

## Геометрия золотого сечения

*Наука – это истина,  
помноженная на сомнение*  
Поль Валери (1871–1945)

Графическая иллюстрация золотого сечения (ЗС), как правило, ограничивается скудным набором геометрических представлений и главным образом базируется на разных интерпретациях прямоугольного треугольника с соотношением катетов 1:2.

Традиционно демонстрируемые построения на тему ЗС [1, с. 6] сводятся к линейному сопоставлению частей некоего отрезка, причем чаще всего отдельно от единичной меры.

В то же время за многие годы в теории ЗС накопилось множество разноплановых мифов, усиленно подогреваемых некоторыми представителями разнокалиберных специальностей. Эдакая "золотая нива" без правил.

Доходит до опрометчивых утверждений, что золотое сечение присутствует во всём, что нас окружает, а природа создает мир по законам, "подверженным" правилу золотого сечения.

Желание узреть ЗС "везде и вся" часто превалирует над здравым смыслом, приводя к поспешным и необоснованным выводам о наличии ЗС с невероятно большущей натяжкой.

Оно бы и ничего, если вести речь о взвешенных гипотезах и предположениях, но не об истине в последней инстанции.

Особенно некоторые авторы любят привлекать в адвокаты Пифагора, который ... не оставил не единой строчки текста. А поздние публикации пифагорейцев были вполне самостоятельными трактатами и вовсе не обязательно воспроизводили мысли учителя.

Поди, теперь знай, что там было и чего не было на самом деле.

Относительно идеологии ЗС следует признать [2]: «Все античные тексты, в которых обсуждается деление величины в среднем и крайнем отношении – это сугубо математические трактаты, в которых данное построение рассматривается исключительно в связи с построением правильного пятиугольника».

Мысль о том, что золотое сечение может выступать в качестве базовой пропорции тех же произведений архитектуры и живописи, древним ученым даже не приходила в голову.

Хотя, конечно «можно говорить об эстетической значимости золотого сечения, как это делал в своих сочинениях А.Ф.Лосев; но сама эта "эстетика" носит отнюдь не психологический, но космологический характер» [2]. Поэтому искать в сочинениях авторов эпохи Возрождения некую концепцию золотой пропорции, связанную с чувственным восприятием произведений искусства, – абсолютно безуспешное занятие, поскольку её туда никто не закладывал, и она там попросту отсутствует.

Данный момент отражен даже в таком явно просчитываемом (без подгонок) и распространенном действе, как элементарный статистический анализ формата полотен.

Так, в работе [3] на основании проведенного исследования 565 произведений живописи различных великих художников установлено, что средний показатель отношения размеров картин составляет 1,34 или  $4/3$  как "одна треть + единица". Это существенно отличается от значения ЗС, которое будто бы должно производить впечатление высшей гармонии.

И это действительно исторический факт. С вполне понятной логикой осмысления.

В то же время существуют другие вполне обусловленные и хорошо обоснованные аспекты числовой инвариантности, связанной с ЗС.

Они имеют исключительно математическую направленность и потому истинны в пределах принятых исходных аксиом. И что важно, многократно воспроизводимы.

Настоящая работа носит в основном обзорный характер и преследует цель собрать воедино наиболее представительные (характерные) и оригинальные геометрические решения задачи ЗС на основе как собственных, так и сторонних исследований других авторов.

Конечная цель – показать разнообразие геометрических построений, приводящих к идеально-точному значению золотого сечения.

**ЗС в правильных многоугольниках.** Наиболее распространенные способы построения или отображения золотого сечения основаны на прямоугольных фигурах (треугольниках, прямоугольниках) с соотношением сторон 1:2.

По теореме Пифагора это приводит к квадратному корню из пяти – иррациональной составляющей числа золотого сечения  $\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2$  или  $\phi = \Phi^{-1} = (\sqrt{5} - 1)/2$ .

Например, круг единичного диаметра отсекает на диагоналях прямоугольника-домино  $1 \times 2$  отрезки длиной  $\phi$  (рис. 1), которые в свою очередь вместе с диаметром, равным 1, приводят к числу  $\Phi = 1 + \phi$ .

Пожалуй, наиболее простой способ построения ЗС состоит в дополнении единичного квадрата до золотого прямоугольника со стороной, равной  $\Phi$ . В частности, представляет интерес следующая комбинированная интерпретация ЗС (рис. 2):

квадрат  $1 \times 1$  разделяется пополам на два прямоугольника  $1 \times 1/2$ ; в одном из них проводится диагональ длиной  $\sqrt{5}/2$ , которая поворотом совмещается с продолжением стороны квадрата, тем самым воспроизводя прямоугольник  $1 \times \Phi$  площадью  $\Phi$  кв.ед.

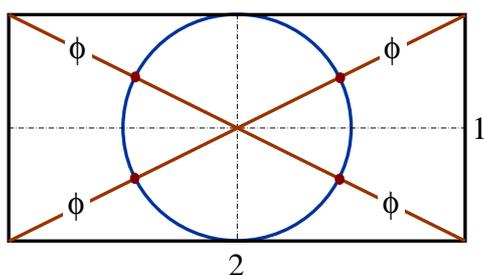


Рис. 1. Схема формирования ЗС на базе прямоугольника с отношением сторон 1:2

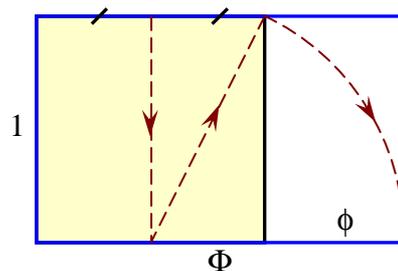


Рис. 2. Линейно-площадное представление числа ЗС

С одной стороны, отрезок с константой ЗС располагается на линии, содержащей единичный отрезок, имея с ним общую точку отсчёта (левый нижний угол).

С другой стороны, образуется аналогичный инвариант относительно плоских фигур: квадрата  $1 \times 1$  и прямоугольника  $1 \times \Phi$ .

Более того, рассматривая теперь большой прямоугольник, построенный по принципу ЗС, и отрезая от него слева квадрат, мы получаем новый, уменьшенный прямоугольник с тем же отношением сторон  $1 : \Phi = \phi : 1$ , где  $\phi = \Phi^{-1} = (\sqrt{5} - 1)/2$ .

И такой инвариантно-фрактальный процесс бесконечен!

Данное построение имеет адекватное представление в виде полукруга, описанного вокруг квадрата.

Геометрическое решение квадратного уравнения с единичными коэффициентами (алгебраического прообраза ЗС) [4] в этом случае приводит к простой схеме построения согласно алгоритму Евклиду (рис. 3 – рис. 4).



$$l = \sqrt{\phi^2 + \phi^4 - 2\phi^3 \cos(2\pi/3)} = \phi\sqrt{1 + \phi^2 + \phi} = \phi\sqrt{2},$$

где  $\cos(2\pi/3) = \cos(120^\circ) = -0,5$ ;  $\phi^2 + \phi = 1$ .

Тогда отношение двух соседних неравных хорд равно:  $CB_3/B_2B_3 = \phi\sqrt{2}/\phi = \sqrt{2}$ .

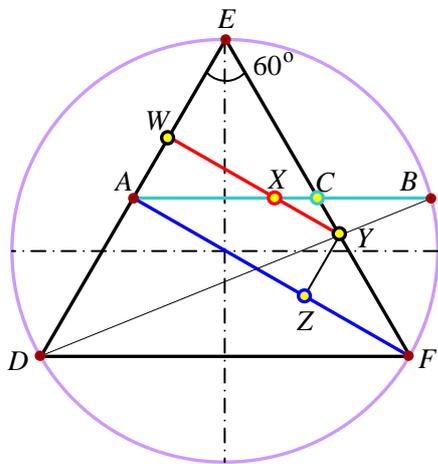
Но и это не всё.

Несколько добавочных линий (рис. 6), и на базе равностороннего треугольника появляется дополнительный набор золотых сечений.

Аналогичным образом могут быть выполнены геометрические построения относительно и других серединных точек треугольника (типа C).

Этим самым разрушается привычный миф об исключительной "золотоносности" пентаграммы и связанной с ней пятиконечной звезды.

Как видно, равносторонний треугольник способен продуцировать целый букет золотых сечений.



Последовательность построений:

$\triangle EDF$ ,  $\bullet A (EA = AD)$ ,  $\bullet C (EC = CF)$ ,  
 $AB (AC), DB, YZ \perp AF, YW \perp ED$ .

$$\Phi = \frac{AC}{CB} = \frac{EY}{YF} = \frac{AZ}{ZF} = \frac{WX}{XY} = \frac{EW}{WA} = \frac{\widehat{EB}}{\widehat{BF}}$$

$$\Phi = \frac{AB}{AC} = \frac{EF}{EY} = \frac{AF}{AZ} = \frac{WY}{WX} = \frac{EA}{EW} = \frac{\widehat{EF}}{\widehat{EB}}$$

Рис. 6. Формирование множества золотых сечений на основе равностороннего треугольника

Описанные схемы-построения, можно сказать, окончательно ломают также устойчивый стереотип, якобы «треугольники не имеют непосредственной взаимосвязи с "золотым" сечением» [6], в частности, озвученный одним из наиболее ярких и непредвзятых исследователей золотого сечения – проф. С.А.Ясинским.

**ЗС в правильных многоугольниках.** Подводя основные итоги проявления ЗС в правильных фигурах, для сопоставимости объединим их на одном графике (рис. 7).

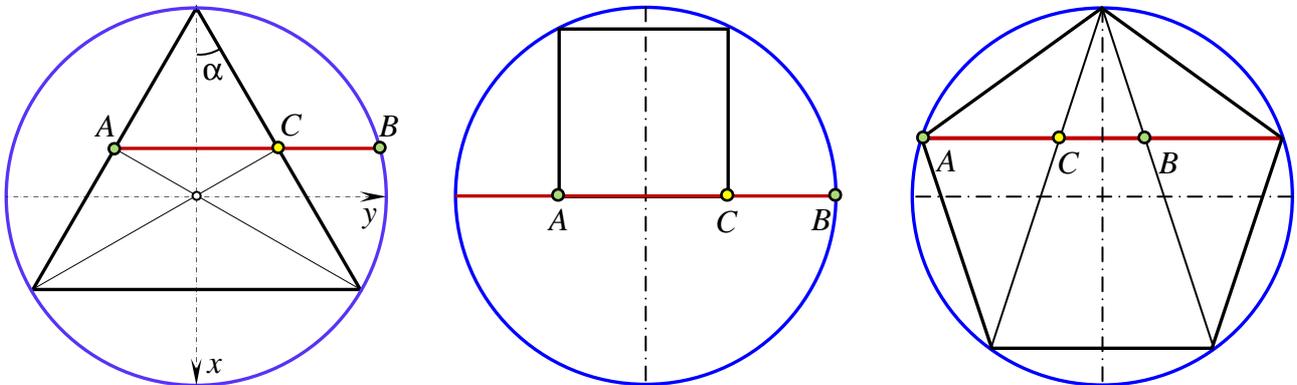


Рис. 7. Золотое сечение на основе правильных  $n$ -угольников ( $n = 3, 4, 5$ )

**ЗС в равнобедренном треугольнике.** Золотое сечение не является исключительной прерогативой равностороннего треугольника и в общем случае может быть достаточно просто построено в любом равнобедренном треугольнике.

Для удобства изложения развернем левую фигуру (на рис. 7) на 90 градусов против часовой стрелки.

Уравнение окружности имеет вид  $y_1 = \pm\sqrt{1-x^2}$ .

Боковые стороны треугольника описываются функцией  $y_2 = \pm(1+x)\operatorname{tg}\alpha$ .

Проведём отрезок  $AB$  так, чтобы он в точке пересечения  $C$  со стороной треугольника разделился в соотношении золотой пропорции (рис. 8):

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{1-x^2} + (1+x) \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2(1+x) \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \Phi$$

$$\text{или } \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} = (2\Phi - 1)\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5} \operatorname{tg}\alpha.$$

Откуда получаем координату точки пересечения отрезка  $AB$  с осью  $Ox$ :

$$x = \frac{1 - 5\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + 5\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Аналогичным образом находим местоположение золотого сечения отрезка  $A'B'$  (от оси симметрии треугольника до описанной окружности):

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+x) \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \Phi \Rightarrow x' = \frac{1 - \Phi^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \Phi^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Наиболее типичные случаи представлены в табл. 1.

Таблица 1

**Местоположение линий ЗС в равностороннем треугольнике для наиболее характерных углов  $2\alpha$  при вершине**

Угол, град. $2\alpha$	Координата $x$		Координата $x'$	
30	$-\frac{17-10\sqrt{3}}{18-10\sqrt{3}}$	0,472	$\frac{19 - (12\sqrt{3} - 7\sqrt{5} + 4\sqrt{15})}{-23 + (12\sqrt{3} - 7\sqrt{5} + 4\sqrt{15})}$	0,684
36	$-\frac{2-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$	0,309	$\frac{5+\sqrt{5}}{15-\sqrt{5}}$	0,567
60	$-\frac{1}{4}$	-0,250	$\frac{3-\sqrt{5}}{9+\sqrt{5}}$	0,068
72	$-\frac{12-5\sqrt{5}}{13-5\sqrt{5}}$	-0,450	$-\frac{3-\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}}$	-0,160
90	$-\frac{2}{3}$	-0,667	$-\frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$	-0,447
108	$-\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$	-0,809	$-\frac{15+11\sqrt{5}}{35+11\sqrt{5}}$	-0,664

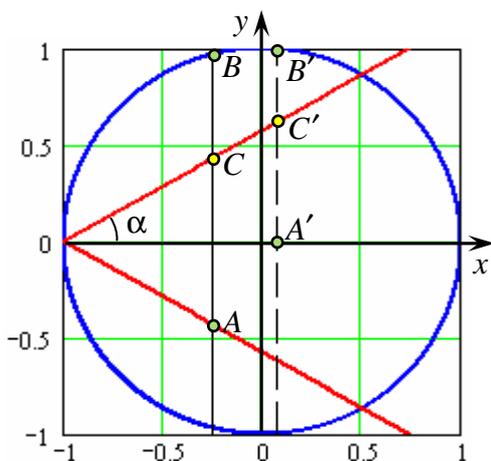


Рис. 8. Графика ЗС в равнобедренном треугольнике

Как видно, рациональные значения  $x$  соответствуют лишь двум видам треугольника: равнобедренного и прямоугольного. Остальные варианты дают иррациональные решения.

**ЗС в египетском треугольнике.** Это прямоугольный треугольник с отношением сторон 3:4:5. Известная ещё со времён античности его особенность заключается в том, что теорема Пифагора даёт целые квадраты сторон, то есть 9:16:25. Треугольник является простейшим и из Героновых треугольников с целочисленными сторонами и площадями.

Он активно применялся для построения прямых углов древними землемерами и архитекторами с использованием шнура, разделённого узлами на  $12 = 3 + 4 + 5$  частей [7].

Оказывается, что золотое сечение находится в непосредственном "родстве" с вездесущим египетским треугольником [8, с. 43–44].

Пусть дан такой прямоугольный треугольник  $\triangle ABC$  с катетами  $AC = 5$ ,  $CB = 3$  и гипотенузой  $AB = 5$  (рис. 9).

Проведем биссектрису  $BO$  угла  $B$  и окружность  $C(O)$  – с центром в  $O$  радиусом  $OC$ .

Их точки пересечения дают золотое сечение  $DE/EB = \Phi$ .

Из  $\triangle AOK$  находим радиус окружности  $r$ :

$$r^2 + (5 - 3)^2 = (4 - r)^2 \Rightarrow r = 3/2.$$

Из  $\triangle BOC$  определяем гипотенузу  $BO = 3\sqrt{5}/2$ .

Тогда  $EB = 3(\sqrt{5} - 1)/2$  и  $DE/EB = 3/EB = (\sqrt{5} + 1)/2 = \Phi$ .

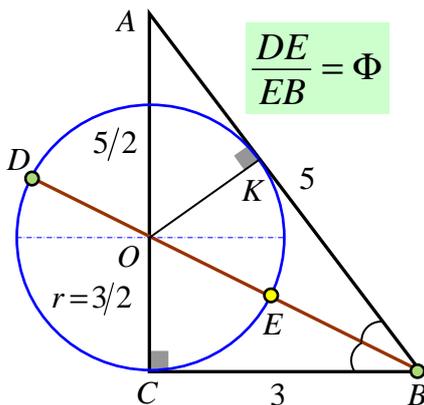


Рис. 9. ЗС в египетском треугольнике

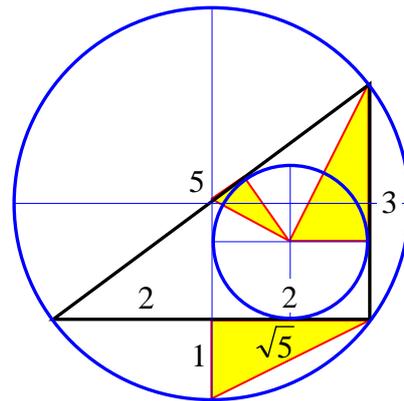


Рис. 10. Выделение в египетском треугольнике прямоугольных форм  $1:2:\sqrt{5}$

Другой способ установления взаимосвязи египетского треугольника с золотым сечением вытекает [9] из вычерчивания вписанной и описанной окружности и последующего выделения прямоугольных треугольников с соотношением катетов  $1:2$  (рис. 10).

Далее, как говорится, дело техники...

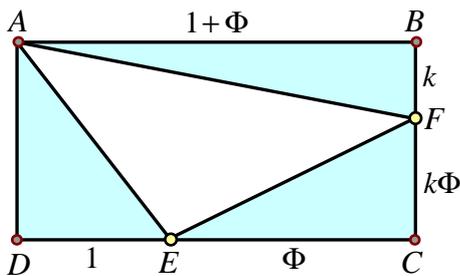


Рис. 11. ЗС в схеме «три треугольника в прямоугольнике»

### Треугольники в прямоугольнике.

В прямоугольнике с произвольным соотношением сторон  $1:k$ , могут быть вписаны три треугольника так, что их площади равны  $S_{\Delta} = k\Phi^2/2$  (рис. 11).

При этом стороны  $BC$  и  $DC$  делятся точками  $F, E$  в золотой пропорции [10].

Это свойство вытекает из "золотоносного" тождества  $1 + \Phi = \Phi^2$ .

Три треугольника занимают площадь

$$3S_{\Delta}/k(1+\Phi)^2 = 3\Phi^{-2}/2 \approx 57,3\% .$$

**Три равных круга в полукруге.** Пусть  $r$  и  $R$  – радиусы малых кругов и полукруга.

В прямоугольном треугольнике (рис. 12) катеты равны  $r$  и  $d = 2r$ , а гипотенуза  $R - r$ .

По теореме Пифагора имеем

$$r^2 + (2r)^2 = (R - r)^2 \text{ или } R^2 - Rd - d^2 = 0 .$$

Откуда в положительных решениях следует

$$\frac{R}{d} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi .$$

Таким образом, если три равных круга последовательно касаются друг друга и большого

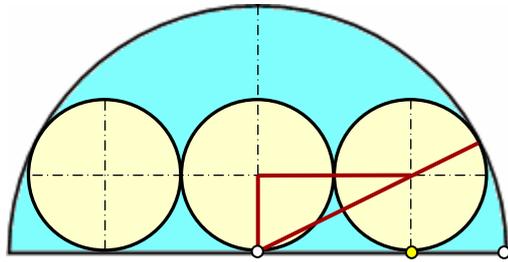


Рис. 12. Золотое сечение на основе трёх кругов в полукруге

полукруга, то отношение радиуса последнего к диаметру маленьких кругов равно  $\Phi$  [11, с. 82].

**Окружности вокруг двух произвольных точек.** В серии работ [12–15] предложены любопытные способы получения золотого сечения на основе комбинирования в расположении окружностей.

Пусть даны две произвольные точки  $A$  и  $B$  (рис. 13). Проведем вокруг них окружности радиусом, равным расстоянию  $r$  между точками:  $A(B)$  и  $B(A)$ .

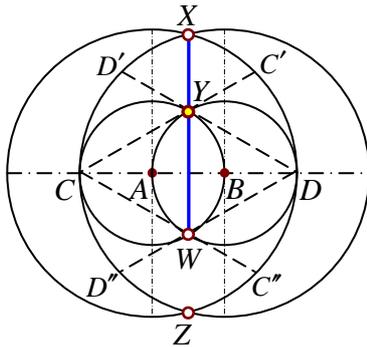


Рис. 13. ЗС четырех окружностей

Через полученные точки  $C$  и  $D$  проведем окружности  $C(B)$  и  $D(A)$  радиусом  $2r$  соответственно вокруг точек  $B$  и  $A$ .

Вследствие симметрии, точки  $X, Y, Z, W$  коллинеарные (расположены на одной прямой линии), причем  $Y, W$  – точки золотого сечения соответственно отрезков  $XW$  и  $ZY$ .

Действительно, хорда  $YW = r\sqrt{3}$ , как удвоенная высота равностороннего треугольника  $\Delta ABY$ .

Хорда  $XZ = r\sqrt{15}$ , как удвоенная высота равнобедренного треугольника  $\Delta ABX$  (с основанием  $r$  и боковой стороной  $2r$ ).

Отсюда находим  $XW = r(\sqrt{15} + \sqrt{3})/2$  и соответственно  $XW/YW = (\sqrt{5} + 1)/2 = \Phi$ .

Точки  $Y, W$  являются золотым сечением также для отрезков  $DD' = DD'' = CC' = CC''$ .

**Пятишаговый алгоритм.** Через произвольные точки  $A$  и  $B$  проводим две окружности

1)  $A(B)$  и 2)  $B(A)$  (рис. 14).

3) Соединяем точки их пересечения отрезком  $XZ$ .

4) Вокруг точки  $X$  очерчиваем окружность  $A(X)$ , пересекающую  $XZ$  в  $Y$  и  $B(A)$  в  $E$ .

5) Проводим окружность  $Y(E)$ , которая пересекает линию  $AB$  в точках  $C$  и  $D$  так, что  $AC/CB = DA/AB = \Phi$ .

Примем для определенности  $AB = 1$ .

Тогда  $XZ = \sqrt{3}$  и  $EC = EY = \sqrt{2}$ .

Опустим из  $E$  перпендикуляр на линию  $AB$ .

Отрезок  $HA = 1/2$ . Из треугольника  $\Delta EHC$  следует  $HC^2 = EC^2 - EH^2 = 2 - 3/4 = 5/4$ .

Значит,  $AC = HC - HA = (\sqrt{5} - 1)/2 = \Phi^{-1} = \phi$ .

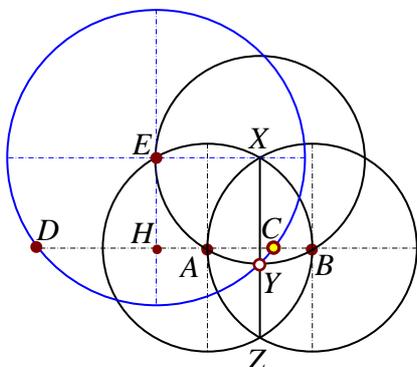


Рис. 14. 5-шаговый алгоритм построения ЗС

### ЗС трёх окружностей.

Для данного отрезка  $AB$  длиной 1 проводим окружности  $A(B)$  и  $B(A)$  (рис. 15). Соединяем точки их пересечения отрезком  $XZ$ .

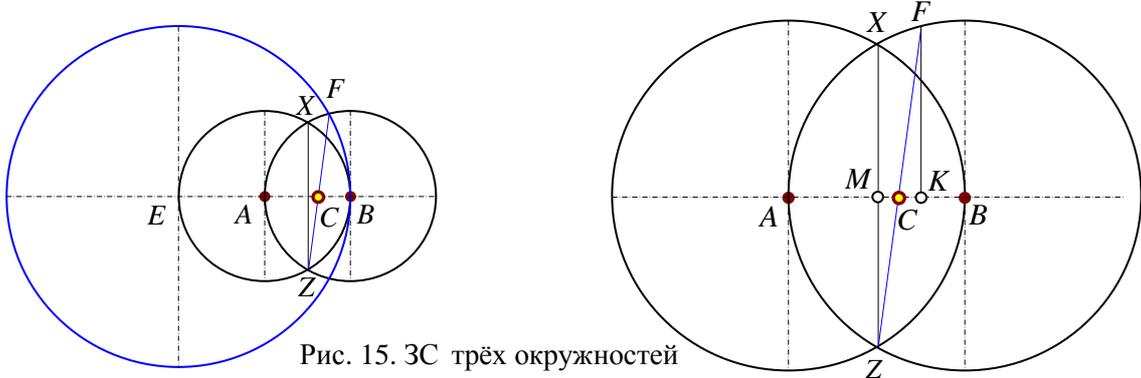


Рис. 15. ЗС трёх окружностей

Продолжаем отрезок  $AB$  до пересечения с окружностью  $B(A)$  в точке  $E$ .

Очерчиваем окружность  $B(E)$ , которая пересекает  $A(B)$  в точке  $F$ . Линия  $FZ$  делит исходный отрезок  $AB$  в точке  $C$  золотым сечением:  $AB/AC = \Phi$ .

Чтобы в этом убедиться, обозначим точку  $M$  пересечения  $AB$  с  $XZ$ , и опустим перпендикуляр  $FK$  на  $AB$ . Из подобия треугольников  $ZMC$  и  $FCK$  вытекает соотношение:

$$\frac{CM}{CK} = \frac{ZM}{FK} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{15}/4} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Поскольку  $MK = CM + CK = 1/4$ , то  $CM \cdot (1 + \sqrt{5}/2) = 1/4$ .

Откуда следует  $AC = 1/2 + CM = (\sqrt{5} - 1)/2 = \phi$ .

**ЗС трёх одинаковых окружностей.** Построение подобно предыдущим, за исключением последнего шага.

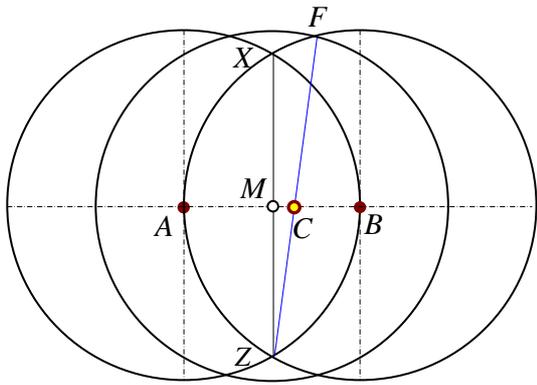


Рис. 16. ЗС трёх одинаковых окружностей

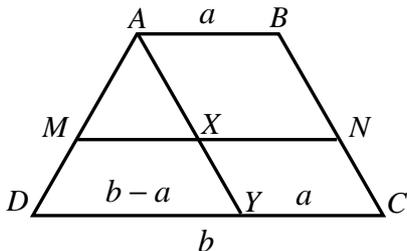
Для отрезка  $AB = 1$  проводим окружности  $A(B)$  и  $B(A)$  (рис. 16). Соединяем точки их пересечения линией  $XZ$ , которая делит заданный отрезок пополам в точке  $M$ .

Вокруг этой точки проводим окружность единичным радиусом  $AB$ , которая пересекается с окружностью  $A(B)$  в точке  $F$ .

Линия  $FZ$  делит исходный отрезок  $AB$  в точке  $C$  золотым сечением:  $AB/AC = \Phi$ .

Следует особо отметить, что количество операций геометрических построений в описанных выше случаях на самом деле небольшое.

Так, проведение окружностей  $A(B)$  и  $B(A)$  с последующим соединением точек их пересечения де факто означает деление заданного отрезка  $AB$  пополам.



**ЗС в трапеции.** Золотое соотношение наблюдается в трапеции [16].

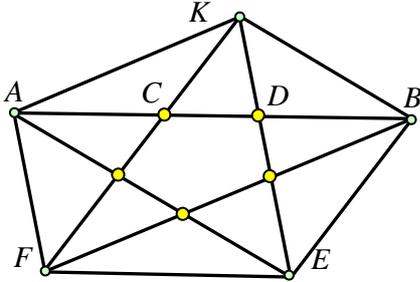
Пусть основания трапеции (параллельные стороны) равны  $a$  и  $b$ . Проведем  $AY \parallel BC$  и  $MN \parallel DC$  длиной

$MN = \sqrt{(a^2 + b^2)}/2$  – среднеквадратическое значение величин  $a$  и  $b$ .

Из подобия треугольников  $AMX$  и  $ADY$  следует при  $b = 3a$ :

$$\frac{AD}{AM} = \frac{MY}{MX} = \frac{b-a}{\sqrt{(a^2+b^2)/2}-a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi.$$

**Золотое сечение в неправильном пятиугольнике.** Итак, ЗС возникает в различных обстоятельствах, часто совершенно внезапно. Самой большой неожиданностью является то, что привычный пентагон, "нашпигованный ЗС", вовсе не обязательно должен быть регулярным (правильным), чтобы сохранить свойства золотого соотношения [9].



Так, пентагон  $AKBEF$  (рис. 17) имеет диагонали параллельно сторонам.

Этого оказывается достаточным, чтобы косоугольный пятиугольник сохранил свои золотоносные качества, когда точки пересечения диагоналей делят их в золотой пропорции

Рис. 17. Сохранение золотоносных свойств в косоугольном пентагоне

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{CD} = \Phi.$$

То же самое для других пар: «стороны–диагонали».

Кроме того, такие треугольники как  $AEF$  и  $BEF$  с общим основанием  $EF$  имеют одинаковую площадь.

### ЗС в математическом фокусе.

Золотое сечение помогает создать и разрешить геометрический фокус-парадокс [17, с. 143–145]. Заметим, что в свойственной ему манере М.Газале ни на кого не ссылается, фактически персонифицируя собственное авторство. Хотя по утверждению М.Гарднера [18], парадокс был изобретен нью-йоркским магом-любителем Поль Карри (1953).

На первый взгляд (рис. 18), прямоугольник получен обычной перестановкой составных фигур, из которых сложен разрезаемый квадрат. Однако площадь вторичной фигуры загадочным образом уменьшается на единицу:  $13^2 = 169 \rightarrow 8 \cdot 21 = 168$ .

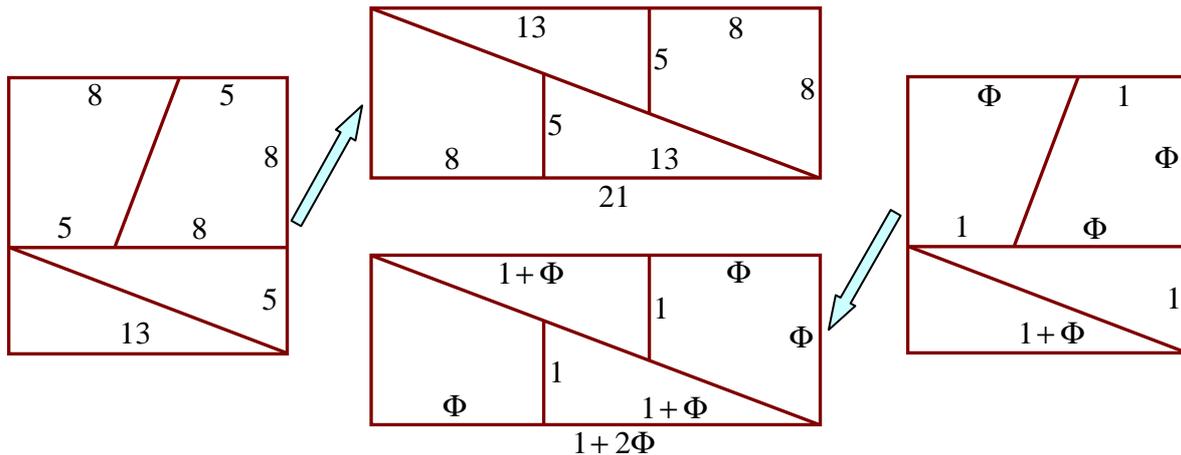


Рис. 18. Фокус-парадокс на основе золотого сечения и его приближения соотношением чисел Фибоначчи

Подобным образом, если размеры (5, 8) заменить на (8, 13), то площадь прямоугольника наоборот уже станет на единичку больше:  $21^2 = 441 \rightarrow 13 \cdot 34 = 442$ .

Всё дело в том, что диагональная линия в прямоугольнике только кажется прямой. В действительности она таковой не является, поскольку  $5/8 \neq 13/21$ .  
 В середине находится еле различимый пустой (незаполненный) ромб площадью 1.  
 А разница в  $\pm 1$  следует из свойства чисел Фибоначчи:  $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ .  
 Правильный ответ дают лишь фигуры с точным соотношением золотого сечения!

### Литература:

1. *Stakhov A.* Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. – N.Y.: World Scientific, 2009. – 694 p.
2. *Щетников А.И.* Лука Пачоли и его трактат "О божественной пропорции" // Математ. образование, 2007. – № 1(41). – С. 33–44. – <http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Pacioli.pdf>.
3. *Olariu A.* Golden Section and the Art of Painting. – <http://arxiv.org/abs/physics/9908036v1>.
4. *Василенко С.Л.* Новый взгляд на геометрию взаимосвязи золотой пропорции с квадратным уравнением общего вида // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16046, 18.08.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161690.htm>.
5. *Василенко С.Л.* Математические начала гармонии: русская матрешка в геометрических образах гармонической пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15978, 04.07.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161668.htm>.
6. *Ясинский С.А.* Краткая справка о "золотом" сечении в древней истории. Ч. 1. – 2008. – <http://www.a3d.ru/architecture/stat/210>.
7. *Егунетский треугольник* // Википедия. – <http://ru.wikipedia.org/?oldid=31212868>.
8. *Huntley H.E.* The Divine Proportion. A Study in Mathematical Beauty. – New York: Dover, 1970.
9. *Vogomolny A.* Golden Ratio in Geometry. – [http://www.cut-the-knot.org/do\\_you\\_know/GoldenRatio.shtml](http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml).
10. *Weisstein E.W.* Golden Ratio // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – <http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html>.
11. *Pickover C.A.* A Passion for Mathematics: Numbers, Puzzles, Madness, Religion, and the Quest for Reality. – John Wiley & Sons, 2005. – 394 p.
12. *Hofstetter K.* A Simple Construction of the Golden Section // Forum Geometricorum. – Vol. 2. – 2002. – P. 65–66.
13. *Hofstetter K.* A 5-step Division of a Segment in the Golden Section // Forum Geometricorum. – Vol. 3. – 2003. – P. 205–206.
14. *Hofstetter K.* Another 5-step Division of a Segment in the Golden Section // Forum Geometricorum. – Vol. 4. – 2004. – P. 21–22.
15. *Hofstetter K.* Division of a Segment in the Golden Section with Ruler and Rusty Compass // Forum Geometricorum. – Vol. 5. – 2005. – P. 135–136.
16. *Tong J., Kung S.* A Simple Construction of the Golden Ratio // Forum Geometricorum. – Vol. 7. – 2007. – P. 31–32.
17. *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов: Пер. с англ. – М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 272 с. / *Gazale Midhat J.* Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 /
18. *Gardner M.* Mathematics Magic and Mystery. – Dover, 1956. – P. 139–150.

© ВаСиЛенко, 2011 

