты также равны (±1, 0).

Всего здесь допускается 18 = 3·3·2 разновидностей многочлена $x^3 - ax^2 - bx + c$, то есть (3–*a*, 3–*b*, 2–*c*), где $c \neq 0$, в противном случае x просто выносится за скобку.

Среди них только шесть разложимы на многочлены с коэффициентами (±1, 0):

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2, \qquad x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)\left(x^2+1\right),$$

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x-1)(x+1)^2, \qquad x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)\left(x^2+1\right),$$

$$x^3 - 1 = (x-1)\left(x^2+x+1\right), \qquad x^3 + 1 = (x+1)\left(x^2-x+1\right).$$

Остальные **12** полиномов – неприводимые!

- Количество неприводимых полиномов вида $x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm \ldots \pm 1$, то есть неразложимых на нетривиальные полиномы с целыми коэффициентами (A087481).

Соответствующие коэффициенты $a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_0 = \pm 1$ неприводимых многочленов $x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ имеют вид:

1	1	1	1	-1
-1	1	1	1	1

1	1	1	-1	1
-1	1	1	1	-1

1	1	-1	1	1
-1	1	-1	1	1

1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	-1	-1

1	-1	1	1	1
-1	-1	-1	1	-1

1	-1	1	-1	1
-1	-1	-1	-1	-1

[1] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences™ (OEIS™) – http://oeis.org/.

• Различные характеристические многочлены, определяющие собственные значения 3×3 робастных бинарных {0,1}-матриц (A127182):

y^3-y^2-3y-1, y^3-2y^2+y-1, y^3-3y^2+y+1, y^3-3y^2+3y-2, y^3-y^2-2y-1, y^3-y^2-y-1,
y^3-y^2-2y+1, y^3-2y^2-y+2, y^3-2y^2-y+1, y^3-3y^2+2y-1, y^3-3y^2+3y-1, y^3-2y^2+1.

То есть собственные значения матриц являются корнями характеристических многочленов.

Для каждой матрицы A они находится через определитель матрицы $y{\cdot}I-A$, например,

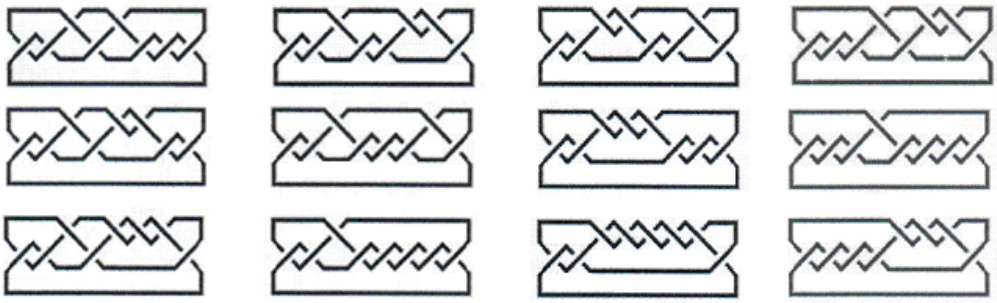
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow yI-A=\begin{pmatrix}y-1 & -1\\ -1 & y\end{pmatrix} \Rightarrow y(y-1)-1=y^2-y-1.$$

• Представляют интерес *квадратные цепи*: набор чисел от 1 до n такой, что сумма любых двух последовательных чисел составляют квадрат (A071983).

Минимальная цепь (8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9). Для $n = 15\div24$ количество таких цепей колеблется от 0 до 3. А вот при $n = 26$ можно составить **12** подобных круговых перестановок (не считая реверсы-развороты):

1	18	7	2	14	22	3	13	23	26	10	6	19	17	8	1	15	21	4	12	24	25	11	5	20	16	9
2	18	7	9	16	20	5	4	21	15	1	8	17	19	6	10	26	23	2	14	11	25	24	12	13	3	22
3	18	7	9	16	20	5	4	21	15	1	8	17	19	6	10	26	23	2	14	22	3	13	12	24	25	11
4	18	7	9	16	20	5	11	25	24	1	8	17	19	6	3	13	12	4	21	15	10	26	23	2	14	22
5	18	7	9	16	20	5	11	25	24	1	8	17	19	6	3	22	14	2	23	13	12	4	21	15	10	26
6	18	7	9	16	20	5	11	25	24	1	8	17	19	6	3	22	14	2	23	26	10	15	21	4	12	13
7	18	7	9	16	20	5	11	25	24	1	8	17	19	6	10	15	21	4	12	13	3	22	14	2	23	26
8	18	7	9	16	20	5	11	25	24	1	8	17	19	6	10	26	23	2	14	22	3	13	12	4	21	15
9	18	7	9	16	20	5	11	25	24	1	15	21	4	12	13	3	22	14	2	23	26	10	6	19	17	8
10	18	7	9	16	20	5	11	25	24	12	4	21	15	1	8	17	19	6	10	26	23	2	14	22	3	13
11	18	7	9	16	20	5	11	25	24	12	4	21	15	1	8	17	19	6	10	26	23	13	3	22	14	2
12	18	7	9	16	20	5	11	25	24	12	13	3	22	14	2	23	26	10	6	19	17	8	1	15	21	4

• Существует ровно **12** рациональных узлов[2] с 8 зацеплениями (кроссированием) (A018240).

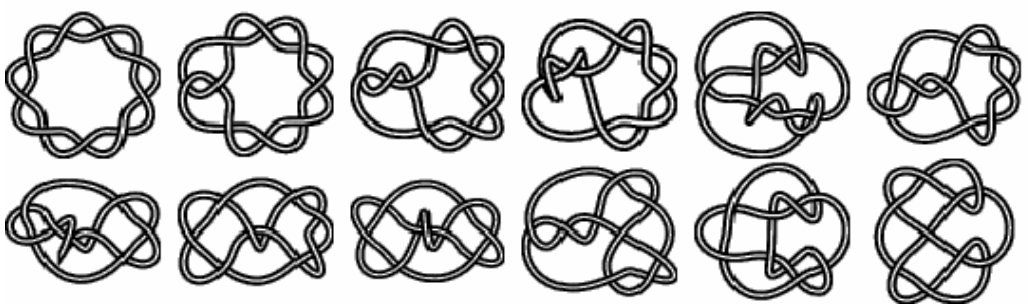


В математической теории узлов рациональные узлы (2-bridge узлы на основе многочленов Дж. Конвэя [2]) могут быть представлены в виде функции высоты (координаты z), имеющей по два максимума и минимума – критических точек.

• Число положительных рациональных узлов (из 49) с $9 = 2n + 1$ зацеплениями: 9_1 ÷ 9_7, 9_9, 9_10, 9_13, 9_18 и 9_23 (в обозначении Alexander–Briggs и позднее Rolfsen)[3]:

---

[2] http://www2.tcs.ifi.lmu.de/~gruberh/, http://en.wikipedia.org/wiki/Knot_theory.
[3] http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Image:Rolfsen_240.png.



Примечательно, что количество подобных узлов (A051450) определяется аналитически с помощью чисел Фибоначчи F или золотого сечения Φ:

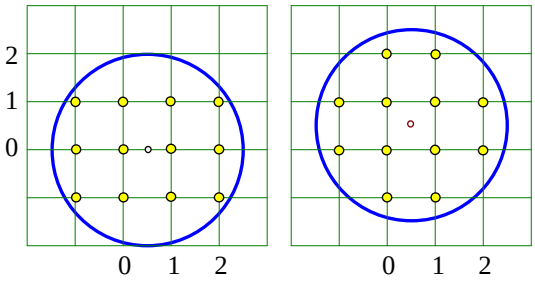
$$\frac{F_{2n}+F_n}{2}=\frac{\Phi^n-(-\Phi)^{-n}+(1+\Phi)^n-(1+\Phi)^{-n}}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sum_{k=1}^{4}\sin\left(\frac{\pi k}{5}\right)\sin\left(\frac{2\pi k}{5}\right)\left[1+2\cos\left(\frac{\pi k}{5}\right)\right]^n.$$

- Размерность примитивных узловых инвариантов Васильева восьмого порядка (A007478), как радикально нового взгляда на узлы [3, 4] из общего число 60 независимых инвариантов данного порядка (размерности).

Примечательно, что самих таких размерностей пространства инвариантов узлов Васильева на сегодня различают только **12**. В определенном контексте здесь прослеживается "узловое закручивание глобальных линий" космоса.

- Количество 8-кроссируемых узлов с $D2$ группой симметрии[4] (A052416).

  Количество 15-кроссируемых узлов с $D6$ группой симметрии (A052420).



- *Круговое* число: количество точек координатной сетки заключенных в круге радиусом 2 с центром в точках (0, 1/2) или (1/2, 1/2) равно **12** (A053414, A053415).

- Количество корневых деревьев идентичности высотой 3 или число наборов 3-го ранга (A038081): $2^{2^2}-2^2=\mathbf{12}$. Для следующего 4-го ранга: $2^{2^{2^2}}-2^{2^2}=65520$.

- Определитель обратной матрицы Гильберта $h_{i,j}=(i+j-1)^{-1}$ 2-го порядка (A005249)

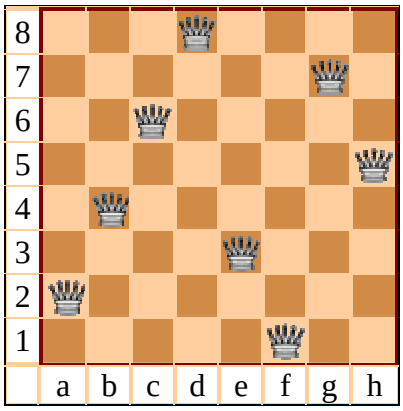
$$\left|\begin{pmatrix}1/1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{pmatrix}^{-1}\right|=\begin{vmatrix}1/1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{vmatrix}^{-1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^{-1}=12.$$

- Единственным нетривиальным (не равным 0 или 1) квадратом среди чисел Фибоначчи является **двенадцатое**, которое равно **12**^{2}.

---

[4] http://mathworld.wolfram.com/KnotSymmetry.html.

- Известная задача "О восьми ферзях"[5] имеет в точности **12**(!) фундаментальных решений.



Ферзь (королева, queen) – самая сильная шахматная фигура, перемещающаяся на любое число полей по вертикали, горизонтали и диагонали.

Общее количество расстановок, чтобы ни один из ферзей не находился под боем другого на стандартной 64-клеточной доске 8×8, составляет 92 решения с учетом преобразований симметрии: отражения от вертикальной и горизонтальной осей, отражения от диагоналей доски и поворотов на 90,180 и 270 градусов.

Но если решения, отличающиеся только действиями симметрии (вращение и отражение), считать как одно, то у головоломка сводится только к **12** решениям.

Есть и другие варианты. Так, на поле 4×5 можно расположить 4 не атакующих ферзей тоже **12** способами (A061990) [5, с. 41].

Или число вариантов размещения 4 не атакующих королей на поле 4×4 (A061593).

1	2	×	6
К	3	4	5

8	9	10	×
7	К	11	12

- Число вариантов расположения двух не атакующих коней на шахматном поле 4×2 (A061593).

- Способы размещения 4 ладей на шахматной доске 4×4 с топологией бутылки Клейна (A134983).

- Количество различных решений проблемы (симметричные решения исключены) размещения 6 ладей на поле 6×6 так, чтобы в каждом ряду, колонке и главной диагонали было только по одной ладье (A064280).

Эта задача похожа на предыдущую шахматную задачу, только с ладьями и дополнительным усилением условия по главной диагонали.

- Полное число покрытий "кубической доски" размером 3×3×3 минимальным числом шахматных коней (A110216). Производя отражения и вращения позиции с шестью конями

$$\begin{vmatrix} ooo & KKK & ooo \\ oKo & oKo & oKo \\ ooo & ooo & ooo \end{vmatrix}$$

, образуется **12** различных покрытий, где o – пустое поле, K – конь.

- Максимальное количество трёхцветных (1, 2, 3) шахматных ферзей на доске 4×4, расположенных так, чтобы ни один из них не атаковал своего (A006317).

Например (0 – пустые клетки):

1	2	1	3
3	0	0	2
2	1	3	1
3	0	2	0

2	0	0	1
3	1	3	2
2	0	0	1
1	3	2	3

3	0	0	1
1	2	3	2
3	0	0	1
2	1	2	3

- Решение «проблемы почтовой марки» [6] для 2 шт. с 4 номиналами (A001209).

---

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Eight_queens_puzzle, http://mathworld.wolfram.com/QueensProblem.html.

- Двузначные натуральные числа n с ненулевым мультипликативным цифровым корнем (МЦК) $b(n) = 4$: 14, 22, 27, 39, 40, 41, 58, 72, 85, 89, 93, 98.

МЦК[6] натурального числа n находится умножением цифр числа n с последующим повторением этого действия к полученному результату, пока не останется одна цифра.

Ноль в этой операции можно опускать или условно считать единицей.

Формализованное определение МЦК имеет вид (A051801, A051802):

$$b(n) = \begin{cases} n, & n < 10 \\ b(a_n), & n \geq 10 \end{cases}, \quad a_n = a_{\lceil n/10 \rceil} \cdot \left(k_n + 0^{k_n}\right), \quad k_n = n \pmod{10}, \quad a_0 = 1.$$

- Количество чисел с 4 простыми сомножителями (4-almost primes), включая повторения, в первой сотне натуральных чисел (A114106): 16, 24, 36, 40, 54, 56, 60, 81, 84, 88, 90, 100.

Это, по сути, обобщение простых и полупростых (бипростых) чисел соответственно с одним или двумя простыми сомножителями.

- Латинские квадраты[7] (ЛК) третьего порядка [7] (A002860)

1 2 3	1 2 3	1 3 2	1 3 2	2 1 3	2 1 3	2 3 1	2 3 1	3 2 1	3 2 1	3 1 2	3 1 2
2 3 1	3 1 2	2 1 3	3 2 1	1 3 2	3 2 1	1 2 3	3 1 2	1 3 2	2 1 3	1 2 3	2 3 1
3 1 2	2 3 1	3 2 1	2 1 3	3 2 1	1 3 2	3 1 2	1 2 3	2 1 3	1 3 2	2 3 1	1 2 3

- Количество изотопических классов (с повторением основных черт) латинских кубов третьего порядка (A099321).

- Идемпотентные самоортогональные латинские квадраты 5 порядка (A160367)[8].

0 2 1 4 3	0 2 1 4 3	0 2 3 4 1	0 2 4 1 3	0 3 1 4 2	0 3 4 1 2
3 1 4 0 2	4 1 3 2 0	3 1 4 2 0	4 1 3 0 2	4 1 0 2 3	2 1 0 4 3
4 3 2 1 0	3 4 2 0 1	4 0 2 1 3	3 0 2 4 1	3 4 2 1 0	3 4 2 0 1
2 4 0 3 1	1 0 4 3 2	1 4 0 3 2	2 4 1 3 0	2 0 4 3 1	4 2 1 3 0
1 0 3 2 4	2 3 0 1 4	2 3 1 0 4	1 3 0 2 4	1 2 3 0 4	1 0 3 2 4

0 3 4 1 2	0 3 4 2 1	0 4 1 2 3	0 4 3 1 2	0 4 3 2 1	0 4 3 2 1
4 1 3 2 0	2 1 3 4 0	3 1 0 4 2	2 1 4 0 3	2 1 0 4 3	3 1 4 0 2
1 0 2 4 3	1 4 2 0 3	4 3 2 0 1	1 3 2 4 0	4 3 2 1 0	1 0 2 4 3
2 4 0 3 1	4 0 1 3 2	1 2 4 3 0	4 2 0 3 1	1 0 4 3 2	4 2 1 3 0
3 2 1 0 4	3 2 0 1 4	2 0 3 1 4	3 0 1 2 4	3 2 1 0 4	2 3 0 1 4

Два латинских квадрата (ЛК) называются ортогональными, если различны все пары символов (a, b), где a – символ в некоторой клетке первого ЛК, b – символ в той же клетке второго ЛК.

ЛК называется самоортогональным (self-orthogonal Latin square – SOLS), если он ортогонален своему транспонированию.

Идемпотентная матрицей обычно называют матрицу A, которая не изменяется при умножении на себя $A^2 = A$. В такой матрице все собственные числа равны 0 или 1.

Латинский квадрат идемпотентен, если его диагональные элементы равны $L_{kk} = k$ [8].

---

[6] http://mathworld.wolfram.com/MultiplicativeDigitalRoot.html.

[7] Квадратная таблица $n \times n$, заполненная n различными символами так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце встречались все n символов (каждый по одному разу).

[8] J.H. van Vuuren. A repository of self-orthogonal Latin squares. – http://www.vuuren.co.za/main.php.

• Латинские квадраты основного изотопического класса порядка 6 (A003090, A002860)[9] [9; 10, с. 129–137]

0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5
1 0 3 2 5 4	1 2 0 4 5 3	1 2 0 4 5 3	1 2 0 5 3 4	1 2 0 5 3 4	1 3 4 0 5 2
2 4 5 0 3 1	2 0 1 5 3 4	2 0 1 5 3 4	2 0 1 4 5 3	2 3 4 1 5 0	2 0 1 5 3 4
3 5 4 1 2 0	3 5 4 0 2 1	3 5 4 2 1 0	3 5 4 1 0 2	3 0 5 4 1 2	3 2 5 4 0 1
4 2 0 5 1 3	4 3 5 1 0 2	4 3 5 0 2 1	4 3 5 0 2 1	4 5 1 2 0 3	4 5 0 1 2 3
5 3 1 4 0 2	5 4 3 2 1 0	5 4 3 1 0 2	5 4 3 2 1 0	5 4 3 0 2 1	5 4 3 2 1 0

0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5	0 1 2 3 4 5
1 3 4 0 5 2	1 3 4 0 5 2	1 3 4 0 5 2	1 4 5 2 0 3	1 5 3 2 0 4	1 5 3 4 2 0
2 0 1 5 3 4	2 4 5 1 3 0	2 5 3 1 0 4	2 5 1 0 3 4	2 4 5 0 1 3	2 3 1 5 0 4
3 4 5 1 2 0	3 5 0 2 1 4	3 2 5 4 1 0	3 2 4 1 5 0	3 2 4 1 5 0	3 4 0 1 5 2
4 5 3 2 0 1	4 0 3 5 2 1	4 0 1 5 2 3	4 3 0 5 2 1	4 3 0 5 2 1	4 2 5 0 1 3
5 2 0 4 1 3	5 2 1 4 0 3	5 4 0 2 3 1	5 0 3 4 1 2	5 0 1 4 3 2	5 0 4 2 3 1

Приведенный (нормализованный) ЛК – первая строка и первый столбец идут в порядке натурального ряда. Любой латинский квадрат может быть преобразован путем сортировки строк и столбцов.

Два приведенных ЛК находятся в одном и том же *изотопическом классе*, если один из них можно получить из другого перестановкой строк, столбцов и символов.

Чтобы попасть в *основной класс*, дополнительно разрешается делать перестановку в триплете (s, r, c) – (символ, строка, столбец)[10]. Например, символ s в строке r и столбце c может стать символом $r(c, s)$ строке c и столбце s, то есть $(s, r, c) \Rightarrow (r, c, s)$.

• Количество *магически-латинских квадратов* (МЛК) с положительными элементами < 4 (A173548).

Количество МЛК с магической суммой 6 или 7 (A173549).

МЛК имеет одинаковые суммы в строках и столбцах, и никакое число не повторяется в любом ряду или колонке. Симметриями считаются перестановки рядков и/или колонок, а также диагональное отражение [11].

Он подобен полумагическому квадрату (сумма диагоналей не обязательно равна магической сумме) за исключением того, что входы могут быть равными, когда они находятся в различных рядах и колонках.

Структура МЛК функционально зависит от магической суммы или наибольшего разрешённого элемента в квадрате.

Редуцированный магически-латинский квадрат 3×3 имеет следующую форму

$$\begin{array}{|ccc|}\hline 0 & b & 2a+b+c \\ a+b & a+b+c-d & d \\ a+b+c & a+d & b-d \\ \hline\end{array}$$

с ограничениями: $a \ge 0,\ \ b, c > 0,\ \ 0 \le d \le b,\ \ d \ne \left\{\frac{b-a}{2},\ \frac{b}{2},\ \frac{b+c}{2},\ \frac{a+b+c}{2},\ b-a,\ a+c,\ c\right\}$

и магической суммой $s = 2a + 2b - c$.

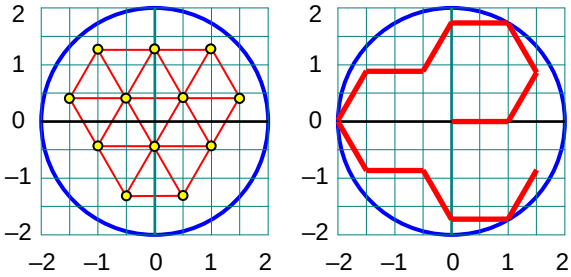
• Длина самого длинного однородного пути (разомкнутого или замкнутого) единичными шагами с поворотами на 120 градусов в кругу диаметром 4 (A122223) [12].

---

[9] http://cs.anu.edu.au/~bdm/data/latin.html.

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Latin_squares#Equivalence_classes_of_Latin_squares.

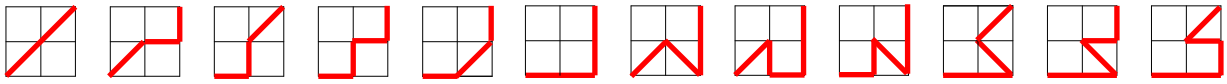
- Число точек в шестиугольной (гексагональной[11], равносторонней треугольной) решетке, покрытой круглым диском диаметр 4, если центр круга выбран так, что диск покрывает минимальное возможное число точек решетки (A125851).



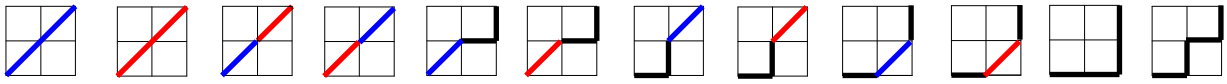
- Количество самонепересекающихся путей (Self-Avoiding Walk[12]) на решётке (сетке), соединяющих её противоположные углы 2×2 (A007764) – типа хода шахматной ладьи [13].

Ещё шесть подобно-симметричных (относительно диагонали) вариантов с первым ходом из угла по горизонтали. Всего **12**.

- Самонепересекающиеся решётчатые пути в плоскости из точки (0, 0) в точку (2, 2) с шагами $\{(i, j)\colon\ i+j>0,\ i, j \geq 0\}$, которые никогда не поднимаются над линией $y = x$ (A059435).



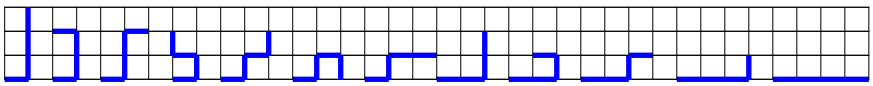
- Самонепересекающиеся решётчатые пути в плоскости из точки (0, 0) в точку (2, 2) с шагами (1,0), (0,1) и двух цветных (1,1) – красного и синего, которые никогда не поднимаются над линией $y = x$ (A047891).

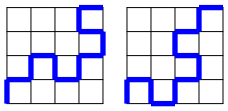


Также количество плоских корневых деревьев с $n = 3$ узлами и 3-цветными конечными вершинами.

В общем случае определяется рекуррентно $a_n = 2a_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-1}$, $a_1 = 1$ или аналитически через сумму $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} 3^k \cdot C_n^k \cdot C_n^{k-1}$.

- Самонепересекающиеся решётчатые пути длиной 4 в плоскости из точки (0, 0) с первым горизонтальным шагом в положительном направлении (1, 0), все вершины которых всегда неотрицательны (A046170)





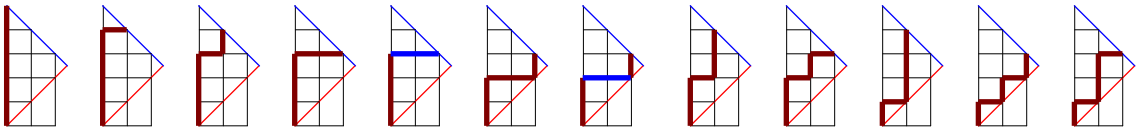
- Максимальная длина зигзагообразного самонепересекающегося пути на плоской 5×5 решётке (A034166).

- Решётчатые пути из начала координат (0,0) к прямой $x + y = 5$.

Они используют шаги из множества {(0,1), (1,0), (2,0), ...} и не опускаются ниже линии $y = x$ (A089324).

---

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Hexagonal_lattice.
[12] http://mathworld.wolfram.com/Self-AvoidingWalk.html, http://en.wikipedia.org/wiki/Self-avoiding_walk.



- Количество 3-нарных L-слов длиной 7, содержащих ровно пять единиц (A124723), равно **12**: 11111ab, 1111a1b, 111a11b, где ab = 22, 23, 32 или 33.

- Количество 4-нарных L-слов длиной 4, содержащих ровно две единицы (A124810), равно **12**: 1122, 1123, 1124, 1132, 1133, 1134, 1142, 1143, 1144, 1213, 1214, 1314.

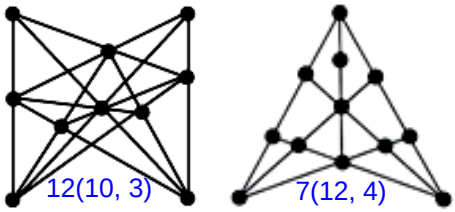
Пояснение. В математике (комбинаторике, компьютерных науках) L-слово (Линдон-слово, Lyndon word[13]) – определенный тип строки из алфавита – конечного множества символов-букв.

k-нарное L-слово длиной n – это n-символьная строка из алфавита размером k, которая является минимальным элементом в лексикографическом проявлении всех своих вращений. Минимальность подразумевает, что L-слово непериодическое и отличается от любого из своих нетривиальных вращений.

Если w – L-слово, и $w = uv$ – любая факторизация (разделение) на 2 непустые подстроки, то левая часть всегда лексикографически меньше правой подстроки $w < v$.

Это определение предполагает, что w – есть L-слово только тогда, когда существуют L-слова u и v такие, что $u < v$ и $w = uv$. Это свойство позволяет комплектовать все L-слова рекурсивно, что очень важно в компьютерных науках.

- Число **12** тесно связано с проблемой сада или посадки деревьев Орчарда: посадить n деревьев так, чтобы были ровные ряды с k деревьями в каждом ряду [15]. Так, **12** является максимальным числом линий $r(n, k)$ = 12(10, 3) при размещении 10 предметов по 3 в ряду (A003035). А вот из n = **12** деревьев по k = 4 в ряду можно выстроить (A006065) максимум 7 линий $r(n, k)$ = 7(12, 4).



- Алгебраическая степень или порядок многочлена (A118454), вещественный корень которого дает начало 8-цикла на бифуркационной фрактальной диаграмме логистического отображения (квадратичного, Фейгенбаума) [14].

- Число оптимальных полных линеек с n = 6, 12 сегментами-отрезками: $a_6 = a_{12}$ = **12**.

Речь идет о разреженных линейках[14], которые позволяет измерять любое целое расстояние в пределах длины, хотя многие метки отсутствуют.

12 оптимальных 6-сегментных линеек (L = 17)

0	1	2	3	8	13	17
0	1	4	10	12	15	17
0	2	5	9	15	16	17

0	1	2	6	10	14	17
0	1	8	11	13	15	17
0	3	5	9	15	16	17

0	1	2	8	12	14	17
0	2	4	6	9	16	17
0	3	7	11	15	16	17

0	1	2	8	12	15	17
0	2	5	7	13	16	17
0	4	9	14	15	16	17

Этими линейками (с шестью делениями, не считая 0) можно измерить все целые расстояния в диапазоне 1÷17 (A004137).

Например, для меток линейки 0, 1, 2, 3, 8, 13, 17:

$$(1,2,3)-0=(\mathbf{1,2,3}),\ 17-13=\mathbf{4},\ 13-8=\mathbf{5},\ 8-(2,1,0)=(\mathbf{6,7,8}),\ 17-8=\mathbf{9},$$
$$13-(3,2,1,0)=(\mathbf{10,11,12,13}),\ 17-(3,2,1,0)=(\mathbf{14,15,16,17}).$$

12 оптимальных 12-сегментных линеек (L = 58)

[13] http://en.wikipedia.org/wiki/Lyndon_word.
[14] http://en.wikipedia.org/wiki/Sparse_ruler, http://mathworld.wolfram.com/GolombRuler.html.

0	1	2	3	27	32	36	40	44	48	52	55	58
0	1	2	6	8	17	26	35	44	47	54	57	58
0	1	2	8	15	16	26	36	46	49	53	55	58
0	1	3	6	17	20	27	35	45	49	53	57	58
0	1	3	6	17	24	27	38	45	49	53	57	58
0	1	5	8	12	21	30	39	48	53	54	56	58

0	3	6	10	14	18	22	26	31	55	56	57	58
0	1	4	11	14	23	32	41	50	52	56	57	58
0	3	5	9	12	22	32	42	43	50	56	57	58
0	1	5	9	13	23	31	38	41	52	55	57	58
0	1	5	9	13	20	31	34	41	52	55	57	58
0	2	4	5	10	19	28	37	46	50	53	57	58

Для других значений сегментов количество линеек крайне мало: от 2 до 6 (A103299).

И в этом прослеживается особая уникальность числа **12**.

Заметим, что по расположению меток на линейке левые и правые линейки (в последней таблице) зеркально симметричны.

Линейка – это строгая конечная возрастающая последовательность меток, которым соответствуют неотрицательные числа. За первую отметку условно берётся 0.

Отрезок – расстояние между двумя соседними метками.

Порядок – число n+1 делений на линейке.

Длина L – наибольшее расстояние между двумя делениями (последняя метка).

Различают такие линейки:

– полные, если можно измерить все расстояния $1 \le d \le L$;

– совершенные, если нет полной линейки той же длины, но с меньшим количеством меток (способны измерить все расстояния в пределах длины, и существуют только для порядков меньших пяти);

– оптимальные, если не существует более коротких линеек того же порядка, то есть в каноническом представлении последняя метка – минимально возможная.

Выделяют также *линейки Голомба*[15], в которых расстояния между любыми двумя метками являются уникальными (не повторяются).

Но линейки Голомба не являются полными.

• **12** – количество массивов Костаса[16] (матриц перестановок) четвертого порядка, считая отличимыми вращения и повороты (A008404).

В предположение линейного увеличения x-координаты, массивы можно записать кратко как последовательность y-координат:

(1 2 4 3) (1 3 4 2) (1 4 2 3) (2 1 3 4) (2 3 1 4) (2 4 3 1) (3 1 2 4) (3 2 4 1) (3 4 2 1) (4 1 3 2) (4 2 1 3) (4 3 1 2)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \ldots$$

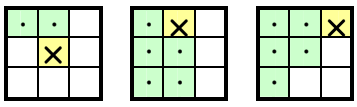
Для произвольных порядков справедливы условия:

– никакие 4 точки не образуют параллелограмм;

– отсутствуют 3 равноудаленные точки на одной прямой;

– нет двух линейных участков (сегментов), имеющих одинаковую длину и наклон.

Массивы Костаса можно рассматривать как двумерные аналоги одномерных линеек Голомба. Применяются в разработках радиолокационной техники.



• Детская игра "крестики-нолики" на поле 3×3 (A008907).

Первых ход имеет 3 варианта: центр, середина или угол. На центр – два ответа (угол или середина), на остальные – по пять.

В итоге два хода приводят к **12** позициям!

Эта задача адекватна формированию **12** матриц 3×3, содержащих одну единицу (крестик), одну двойку (точка) и остальные нули (A087074).

---

[15] http://en.wikipedia.org/wiki/Golomb_ruler, http://mathworld.wolfram.com/GolombRuler.html.

[16] Массив Костаса // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=23119616.

- Сумма первых субфакториалов !1 + !2 + !3 + !4 = 0 + 1 + 2 + 9 = **12**.

Субфакториал числа n ($!n$) – количество беспорядков порядка n или перестановок порядка n без неподвижных точек (A000166).

В математике неподвижная точка отображения – точка, которую отображение переводит в неё же, иными словами, решение уравнения $f(x) = x$.

В качестве иллюстрации беспорядка[17] можно рассматривать упорядоченные множества цифр, где каждая из цифр находится на "чужом месте", а не на своей оригинальной позиции: первой не является единица, вторая не равна двум, на месте третей нет тройки и т.д.

Для четырех цифр таких беспорядков ровно **12**:

(21) (231) (312) (2143) (2341) (2413) (3142) (3412) (3421) (4123) (4312) (4321).

К вычислению беспорядков сводится *задача о письмах*, *задача о встречах* и т. д.

Если n писем случайным образом положить в n различных конвертов, то вероятность того, что какое-то письмо попадет в свой конверт, определяется выражением

$$1-\frac{!n}{n!} \approx 1-\frac{1}{e} \approx 0{,}632\,.$$

Таким образом, ответ слабо зависит от количества конвертов и примерно равен константе 0,632... Нечто похожее на случайный порядок в общем беспорядке.

Примечательно, что это число достаточно близко к золотому сечению (ЗС) 0,618...

И в ряде вычислительных экспериментах на приближенность объекта исследования к ЗС, на самом деле не исключается его похожесть на упорядоченный беспорядок. То есть иное физическое содержание или другое реальное содержание.

Это позволяет добавить число $1-e^{-1}$ в копилку банка моделей BMV [16] с целью высвобождению золотой пропорции из искусственных цепких пут ложных конструкций типа квази- или псевдоЗС.

- Количество изоморфных классов комплексных 3-мерных ассоциативных алгебр [17] (A166115).

- Неизоморфные (по-разному устроенные) стохастические матрицы 4×4, в которых сумма элементов по строкам и столбцам равна 3 (A052280).

$$\begin{pmatrix}0&0&0&3\\0&0&3&0\\0&3&0&0\\3&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&0&2&1\\1&2&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&1&2&0\\1&2&0&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&1&1&1\\1&1&1&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&2\\0&2&1&0\\1&1&0&1\\2&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&3\\1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&3\\0&1&2&0\\1&1&1&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&3\\1&0&2&0\\0&2&1&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&3\\0&0&3&0\\1&2&0&0\\2&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&2\\1&0&2&0\\1&2&0&0\\1&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&2\\1&1&0&1\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

Половина из них (верхний ряд) – симметричные матрицы.

Объекты по насыщенности числами в основном имеют разную структуру, хотя есть и похожие матрицы (желтые с 4 двойками и зеленые с 3 двойками), но с разными определителями. Подобное различие обеспечивает неизоморфные свойства, то есть никакие две матрицы не могут быть получены одна из другой обычной неоднократной перестановкой строк и/или столбцов.

---

[17] http://mathworld.wolfram.com/Derangement.html.

- Число некоммутативных ассоциативных схем **12**-го порядка равно **12** (A057498).

Это, конечно, уникальный случай. Схемы были введены Александром Гротендиком для расширения понятия алгебраического многообразия, как топологические пространства вместе с коммутативными кольцами для всех своих открытых множеств[18] (современная алгебраическая геометрия и коммутативная алгебра).

- Такое число, что **12**-кратные суммы[19] пятой, седьмой и всех нечетных степеней, начиная с 11, являются полиномами от x с целочисленными коэффициентами (A064538):

$$12\sum_{n=1}^{x} n^5 = x^2(x+1)^2\left(2x^2+2x-1\right);$$

$$12\cdot 2\sum_{n=1}^{x} n^7 = x^2(x+1)^2\left(3x^4+6x^3-x^2-4x+2\right)\ldots$$

- Наименьшее число, для которого репьюнит $(10^{\mathbf{12}}-1)/9 = 1_{12} = 111111111111$ приводит к пяти простым числам при замене одной из единицы на ноль (A065083):

111111111101, 111111110111, 111111011111, 111011111111, 101111111111.

Следующие подобные числа только 42, 162 приводят соответственно всего лишь к 7 и 8 простым числам.

- Отношение конкатенации первых четырех квадратов и конкатенации самих натуральных чисел (A067102) $14916/1234 = 12{,}09 \approx \mathbf{12}$.

- Подмножества из (1 2 3 4 5), содержащие только одно простое число (A089821)

(2), (2 1), (2 4), (3), (3 1), (3 4), (5), (5 1), (5 4), (1 2 4), (1 3 4), (1 4 5).

- Количество упорядоченных бинарных представлений Гольдбаха для числа 100 (с учетом перемены слагаемых) или количество простых, дающих в паре 100 (A107318):

$$3+97 = 11+89 = 17+83 = 29+71 = 41+59 = 47+53 = 100.$$

Примечательно, что если для 100 мы имеем 6 возможных сумм, то в общем виде бинарная проблема Гольдбаха (любое чётное число большее двух можно представить в виде суммы двух простых чисел) до сих пор не решена.

- Даёт начало двум замечательным последовательностям чисел (A112718, A112719) $n = d_1 d_2 \ldots d_k$ таким, что $\pi(n) = \sum_{m=1}^{k} m^{d_m}$ и $\pi(n) = \sum_{m=1}^{k} d_m^m$,

где d_m – цифры в десятичном представлении n,

$\pi(n)$ – количество простых чисел $\le n$ (на отрезке от 1 до n).

Действительно, $1^2 + 2^2 = 5 = \pi(\mathbf{12}) = \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

- Число покрытий из $1\ldots n$ циклическими словами длиной n так, что каждое значение от 1 до n появляется ровно 3 раза. То есть, объединение всех букв во всех словах данного покрытия даёт (1,1,1, 2,2,2, ..., n, n, n).

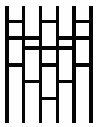
Повторение слов в данном покрытии не допускается (A110105):

---

[18] http://en.wikipedia.org/wiki/Scheme_(mathematics).

[19] http://mathworld.wolfram.com/PowerSum.html.

(111 222 333), (111 223 233), (112 122 333), (112 133 223), (113 122 233), (113 123 223), (113 132 223), (112 132 233), (113 133 222), (122 123 133), (122 132 133), (112 123 233).



- Минимальное число сравнений, необходимых для 6-элементной сортирующей сети (A003075).

- Размер минимального покрытия кода длиной n = 8 и радиусом покрытия 2 (A029866).

- Сумма неквадратных чисел (≠ 1, 4, 9...) от 1 до **12** является квадратом (A065992):

$$2+3+5+6+7+8+10+11+12=64=8^2.$$

- Числа **12** и 2·**12** = 24 не могут быть представлены в виде суммы ненулевых чисел[20] (A118426): квадрата, удвоенного квадрата и треугольного числа – $x^2+(2y)^2+z(z+1)/2$

Прочее

- Октава делится на **12** полутонов, в том числе 7 нот и 5 диезов. То есть **12** не делится без остатка на 5 и 7, но сумма 5 + 7 = 12.

- В равномерно темперированном музыкальном строе октава делится на математически равные интервалы, чаще всего на **12** полутонов $\left(1:\sqrt[12]{2}\right)$. Такой строй господствует в европейской профессиональной музыке с 19 века до наших дней, завоевал признание и фактическим стал стандартом.

- Число *жонглерских нотаций*[21] (site swap, сайтсвоп) с 3 шарами и периодом 3 (A065179):

423, 441, 450, 522, 531, 603, 612, 630, 711, 720, 801, 900.

Это пространственно-временная диаграмма, на которой отмечаются руки (правая, левая), предметы и порядок действий. Используется для записи трюка и позволяет отследить порядок, в котором предметы кидаются и ловятся.

Среднее арифметическое записи означает количество жонглируемых предметов.

Не любой набор цифр является действующей нотацией.

Броски, записанные четными цифрами, ловятся той же рукой, которой предмет был брошен, броски, записанные нечетными цифрами, ловятся другой рукой.

- **12** – это число простых жонглирующих узоров с 4 шарами (A007871).

- Даёт число дней в году:

$$\frac{(12-2)^2+(12-1)^2+(12-0)^2+(12+1)^2+(12+2)^2}{2}=\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{2}=365.$$

- Существует кубическая 12-головоломка[22] с номерами условного дозвона на каждой грани в виде 24 чисел в диапазоне от 3 до 9.

---

le Theorem – http://mathworld.wolfram.com/Square-TriangleTheorem.html.

[21] http://en.wikipedia.org/wiki/Siteswap#Multi-handed_site-swap.

[22] http://www.jaapsch.net/puzzles/turn12.htm.

Конечная цель: установить наборы так, что на всех 12 ребрах куба встречается пара чисел с суммой 12.

Есть и более простые версии с символами или рисунками на боковых гранях куба.

- Симметричные вторичные структуры молекул рибонуклеиновых кислот (РКН) с 8 нуклеотидами (A088518).

В общем случае можно вычислить рекуррентно:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - \left(K_{n/2-1} \text{ if } n \pmod 2 = 0\right)$, где K – обобщенные числа Каталана $K_{n+1} = K_n + \sum_{k=1}^{n-1} K_k K_{n-k-1}$: 1, 1, 1, 2, 4, 8, 17, 37, 82, 185 ... (A004148).

- Базовое число широкой группы цеолитов – большого класса близких по составу и свойствам минералов, водных алюмосиликатов кальция и натрия из подкласса каркасных силикатов. Благодаря своей структуре цеолиты способны к ионному обмену, а также селективно выделять и вновь впитывать различные вещества.

- **12** – максимальное число в "спектре масс" элементарных частиц [18].

- У человека **12** пар рёбер, **12** суставов на руках и ногах (по 3 на одной конечности), **12** позвонков в шейном (7) и поясничном (5) отделах позвоночника = **12** + 7 + 5.

- Стандартная модель[23] (теоретическая конструкция) физики элементарных частиц, описывающая их электромагнитное, слабое и сильное взаимодействие, выделяет **12** лептонов (включая античастицы), **12** кварков (включая античастицы) и **12** бозонов (8 глюонов, 3 калибровочных бозона и 1 фотон).

- В учебниках биологии человека обычно повествуют, что для зачатия достаточно одного сперматозоида. В действительности это не совсем так [19].

Сегодня известно, что яйцеклетка должна быть полностью окружена сотнями сперматозоидов, в противном случае оплодотворение невозможно. Из этих сотен **12** (двенадцать) сперматозоидов собираются в некую (пока не до конца определенную) структуру у поверхности яйцеклетки, что помогает одному из них проникнуть внутрь яйца.

Один сперматозоид в одиночку проникнуть сквозь мембрану без помощи дюжины других не может. За исключением искусственных условий, когда оплодотворением управляет человек.

- Время перемещения Солнца вдоль эклиптики на 30° с полным переходом из одного зодиакального созвездия в другое, составляет 2160 = 72·30 = **12**·**12**·5·3 лет.

Время одного цикла прецессии Земной оси равно 25920 = 360·72 = **12**·**12**·**12**·5·3 лет.

- Гавайский язык обладает одной из самых простых фонетических систем: **12** фонем, в алфавите **12** букв. Он относится к аналитическим языкам, в которых слово служит для передачи лексического значения, а грамматический смысл передается отдельно с помощью артиклей, предлогов, порядка слов, интонации и др.

Литература.

1. *Weisstein E.W.* Double-Free Set // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/Double-FreeSet.html.

[23] http://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model.

2. *Koseleff P.*, *Pecker D.* Conway polynomials of two-bridge links // Cornell University Library, 2010. – http://arxiv.org/abs/1011.5992.

3. *Duzhin S.* Vassiliev Invariant // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/VassilievInvariant.html.

4. *Kneissler J.A.* The number of primitive Vassiliev invariants up to degree twelve // arXiv:q-alg/9706022v1, 18 Jun 1997. – http://arxiv.org/PS_cache/q-alg/pdf/9706/9706022v1.pdf.

5. *Kotesovec V.* Non-attacking chess pieces: 3 edition. – Praha, 2011. – 348 p. – http://web.telecom.cz/vaclav.kotesovec/math.htm.

6. *Pfoertner H.* Minimal number of points in the square lattice covered by circular disks. – http://www.randomwalk.de/sequences/a123689.pdf.

7. *Weisstein E.W.* Latin Square // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/LatinSquare.html.

8. *Burger A.P.*, *Kidd M.P.*, *Vuuren J.H.* Enumeration of isomorphism classes of self-orthogonal Latin squares. – 2010. – http://www.vuuren.co.za/data/SOLS_Repository/SOLSEnum.pdf.

9. *Giancarlo Urzua*. On line arrangements with applications to 3-nets // Cornell University Library, 2009. – http://arxiv.org/abs/0704.0469.

10. *D´enes J.*, *Keedwell A.D.* Latin squares and their applications. – Academic Press, 1974.

11. *Beck M.*, *Zaslavsky T.* Six Little Squares and How Their Numbers Grow. – arXiv:1004.0282v2, 5 Jun 2010. – http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1004/1004.0282v2.pdf.

12. *Pfoertner H.* Examples of compact self avoiding paths on a honeycomb net. – http://www.randomwalk.de/sequences/a122223.pdf.

13. *Bousquet-M´elou1 M.*, *Guttmann A.J.*, *Jensen I.* Self-avoiding walks crossing a square // Cornell University Library, 2008. – http://arxiv.org/PS_cache/cond-mat/pdf/0506/0506341v2.pdf.

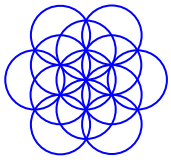
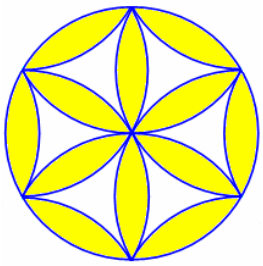
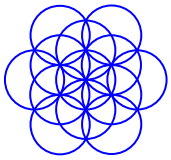
14. *Weisstein E.W.* Orchard-Planting Problem // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/Orchard-PlantingProblem.html.

15. *Weisstein E.W.* Logistic Map // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/LogisticMap.html.

16. *Василенко С.Л.* Квазизолотая пропорция в структурированных системах // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16054, 30.08.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161694.htm.

17. *Rakhimov I.S.*, *Rikhsiboev I.M.*, *Basri W.* Complete lists of low dimensional complex associative algebras // arXiv:0910.0932v2. – 7 Oct 2009. – http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0910/0910.0932v2.pdf.

18. *Danoyan Y.* Maximum number 12 on the spectrum of mass of elementary particles. – http://vixra.org/pdf/0907.0014v1.pdf.

19. *Мельхиседек Д.* Древняя тайна Цветка Жизни: Пер. с англ. – М.: София, 2010. – Т. 1. – 302 с.; Т. 2. – 612 с. – http://www.surajamrita.com/FOL/folContent.html.

© ВаСиЛенко, 2011