С.Л. Василенко

Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства. Ч. 2. Геометрия, теория графов

Вначале было число, и имя ему ничто.
Потом было слово, и имя ему всё.

Продолжаем наше изложение о формировании образа числа 12, уникальные свойства которого являются одной из главенствующих формообразующих структур в моделировании-описании мироздания.

С геометрией, как выбранным предметом исследований, здесь всё ясно. Собственно с неё и начиналось развитие математики, когда ещё не были придуманы даже числа.

И число 12, как будет показано ниже, здесь играет исключительную роль

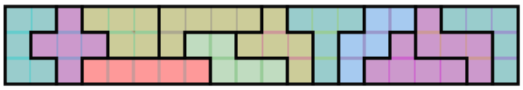
Теория графов гораздо моложе. Она восходит к Л. Эйлеру, сформулировавшему и решившему задачу о семи кёнигсбергских мостах (1736).

В общем смысле граф (сеть) представляется как множество вершин (точек, узлов), соединенных рёбрами (дугами).

Теория графов находит применение в ГИС-технологиях, химии (описание структур, идентификация путей сложных реакций, определение возможных изомеров у углеводородов и других органических соединений), информатике и программировании, в коммуникационных и транспортных системах, экономике, логистике и др.

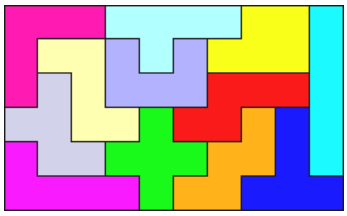
Итак, число 12… (продолжение)

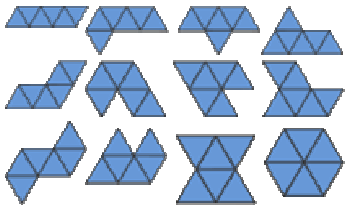
Геометрия и вокруг неё

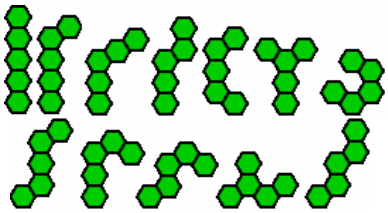


- Количество фигурок пентамино (полимино с 5 клетками-квадратиками, A000105) [1].

В своей совокупности они образуют разные прямоугольники, а значит, ими можно замостить плоскость.







- Фигурки полимондов из 6 равносторонних треугольников (polyiamond[1], A103472).

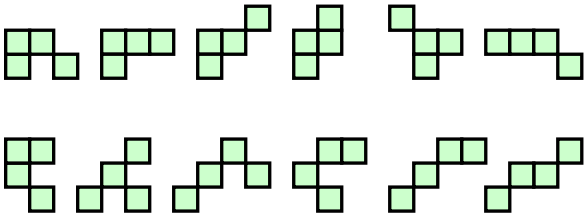
- Количество фигурок (fusene[2], planar trees of hexagons, polyhexes) из $n = 5$ правильных шестиугольников, объединенных так, что отсутствуют точки схождения более чем двух ячеек (hexagon catafusenes, Harary and Read, 1970; A002216).

Они имеют максимальный периметр, равный $4n + 2 = 22$ (A038142).

---

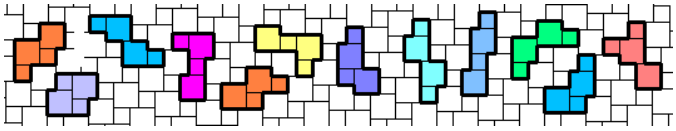
[1] http://mathworld.wolfram.com/Polyiamond.html, http://www.srcf.ucam.org/~jsm28/tiling/

[2] http://mathworld.wolfram.com/Fusene.html. – *Здесь и далее подобные ссылки приведены с целью получения отправной точки, в том числе и по литературным источникам, для последующего более широкого ознакомления и углубленного изучения.*



• Количество 4-клеточных полиплетов[3], не имеющих осей зеркальной симметрии (A030235).

Это полимино-подобные фигурки, образованные путем присоединения квадратов друг к другу сторонами и/или углами.



• Число связанных фигур, сформированных из двух больших и двух маленьких квадратов (2-биквадраты) на замощенной плоскости (A121195[4]).

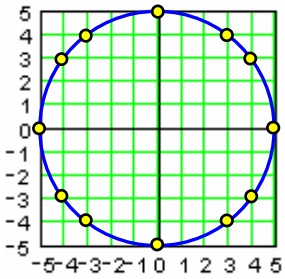
• Наибольшее значение *координационного числа* – количества ближайших равноудаленных одинаковых частиц в кристаллической решетке. Это характерно для металлов с плотнейшей кубической или гексагональной упаковкой. Значение 12 соответствует теоретическому пределу в проблеме упаковки одинаковых сфер.

• Периметр классического египетского треугольника со сторонами $3:4:5$ $(3+4+5=12)$. Следующий примитивный пифагоров треугольник содержит число 12 посредине $5^2 + 12^2 = 13^2$ (A020883). Другой возможный вариант: $12^2 + 35^2 = 37$.

• Минимальная площадь равнобедренного треугольника с целочисленными сторонами $(a, b, c) = (5, 5, 6)$. По формуле Герона площадь равна $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = (a+b+c)/2$ – полупериметр фигуры. То есть $p = 8$ и $S = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = \mathbf{12}$.

Примечательно, что следующий треугольник такого рода (не считая масштабирование вышеприведенного, вроде 10, 10, 12) имеет стороны (16, 17, 17) и площадь **120**!

А вообще существует ровно два треугольника (A051586) с целочисленными сторонами и площадью 12: (5, 5, 6) и (5, 5, 8). Каждый из них составлен из двух египетских треугольников, приставленных друг к другу сторонами 3 или 4.



• Число решётчатых (целочисленных) точек (i, j) на окружности с центром (0, 0) и "квадратичным радиусом" $5 = 1^2 + 2^2$: четыре точки формы $0-5$ $(\pm5, 0)$, $(0, \pm5)$ и восемь точек формы $3-4$ $(3^2 + 4^2 = 5^2)$: $(\pm3, \pm4)$, $(\pm4, \pm3)$.

Всего $4+8=\mathbf{12}$ (A071385).

Примечательно, что 12 – максимальное число точек для вещественных (нецелочисленных) радиусов 5÷8. Следующее число точек – 16 для радиуса $\sqrt{65}$ (A071339).

Аналогично **12** – число точек решётки на сфере радиусом $\sqrt{2}$, имеющих координаты: $(0, \pm1, \pm1)$, $(\pm1, 0, \pm1)$, $(\pm1, \pm1, 0)$.

• Контактное число[5] в трёхмерном пространстве.

---

[3] http://mathworld.wolfram.com/Polyplet.html.
[4] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences™ (OEIS™) – http://oeis.org/.
[5] Контактное число // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=25527367.

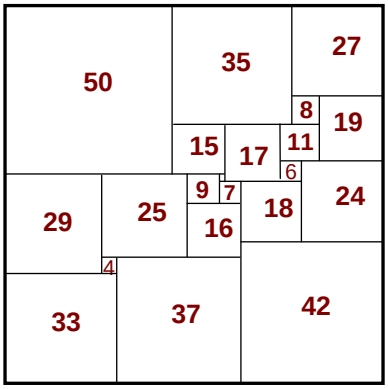
Контактное число (*kissing number*) τ_n – максимальное количество непересекающихся сфер одинакового радиуса, которые могут одновременно касаться одной такой же сферы в n-мерном евклидовом пространстве (шары не проникают друг в друга).

$$\tau_3 = 12.$$

- Ключевая величина для контактных чисел [2]:

$$\tau_2 = 12/2 = 6,\ \ \boldsymbol{\tau_3 = 12},\ \ \tau_4 = 12\cdot 2 = 24,\ \ \tau_6 = 12\cdot 6 = 72,\ \ \tau_8 = 12\cdot 20 = 240.$$

В этом контексте можно сказать, что "контактно-связанный мир" – двенадцатеричен, но никак не десятеричен. Это свидетельствует о гармоничности 12-частного деления мира, при котором целое делится на частное без нарушения целостности частей [3].



- Количество простых совершенных "квадрированных квадратов" (КК) 23-го порядка (A006983, A181735).

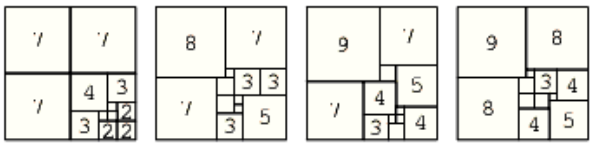
КК – квадрат, который можно разрезать на несколько меньших квадратов [4]. Их количество называют порядком.

Простой КК не содержит меньшие КК. То есть в простом разбиении квадрата никакое подмножество квадратов не образует прямоугольник (не считая отдельных квадратов) [5].

Совершенный КК состоит из попарно неравных квадратов.

На рисунке для примера представлен единственный совершенный "квадратный квадрат" 21-го порядка (Bouwkamp and Duijvestijn, 1992), где в центре расположен еле заметный квадратик 2×2, а числа означают величины сторон.

Примечательно, что «кубирование куба», то есть разбиение куба на конечное число попарно неравных между собой кубов принципиально невозможно.



- Наименьшее число квадратиков (необязательно разных) для разбиения квадрата $n\times n$ при $n = 14\div 17$ (A005670, проблема Перкинса).

- Существует ровно 12 типов многогранников с 12 ребрами.

- "Пронизывает" правильные многогранники (платоновы тела):
  - число рёбер куба и октаэдра;
  - число граней додекаэдра[6], $60=12\cdot 5$ плоских углов на его поверхности;
  - число вершин икосаэдра.

- Число вершин кубооктаэдра (*cuboctahedron*) [6] – полуправильного многогранника (грани: 8 правильных треугольников и 4 квадрата) и число граней двойственного ему ромбододекаэдра (12 одинаковых ромбов).

- Варианты разбивок сферы точками $n = 18$ на треугольники с минимальной степенью 5 (A081621).

Допускаются степени, большие, чем 5 или 6, а также более 12 вершин со степенью 5.

---

[6] Существует также пентагон-додекаэдр – с 12 гранями в форме неправильных пятиугольников. Визуально он похож на додекаэдр, но имеет не икосаэдрическую, а кубическую симметрию.

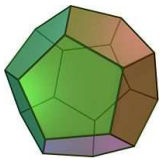
В интерпретации выпуклых многогранников здесь имеем соответствующее соотношение вершин (В), граней (Г) и рёбер (Р): В = 18, Г = 32, Р = 48 так, что по формуле Эйлера $В + Г = Р + 2$.

Для $n \geq 12$ многогранники имеют обычно 12 вершин степени 5 (число ребер при вершине, как в икосаэдре) и $n - 12$ вершин степени 6. Все известные числовые решения проблемы максимального объема (A081314) обладают этим свойством.

- Варианты разбивок сферы точками $n = 10$ на треугольники с минимальной степенью 4 (A000103).

В интерпретации выпуклых многогранников здесь имеем соответствующее соотношение вершин (В), граней (Г) и рёбер (Р): В = 10, Г = 16, Р = 24.

Число $n = 8$ приводит к правильному многограннику – октаэдру.



- Количество маршрутов длиной 6 по ребрам додекаэдра между двумя противоположными вершинами (A054883).

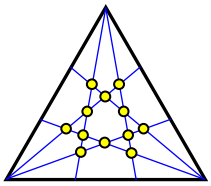
- Максимальное число сфер единичного объема, которые могут быть упакованы в сфере объемом 25 и 26 (A084827).

- Площади k-угольников, вписанных в окружность радиуса 1, равны $\frac{k}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{k}\right)$ и имеют целочисленные значения 2 и 3 соответственно только для квадрата и 12-угольника!

- Целая часть площади поверхности шара единичного радиуса $4\pi \cdot 1^2 \approx \mathbf{12}$.

- Количество способов раскраски рёбер тетраэдра с помощью $n = 2$ цветов (A046023).

В общем случае определяется по формуле: $\left(n^6 + 3n^4 + 8n^2\right)/12$.



- Количество внутренних точек пересечения прямых, проходящих через углы равностороннего треугольника и $n-1$ точек, образуемых при делении сторон на n равных частей-отрезков [7].

При $n = 3$ в треугольнике содержится ровно **12** таких точек пересечения (A091908).

- Количество 5D гиперкубов в 6-мерном гиперкубе (A054849).

Действительно, с различными смещениями n-перестановки ($n = 6$) из 3 объектов (u, v, z) с повторениями, содержащие ровно пять u:

uuuuu$\underline{v}$, uuuu$\underline{v}$u, uuu$\underline{v}$uu, uu$\underline{v}$uuu, u$\underline{v}$uuuu, $\underline{v}$uuuuu, uuuuu$\underline{z}$, uuuu$\underline{z}$u, uuu$\underline{z}$uu, uu$\underline{z}$uuu, u$\underline{z}$uuuu, $\underline{z}$uuuuu.

- Основа структурирования архимедовых тел.

Архимедовы тела – выпуклые изогональные (с равными углами) многогранники, основанные на непересекающихся правильных выпуклых многоугольниках двух или более различных типов, расположенных так, что сходящиеся в каждой вершины ребра имеют одинаковую длину[7].

13 архимедовых тел имеют следующую структуру n-угольников (запись n_m означает m правильных n-угольников):

$3_8 4_6$, $3_8 4_{18}$, $3_{32} 4_6$, $3_{20} 5_{12}$, $3_{80} 5_{12}$, $3_4 6_4$, $3_8 8_6$, $3_{20} 10_{12}$, $6_8 4_6$, $6_{20} 5_{12}$, $3_{20} 4_{30} 5_{12}$, $4_{30} 6_{20} 10_{12}$, $4_{12} 6_8 8_6$.

---

[7] http://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSolid.html.

Характерной особенностью данной группы тел является наличие обособленной пары тел: скошенного куба (*Snub cube*, $3_{32}\,4_6$) и скошенного додекаэдра (*Snub dodecahedron*, $3_{80}5_{12}$), которые являются хиральными[8] (др.-греч. *рука*). Такой многогранник имеет две различные формы, которые являются зеркальным отображением друг от друга. А само тело не совпадает со своим зеркальным отображением, то есть не может быть совмещена с ним только вращениями и параллельными переносами.

Таким образом, множество архимедовых тел имеет 12-развернутую структуру по схеме 12 = 11+1: 11 амфихиральных тел + подмножество хиральных тел.

Вот такое своеобразно-уникальное проявление свойств числа 12 через структурированное разнообразие (сочетание) правильных геометрических форм.

Приведенные особенности, конечно, далеко неполные.

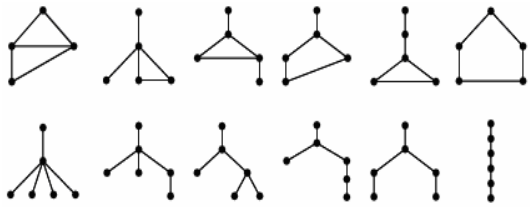
Подобные проявления числа 12 поджидают нас практически повсеместно.

Теория графов

Посмотрим теперь на отдельные проявления 12 в теории графов...

- Существует только 12 кубических (регулярных графов степени 3, каждой вершине инцидентны три ребра) дистанционно-транзитивных графов [8].

- Наличествует ровно 12 типов 12-реберного "многогранного" графа (polyhedral graph, A002840) – ненаправленного графа, сформированного на базе вершин и ребер выпуклого многогранника, или 3-связного (при каждой вершине не менее трёх рёбер) простого графа.



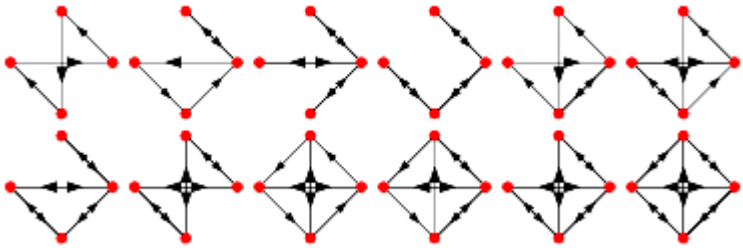
- Количество *связанных графов* с 5 ребрами (A002905). Графы содержат ровно одну компоненту связности, то есть между любой парой вершин существует как минимум один путь.

- Число линейных *связанных графов* с 5 вершинами (A003089).

- Количество 2-цветных помеченных графов с 3 узлами (A058872).

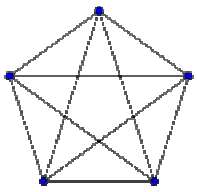
- Количество ориентированных эйлеровых графов (A058337) с 4 вершинами [9].

Они содержат эйлеровы циклы[9], проходящие через все рёбра только по одному разу (вершины могут повторяться). Орграф является эйлеровым тогда и только тогда, когда в каждой вершине число входящих и исходящих ребер равно между собой и четно.



[8] Хиральность (математика) // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=31930572.
[9] http://ru.wikipedia.org/?oldid=31267576.

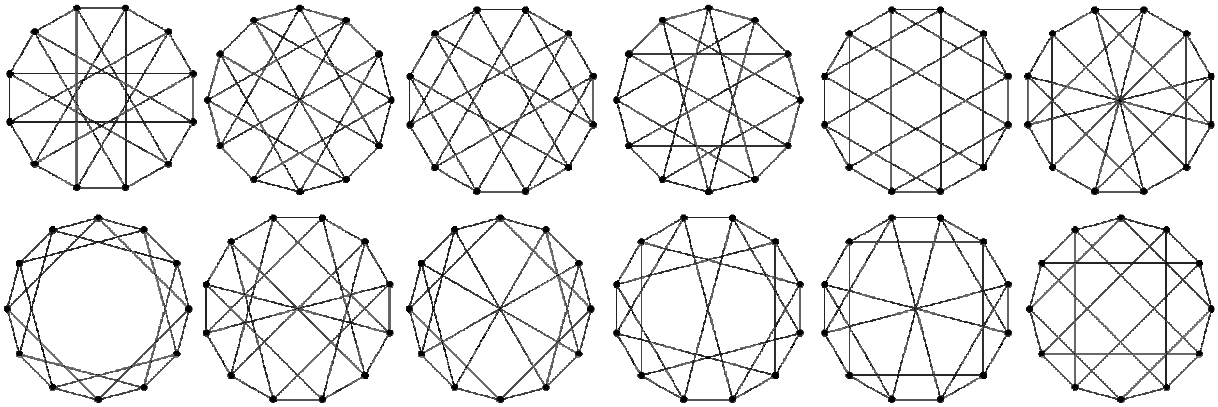
- Максимальное число ребер в 9-узловом графе обхвата 5 (длины наименьшего простого цикла, если он есть) (A006856).

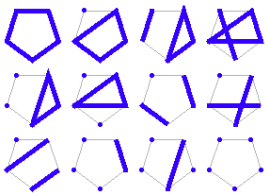


- Число неизоморфных турниров[10] на 5 вершинах (A000568). *Турнир* – направленный (ориентированный) полный граф, полученный присвоением направлений для каждого ребра. Полный граф – простой граф, в котором каждая пара различных вершин смежна. Для n вершин он имеет $n(n-1)/2$ рёбер. Название соответствуют турниру, в котором каждый член группы игроков играет со всеми другими игроками.

- Число переключений классов в турнирах из $n=7$ вершин с точностью до изоморфизма (A049313). Иногда называют как эквивалентность Зейделя. Это отношение эквивалентности, при котором помеченные графы на множестве из n вершин разбиваются на классы эквивалентности размером 2^{n-1}. Два турнира T_1 и T_2 на одинаковом множестве вершин X имеют эквивалентные переключения, если X имеет подмножество Y такое, что T_2 возникает из T_1 путем переключения всех дуг между Y и его дополнением $X \setminus Y$ [10].

- Рассматриваются *связные* (все вершины связаны) *регулярные* (степени всех вершин равны) *простые* (без кратных ребер и петель) графы. Количество таких графов на 12 вершинах со степенью вершины (валентностью) 4 равно в точности числу вершин 12 (A033886). Это единственно-уникальный такой случай.

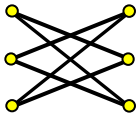




- Количество графов с 5 вершинами таких, что если n точек соединяются, то обязательно в n-угольник (выпуклый) [11] с образованием простого цикла, не содержащего внутри других вершин (A084423).

- Число замкнутых Гамильтоновых циклов в 3-мерном кубе, содержащих все вершины графа только по одному разу (A003042).

- Количество направленных Гамильтоновых путей в 3-граф-короне[11].



Граф-корона – граф с двумя наборами вершин u_i, v_i и рёбрами от u_i к v_j при $i \neq j$. То есть все вершины между наборами связаны, за исключением вершин, расположенных напротив.

Гамильтонов путь – путь, содержащий каждую вершину графа ровно 1 раз.

В 3-графе-короне от каждой из 6 вершина имеет степень 2, что и даёт 12 путей.

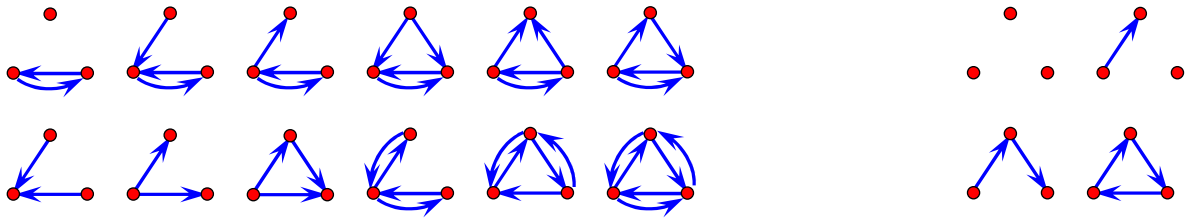
---

[10] http://mathworld.wolfram.com/Tournament.html, http://en.wikipedia.org/wiki/Tournament_(graph_theory).
[11] http://mathworld.wolfram.com/CrownGraph.html.

- Количество 3-связных двудольных графов с девятью непомеченными вершинами (A128953).

Двудольный граф[12] (биграф) – граф, множество вершин которого можно разбить на две части так, чтобы каждое ребро соединяло какую-то вершину одной части с какой-то вершиной другой части, то есть не существует ребра, соединяющего две вершины из одной и той же части.

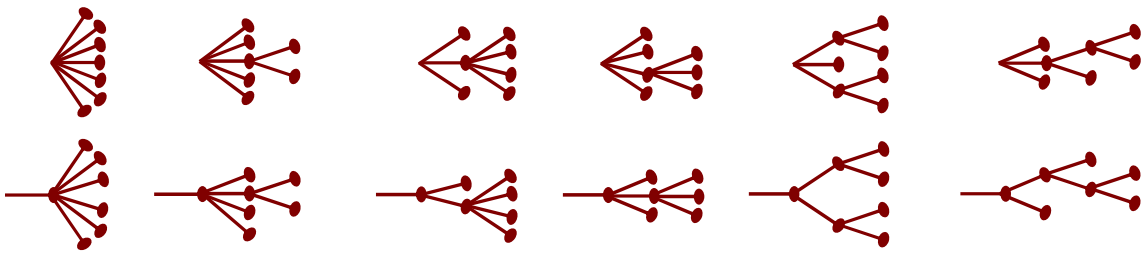
- Орграфы с тремя непомеченными вершинами (A127909), за вычетом четырёх базовых неориентированных графов (A000088). Иначе говоря, 12 – это 3-узловые графы, в которых есть повторяющиеся рёбра и/или вершины, в которых одновременно сходится (расходится) несколько дуг.



- Число деревьев с 8 вершинами и центром[13] – вершиной, расстояние от которой до самой дальней вершины минимально (A000676). Дерево – связный (все вершины связаны), ациклический (не имеющий циклов) простой (нет кратных ребер и петель) граф.

- Число помеченных 3-узловых деревьев с 2-цветными листьями (*leaves*) – концевыми вершинами или узлами со степенью 1 (A038054, A038055).

- 7-узловые корневые деревья без вершин с единичной степенью исхода (из которых не исходит лишь одна дуга) (A059123). Или 8-узловые корневые деревья, в которых все узлы имеют степень, отличную от двух (A001679).



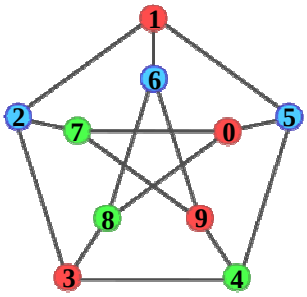
- Количество двоичных или бинарных деревьев (древовидных структур данных, в которых каждый узел имеет не более двух потомков – детей) длиной пути 8 (A095830).

- Замкнутые 3-шаговые пути на полном графе с 5 вершинами от данной вершины (A109499). Действительно, из каждой вершины имеем 4 возможных направлений по ребрам, но возвратов уже только три. Всего: 4·3 = **12**.

---

[12] Двудольный граф // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=29386831.
[13] http://mathworld.wolfram.com/CenteredTree.html.

- Замкнутые пути длиной 5 в графе Петерсена (A091000): из каждой "внешней" вершины (1,2,3,4,5) по два цикла типа 3-8-6-9-4-3 и 3-8-6-1-2-3, а также два самостоятельных цикла: 1-2-3-4-5-1 и 6-8-0-7-9-6.



Путь – последовательность вершин, соединенных дугой.

Сам по себе граф Петерсена – достаточно простой объект теории графов с интересными свойствами:

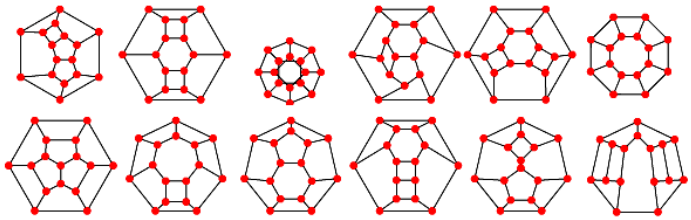
– минимальный кубический граф (из каждой его вершины выходят 3 ребра) с индексом самопересечения 2;

– хроматическое число 3 (минимальное число цветов, в которые можно раскрасить вершины так, чтобы концы любого ребра имели разные цвета);

– 5-клетка – кубический граф обхвата 5 (длина наименьшего цикла) с минимально возможным числом вершин;

– имеет максимальное число 2000 остовных деревьев из любых 10-узловых кубических графов;

– между любыми двумя вершинами существует единственный путь длины не более двух и др.[14]



- Количество 16-вершинных кубических (при вершине три ребра) многогранных графов (A000103, треугольно-свободных) [12].

- Число помеченных отношений на $n = 3$ узлах, в которых самая длинная цепочка имеет 2 узла (A055531). В общем случае подобные отношения равны $a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \left(2^k - 1\right)^{n-k} - 1$, где сумма отражает число помеченных градуированных частично упорядоченных множеств из n элементов (A001831), где $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты

- Число связных графов на 5 узлах с хроматическим числом 3 (A126737).

- Количество самодополнительных ориентированных графов с 6 узлами (A002785).

Самокомплиментарный (самодополнительный) граф – граф, изоморфный своему дополнению.

Дополнение (комплиментарный, обратный к графу G) – такой граф H, в котором такое же множество вершин, что и G, но две несовпадающие вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в G.

Чтобы найти обратный граф, нужно дополнить данный граф до полного (каждая пара различных вершин смежна) и удалить все ребра, которые уже были до этого.

- Количество лесов из помеченных корневых деревьев с $n = 4$ узлами, содержащих 2 дерева высотой один, а все остальные – нулевую высоту (A133386).

3→1 4→2	4→1 3→2	2→1 4→3	4→1 2→3	2→1 3→4	3→1 2→4	1→2 4→3	4→2 1→3	1→2 3→4	3→2 1→4	1→3 2→4	2→3 1→4

[14] http://mathworld.wolfram.com/PetersenGraph.html, http://en.wikipedia.org/wiki/Petersen_graph.

В общем случае определяется по формуле $n(n-1)\cdot S(n-1,3)$,

где $S(m,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}C_k^j j^m$ – числа Стирлинга второго рода.

Между делом

- Важное число в христианстве: 12 апостолов, двунадесятые праздники – 12 важнейших праздников (помимо Пасхи), 12 сыновей Иакова основали 12 колен Израйлевых. Примечательно, что Иуда (ученик Христа) не стал апостолом, но "свято 12-е место" не осталось пустым, и его занял Матфий.

- В буддизме перерождение живых существ являет собой колесо из 12 ступеней [13]. Звезда Давида имеет 12 углов.

- 12 подвигов Геракла, 12 месяцев в году, 12 знаков Зодиака, 12 часов на циферблате, 12 частей храма Соломона, 12 городов-героев СССР, 12 присяжных заседателей в суде, 12 звезд на флаге Евросоюза, 12 игроков в футболе (основной состав + болельщики).

- Минутная стрелка в часах движется в 12 раз быстрее, чем часовая.

- 12 вольт – наиболее распространённое напряжение питания многих слаботочных устройств, включая автомобили, что приблизительно равно напряжению, выдаваемому шестиэлементной кислотно-свинцовой аккумуляторной батареей под нагрузкой.

- 12 цилиндров в самых мощных автомобильных двигателях.

- 12 каналов метрового диапазона телевизионного вещания.

- 12 основных клавиш на телефонной клавиатуре с кнопочным набором.

- На клавиатуре компьютера имеется 12 функциональных клавиш ($F1 \div F12$).

- Распространены 12-бальные системы: интенсивность землетрясения, сила ветра по шкале Бофорта, 12 данов в дзюдо и др.

- В древнерусской системе мер 1 сажень = 4 локтя = 3 аршина = **12** пядей = 48 вершков; в футе 12 дюймов.

Литература:

1. *Pentomino* // Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Pentomino.
2. *Слоэн Н. Дж. А.* Упаковка шаров // В мире науки. – 1984. – № 3. – С. 72–82. – http://www.ega-math.narod.ru/Nquant/Spheres.htm.
3. *Двенадцатеричное устройство мира* // Устье речи. Собираем мозаику мироздания – http://ustierechi.ucoz.ru/publ/14-1-0-327 .
4. *Anderson S.E.* Perfect Squared Rectangles and Squared Squares. – http://www.squaring.net/, http://www.squaring.net/sq/ss/spss/o23/spsso23.pdf.
5. *Квадрирование квадрата* // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=31512596.

6. *Weisstein E.W.* Cuboctahedron // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/Cuboctahedron.html.

7. *Pfoertner H.* Visualization of diagonal intersections in an equilateral triangle. – http://www.randomwalk.de/sequences/a091908.pdf.

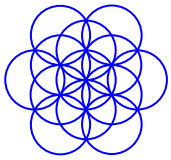
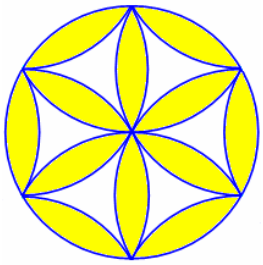
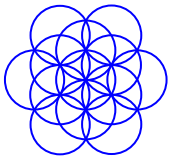
8. *Weisstein E.W.* Distance-Transitive Graph // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/Distance-TransitiveGraph.html.

9. *Weisstein E.W.* Eulerian Graph // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/EulerianGraph.html.

10. *Babai L.*, *Cameron P.J.* Automorphisms and enumeration of switching classes of tournaments // Electronic Journal of Combinatorics. – 2000. – Vol., N 1, R 38. – http://www.combinatorics.org/Volume_7/PDF/v7i1r38.pdf.

11. *Meeussen W.* Set Partitions Up To Rotation. – http://users.telenet.be/Wouter.Meeussen/SetPartitionsUpToRotation/.

12. *Weisstein E.W.* Cubic Polyhedral Graph // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/CubicPolyhedralGraph.html.

13. 12 (*число*) // Академик. – http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/26288.

© ВаСиЛенко, 2011