С.Л. Василенко

# 108 (число) в предыстории золотого сечения

*Создать мир легче, чем понять его*
Анатоль Франс (1844–1924)

**Обозримое прошлое.** Небезосновательно принято считать, что задача золотого сечения (ЗС) наиболее рельефно и математически выверено впервые появилась в "Началах" Евклида.

В многотомном труде были собраны воедино и частично систематизированы ранее разрозненные разработки античных ученых.

Именно поэтому задача ЗС в разных книгах повторяется, по меньшей мере, дважды.

Но что характерно, – практически в слабо связанных ракурсах.

Невольно создается впечатление, что речь идет о совершенно разном понимании и интерпретации единого математического феномена. Вплоть до разноликих формулировок, неодинаковых буквенных обозначений, несхожих геометрических построений и т.д.

Это дает основание утверждать, что к понятию ЗС в то время относились далеко не так, как принято считать в настоящее время. С иной подоплекой и другой философией.

Непредвзятый анализ показывает, что главное назначение ЗС представлялось для главной цели: построения правильного пятиугольника и десятиугольника, а на их основе – правильных многогранников. Собственно и всё.

На фоне достигнутых к тому времени впечатляющих успехов ученых древности вычерчивание абсолютно точного пентагона было делом чести греческих геометров.

Строптивая задача стала разрешимой именно благодаря изобретенному способу нахождения точки ЗС. После чего золотое сечение на многие века было просто забыто.

За ненадобностью и за отсутствием иных приложений.

«Мавр сделал своё дело, мавр может уходить». С помощью ЗС научились строить правильные фигуры и тела, и потом его "забросили", как минимум на полтора тысячелетия.

**Далекое прошлое.** Ещё раньше человек научился вычерчивать окружности.

А для измерения дуги придумал условную единицу – градус или 360-ю долю полного угла (оборота) окружности. Как и десятичную систему счисления, в основе которой лежит всего лишь биологическое свойство человека, выражающееся в 10 пальцах на руках.

Метр, час, секунда – такие же субъективистские единицы измерения, как скажем, назначенный День студента. И печать информационно-подобного материала типографским способом – не есть гарантия истины. Также как научные "погоны и лампасы" не гарантируют совпадения мыслимого с действительностью

Именно поэтому градус – единица условная, в определенном смысле произвольно придуманная людьми. Научно говоря, с антропоцентрическим смыслом.

Древние вавилоняне на основе астрономических наблюдений решили, что окружность удобно делить именно на 360 равных частей. Да и 60-ричная система счисления оказала на это влияние. Хотя с позиции сегодняшнего дня это дело вкуса.

Особых преференций здесь нет. Так, в артиллерии, окружность принято делить на 6000 частей, но на точность стрельбы это практически не влияет.

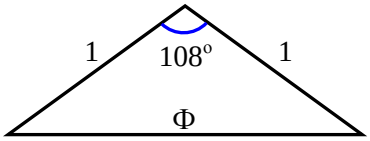
Тем не менее, наши предки выбрали именно 360-дольный путь. И в глобальном контексте, конечно, не случайно. Ибо всё в этом мире взаимосвязано и взаимообусловлено.

Как бы там ни было, но благодаря подобному делению мы сегодня можем легко увязывать дискретные градусы с непрерывными дугами. И не только.

Внутренний угол правильного $n$-угольника равен $180^{\circ}(n–2)/n$.

В частности, в "золотоносном" пятиугольнике он составляет $108^{\circ}$.

При этом величина $2\sin(108^{\circ}/2)$ в точности равна числу золотого сечения $\Phi = (\sqrt{5}+1)/2 \approx 1{,}618$.




Не следует путать с золотым углом [1] – меньшим из двух углов, образованных делением длины окружности по золотому сечению, и равному $\pi(3-\sqrt{5}) \approx 137{,}5^{\circ}$.

Примечательно, что $360/108 = 0{,}3$ и $108/360 \approx 3{,}3333...$

Но что характерно, во многих странах, религиях и культурах число 108 издавна считается особым. Ему приписывают мистические свойства, ему даже поклоняются. В соответствии с ним выстраивают целые философии, производятся священные церемонии.

Однако число 108 встречается не только в древних обрядах народов мира. Странным образом оно было снова "переоткрыто" в современной математике, физике и химии.

**Подводные камни знаковой системы.** Конечно, в любом числе изначально заложена некая магия, поскольку в отличие от слова или метафоры оно обладает незримым присутствием авторитета *точности* и *беспристрастности*. Поэтому число всегда было и остается одним из главных объектов манипуляции.

Сила "языка чисел" объясняется тем, что он нам кажется максимально достоверным и не может лгать [2, гл. 5, § 3]. Это снимает с исследователей, оперирующих числами, множество ограничений, и дает максимальную независимость, с которой не сравнится никакая "свобода слова". Один из великих математиков Г.Кантор утверждал, что сущность математики лежит в её свободе.

Ну, а «там, где терпит неудачу язык математики, человеческий дух ничего уже не сможет понять и узнать» (Н.Кузанский, 1401–1464).

Число, как и слово, было изначально связано с *вещью*. Пифагорейцы считали, что в нём выражена сущность и природа вещи. Но числа не могут лгать, и в этом их преимущество перед словом. И якобы только через число может быть понят мир.

Пифагорейское учение в этой части имеет отчетливо выраженный идеалистический характер постижения количественной стороны мира. Математический подход к миру заключается в объяснении определенных количественных отношений между реально существующими вещами. «Арифметизация геометрии означает выражение пространственных отношений в "чистых" числах и делает возможным их постепенное отторжение от отношений в объективной реальности, котирую они, собственно, представляют. Возможность мысленной манипуляции с числами (как абстрактными объектами) ведет к тому, что эти числа могут быть понимаемы как самостоятельно существующие объекты. Отсюда остается всего лишь шаг к тому, чтобы эти числа были провозглашены собственно сущностью вещей. С помощью этой операции пифагорейцы приходят к идеалистическому объяснению действительности» [3].

Манипуляция с числами как абстрактными объектами приводит пифагорейцев к тому, что числа понимаются ими как единственно истинно сущее, то есть числа отождествляются с сущностью вещей, а не просто являются их количественными характеристиками.

Математика – весьма специальная сфера интеллектуального творчества, обладающая неповторимыми, только ей присущими особенностями.

Свобода математики далеко не сводится к отсутствию экзогенных ограничений на объекты и методы исследования. Свобода математики в немалой мере проявляется в предоставляемых нею новых интеллектуальных средствах овладения окружающим миром, которые раскрепощают человека, раздвигая границы его независимости [4].

Сила убеждения чисел огромна. Но часто предполагает полную замену качеств их количественным суррогатом [2].

Мы далеки от мысли, что числа представляют собой главный инструмент познания.

Так или иначе, но в результате алгоритмических манипуляций формируются определенные устойчивые последовательные наборы чисел (ряды). Манипуляции с такими цифровыми структурами часто позволяют увидеть ранее не проявляемые закономерности.

**Число 108 через времена длиною в жизнь.** Некоторые числа у многих народов издавна считаются священными, магическими, символически отображая и воплощая некую тайну природы. В определенной мере 108 – одно из таких чисел, берущее свои истоки из ведической нумерологии. Точнее говоря, из ведической культуры – самой древней на планете. Число 108 в Ведах считается чудодейственным числом совершенства и успеха. Произведя в каком-либо виде деятельности 108 попыток (тренировок, повторений и т.п.), человек достигает определённой ступени совершенства. А информация об этом надежно закрепляется в постоянной памяти и сохраняется в течение всей человеческой жизни.

Число 108 явно обозначает нечто глобальное и всеобъемлющее [5–10].

На Востоке всюду, куда ни посмотри, в церемониях и ритуалах то и дело встречается число 108:

- В исламе число 108 используется для обозначения Бога.
- В индийской традиции существует 108 форм танца, а в хатха-йоге выделяют 108 основных "асан" (поз) лечебной йоги.
- В теле человека насчитывают 108 болевых точек.
- 108 особо чтимых храмов в Индии.
- 108 молитвенных цилиндров установлено вокруг ступы Бодхнатх в Катманду, которую паломники обходят 108 раз, там же – 108 ниш с божествами.
- В драгоценных ожерельях богов – 108 нитей жемчуга, 108 камней.
- В Японии колокол храма Зэн звонит 108 раз, возвещая о наступлении Нового Года.

Согласно поверьям у человека есть 6 главных пороков: жадность, злость, глупость, легкомыслие, нерешительность и алчность. Каждый из пороков имеет 18 оттенков. По мере ударов колокола происходит постепенное очищение от этих пороков,

Сакральное число в буддизме:

- Символизирует всё сущее.
- Канон Ганджур (сборник высказываний Будды) состоит из 108 томов.
- В буддийских храмах 108 раз бьют в колокол, чтобы преодолеть 108 страстей, мешающих людям достичь Просветления.
- Классическое количество бусин в буддийских четках равно 108 (иногда встречаются и другие с делителями 108: 54, 27 или 18), что кодифицирует определенные положения учения.

Они символизируют 108 родов желаний, омрачающих дух человека и мешающих на его пути к просветлению [11]:

– желания, связанные с *шестью* органами чувств: зрением, осязанием, обонянием, вкусом, слухом и умом (6);
– по отношению к предметам прошлого, настоящего и будущего (3);
– к объектам внутренним и объектам внешним (2);
– три способа проявления: в мыслях, в словах и в поступках (3).

Отсюда следуют канонические числа буддизма: $6 \cdot 3 = 18$; $18 \cdot 2 = 36$; $36 \cdot 3 = 108$.

Следует сказать, что четки – не только культовая принадлежность.

В буддизме они играют и роль предмета, в котором кодифицирована информация, связанная с основными философскими и практическими аспектами учения Будды.

А они таковы, что буддизм разумен и научно обоснован, что сильно привлекает современный мир.

Будда говорил: «Не принимайте на веру ничего из того, что я говорю, только из почтения ко мне, но проверяйте это самостоятельно, исследуйте, как если бы вы покупали золото». Многим людям нравится такой недогматический подход.

«Теперь не верьте моим словам только потому, что их сказал Будда, но проверяйте их как следует. Будьте сами себе светом».

Современная наука узнала, что число 108 превалирует в системе «Солнце–Земля»:

• Средняя скорость вращения Земли по эллиптической орбите вокруг Солнца чуть не дотягивает до 108 тыс. км/час (107,15). Но по мере приближения к солнцу ближе к перигелию достигает этой величины.

• Объем Земли ~ $108 \cdot 10^{10}$ км$^3$ ($108{,}32073 \times 10^{10}$).

• Расстояние от Земли до Солнца $1{,}496 \cdot 10^{11}$ м эквивалентно 108 диаметрам Солнца $1{,}392 \cdot 10^{9}$ м, или если точно – 107,5.

• Диаметр Солнца ориентировочно равен 108+1 диаметрам Земли ($1{,}274 \cdot 10^{7}$ м).

• 108 мин – время полета вокруг Земли по наиболее устойчивой орбите. Именно это время полета Гагарина перевело человека на следующий уровень понимания реальности.

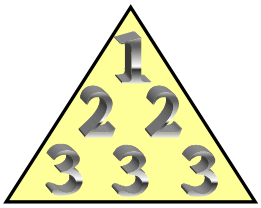
Одно из первых объяснений можно увидеть в возможном восхищении древних вычислителей перед определенной "универсальностью" числа 108.

Так, согласно Платону число, равное половине 108, получается при сложении следующих чисел: единица (1); два первых полных числа (2, 3); два квадратных числа (4, 9); два кубических (8, 27) – итого: $54 = 1 + (2 + 3) + (4 + 9) + (8 + 27) = 108/2$.

Конечно, в массовости применения числа 108 имеется какая-то невидимая "пружинная причина". Просто не может быть, чтобы оно было выбрано чисто случайно или "назначено" каким-то верховным жрецом "в приказном порядке", заставляя всех поклоняться этому числу.

Своеобразная константа для Вселенной.

Что зашифровано этим числом? Какая информация? Какое еще число, символ или знак присутствует в мировых культурах также необъяснимо часто?




Одно из толкований пробуют найти в произведении начальных базовых чисел (гиперфакториале трёх):

$$1 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 108.$$

Эти числа, будучи поставленными одно над другим, образуют "магический" треугольник.

Этнографы приводят "лунное" объяснение: 12 + 24 + 72 = 108, где 12 – месяцы, 24 – полумесяцы, 72 – пятидневки, образующие лунный год.

Понятно, что число 108 получено с применением астрологических наблюдений и означает некий полный круг повторений, величину законченного цикла.

Попробуем в этом разобраться хотя бы косвенно на основе его различных свойств.

**С чего начать?** – Мы не будем заниматься нумерологией в её исконном понимании.

Не станем также вольно и предвзято интерпретировать те или иные числовые закономерности. Попытаемся просто соединить воедино некоторые, на наш взгляд, наиболее существенные характеристики числа 108, которые проявляются во всевозможных ракурсах и позволяют глубже проникнуть в его необыкновенную способность присутствовать во многих приложениях теории чисел.

С развитием компьютерной техники значительно упростились сложные расчеты, и существенно сократилось время рутинных вычислений.

Весь смысл проверки тех или иных преобразовательных процедур теперь состоит лишь в нахождении подходящего метода, правильности составления алгоритма или схемы и быстродействии ЭВМ, если расчеты связаны с большим количеством операций, что составляет в целом суть человеко-машинного общения, обмена информацией и развития.

Потому сегодня можно встретить самые неожиданные числовые манипуляции.

Чаще всего рассматриваются позиционные системы счисления, среди которых самой распространенной является обычная десятичная система, основанная на 10 арабских цифрах.

Именно в этом ключе и продолжим наш анализ.

Итак, число-циклоп[1] **108** ...

**1)** Как и любое целое число, раскладывается на простые сомножители $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ и в данном случае имеет форму $n^n (n+1)^{n+1}$: **108** = $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^3$.

Их сумма $2+2+3+3+3 = 13$ – число Фибоначчи (A098833).

Благодаря такому специфическому разложению относится к числам (A072873), для которых сумма отношений $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i / p_i$ – целое число: $2/2 + 3/3 = 2$

**2)** Наименьшее трёхзначное число, имеющее ровно 5 простых делителей с учетом их кратности (A106421) **108** = 2·2·3·3·3.

Имеет 12 делителей (также как 60 и 72, A030630) $d_k$: **1**, 2, 3, **4**, 6, 9, 12, 18, **27**, 36, 54, **108**.

Наименьшее число, в списке делителей которого каждая из цифр 0÷9 появляется как минимум единожды (A059436).

*Полнократное* число (*powerful*, квадратично-полное) – положительное целое *n* такое, что для каждого его простого делителя *p*, число $p^2$ также делит *n* [12] (A001694). То есть любой из его простых сомножителей $p_i$ имеет кратность $\alpha_i \geq 2$: **108** = $2^2 \cdot 3^3$.

Более того, **108** – наименьшее число, которое тремя способами раскладывается на сумму двух полнократное чисел (A115354): **108** = $2^3 + 2^2 \cdot 5^2 = 3^3 + 3^4 = 2^2 \cdot 3^2 + 2^6$.

*Ахиллесово* число (*Achilles number*) [13] – полнократное, но не совершенное (*perfect power*), то есть не представимо в виде степени другого натурального числа $n \neq m^s$, $m > 1$, $s > 1$ (A052486). Иначе говоря, $\gcd(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) = 1$.

$$\mathbf{108} = 2^2 \cdot 3^3, \text{ но } \mathbf{108} \neq m^s.$$

*Энергетическое* число – выражается в виде суммы положительных степеней (возможно, разных) своих составных частей (A055480): **108** = $10^2 + 8^1$.

*Избыточное* число (*abundant number*) – натуральное число *n*, сумма положительных делителей (отличных от *n*) которого превышает *n* (A005101), то есть

$$\sigma(\mathbf{108}) - \mathbf{108} = 280 - 108 > \mathbf{108}.$$

где $\sigma(n)$ – сигма-функция – сумма всех делителей *n*.

Минимальное число *n* = **108** такое, что $\sigma(n) \geq 2^8 = 256$ (A172516).

**3)** Сумма шести последовательных нечетных чисел 13+15+17+19+21+23 = **108**.

Сумма двух репдигитов или моноцифровых чисел: 9 + 99 = **108**.

Сумма произведений численности делителей (A055507):

**108** = $\sum_{k=1}^{n} d_k d_{n+1-k}$ при $n = 13$ и $n = 14$, где $d_k$ – количество делителей числа *k*.

Сумма унитарных делителей первых 12 целых чисел (A064609)

$$\mathbf{108} = \sum_{n=1}^{12} \sum_i d_{i,n} = 1+3+4+5+6+12+8+9+10+18+12+20,$$

где $d_{i,n}$ – *i*-й унитарный делитель числа *n* такой, что $\gcd(d,\ n/d) = 1$.

---

[1] Содержит единственный ноль, расположенный посредине (последовательность A134808 в OEIS).

С у м м а двух двойных факториалов: 3!! + 7!! = 3·1 + 7·5·3·1 =**108**.

С у м м а цифр конкатенации (сцепления, склеивания) последовательных 35 нечетных чисел 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 (A067115).

Наименьшее число, которое может быть одновременно записано в виде суммы последовательных натуральных чисел, содержащих $n-1$ и $n$ слагаемых:

$$10+11+12+13+14+15+16+17 = \mathbf{108} = 8+9+10+11+12+13+14+15+16.$$

**4)** Не унитарно-обильное число (A064597): сумма не унитарных делителей числа $n$ больше $n$.

Напомним, что натуральное число $a$ – *унитарный делитель* числа $b$, если $b/a$ взаимно простые, то есть не имеют общих сомножителей, кроме 1.

Сумма не унитарных делителей $n$ = **108** равна:

$$\overline{\sigma}(108) = 2+3+6+9+12+18+36+54 = 140 > \mathbf{108}.$$

Примечательно, что **108** – самое первое из немногих чисел (A063880), для которого

$$\sigma(n) = 2\overline{\sigma}(n).$$

**5)** Не может быть представлено в виде суммы *квадрата* (включая 0 и 1) и *полупростого* (представимого в виде произведения двух простых чисел), A100570.

А вот пара 2·**108** ± 1 = (215, 217) = (5·43, 7·31) –полупростые числа (A082130).

**6)** Гиперфакториал $n$ = 3: $H(n) = \prod_{k=1}^{n} k^k = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n$: $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3$ = **108**.

**7)** *Самопорожденное* число (по Капрекару, A003052). У него нет генераторов при цифросложении [14, 15].

**8)** Число *харшад* [16] – натуральное число, делящееся нацело на сумму своих цифр (A005349): **108** / (1+8) = 12.

Боле того, оно делится на сумму цифр своего квадрата и куба (A135188):

$$\mathbf{108}^2 = 11664, \qquad \mathbf{108}/(1+1+6+6+4) = \mathbf{108}/18 = 6;$$

$$\mathbf{108}^3 = 1259712, \qquad \mathbf{108}/(1+2+5+9+7+1+2) = \mathbf{108}/27 = 4.$$

**9)** Функция Эйлера $\varphi(\mathbf{108}) = 36 = 6^2$ является совершенным квадратом (A039770).

Произведение сомножителей и их степеней числа 108 = $2^2 \cdot 3^3$ тоже дает 36 = 2·2·3·3.

$n$ = **108**: $n \cdot \varphi(n) \cdot \varphi(\varphi(n))$ = 46656 = $216^2$, т.е. приводит к полному квадрату ( A116002).

$k$ = 11: $\varphi(k^2 + k + 1)$ = **108** (A066791).

$k$ = 42: $\varphi(k) + \sigma(k)$ = **108**.

$k$ = 18 = 108/6: $k\varphi(k)$ = **108** (A002618).

Функция Эйлера $\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} \gcd(k,n) \cdot e^{-\frac{2\pi k}{n} i}$ равна количеству натуральных чисел, не больших целого $n > 0$ и взаимно простых с ним.

Кроме того, $\varphi(108) = 36$ – делитель **108** (A007694).

Одно из немногих решений уравнения: $\varphi(\sigma(n)) + \varphi(\varphi(n)) = n$ (A107651).

Относится также к немногочисленным числам $n$ таким, что $\sigma(x) = n$ имеет только 2 решения (A007371): $\sigma(85) = \sigma(107) = \mathbf{108}$.

Кроме того, $2^{\mathbf{108}} - 2$ удовлетворяет уравнению $\varphi(x) + 2 = \varphi(x+2)$, то есть

$$\varphi\left(2^{\mathbf{108}} - 2\right) + 2 = \varphi\left(2^{\mathbf{108}}\right).$$

**10)** Число ожерелий с $n$ бусинками $k$ цветов (количество $n$-мерных столбиков, состоящих из кирпичиков $k$ цветов) определяется формулой (A075195)

$$T(n,k) = \frac{1}{n}\sum_i \varphi(d_i) k^{n/d_i} ,$$

где $d_i$ – делители числа $n$, $\varphi(x)$ – функция Эйлера.

Принимая во внимание значения $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ и $\varphi(5) = \varphi(10) = 2^2$, 10-мерный вектор с двумя цветами дает искомое число

$$T(10,2) = \frac{2^{10} + 2^5 + 2^4 + 2^3}{10} = \mathbf{108}.$$

Здесь прослеживается перекличка с золотым сечением, поскольку в разложении $10 = 2\cdot 5$ присутствует пятерка (основа пентагона) и двойка (деление на две части).

Подобное мы видим и в следующих соотношениях:

$$2\left[\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5 + \left(1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5\right] - 1 = \mathbf{108}.$$

$$\left\lceil 60\frac{5+\sqrt{5}}{4} \right\rceil = \mathbf{108}.$$

Кроме того, справедливы "троичные формулы", $\Sigma(\cdot)$ – сумма цифр:

$$\left(3+\sqrt{3}\right)^3 + \left(3-\sqrt{3}\right)^3 = \mathbf{108},$$

$$3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 = \mathbf{108},$$

$$(3^5 - 3^3)/2 = \mathbf{108},$$

$$\Sigma(\mathbf{108}^3) = 3\cdot\Sigma(\mathbf{108}) = 27.$$

**11)** Число двухцветных образцов (патернов) на поле $n\times n$ (A002619) определяется как

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_i \varphi^2(d_i)\frac{n}{d_i}!\, d_i^{n/d_i} ,$$

где $d_i$ – делители $n$; $a_7 = \dfrac{6!+6^2}{7} = \mathbf{108}$.

**12)** Количество вариантов 7-узлового "псевдолеса" [17] – неориентированного графа, содержащего только один цикл (A134964).

**13)** Уменьшенный набор чисел Фибоначчи $F$ с нечетными номерами (A063683)

$$\sum_{i \mid \gcd(i,\,2n)=1} F_i: \quad n = 6 \to F_1 + F_5 + F_7 + F_{11} = 1 + 5 + 13 + 89 = \mathbf{108}.$$

Кроме того, $F_{2n}\dfrac{1+F_{n-1}}{F_n} = 144\dfrac{1+5}{8} = \mathbf{108}$ при $n = 6$.

**14)** Имеет множество разнообразных связей с числами Фибоначчи, в частности:

- Индекс наименьшего числа Фибоначчи, имеющего 15 простых сомножителей (с учетом повторения, A072396): $F_{\mathbf{108}} = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 107 \cdot 109 \cdot 5779 \cdot 1112842$.
- $F_{\mathbf{108}}$ делит $F_{F_{\mathbf{108}}}$ ( A127787).
- Элемент обобщенных последовательностей Фибоначчи (с измененными начальными условиями)

4, 11, 15, 26, 41, 67, **108**...

1, 21, 22, 43, 65, **108**...

- Число $n = \mathbf{108}$ – такое, что $n{\cdot}F_n + 1$ – простое (A134313):

$$\mathbf{108}{\cdot}F_{\mathbf{108}} + 1 = 1797230997067020875506369.$$

- Номер $n = \mathbf{108}$ – такой, что является делителем числа Фибоначчи $F_{\mathbf{108}}$ (A023172):

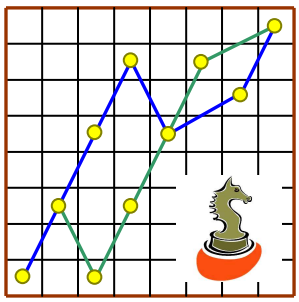
$$166410277506205636620 96 / 108 = 1540835902835237376 12.$$

- Период Пизано $\pi(n)$ – период повторения чисел Фибоначчи по модулю $n$ [18]:

$$\pi(53 \cdot 109 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 2^k) = \mathbf{108},$$

где обязательным является лишь один или сразу оба сомножителей 53 и/или 109, $k = 0, 1, 2, 3$; пара (17, 19) = 108/6 ± 1.

**15)** Элемент <почти фибоначчиевой> последовательности (A022317) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 1$: 0, 12, 13, 26, 40, 67, **108**...



**16)** Количество 6-ходовых путей коня на обычной шахматной доске 8×8 из одного угла в противоположный угол (A025601, A120399). Меньшего числа ходов просто нет.

**17)** Является начальным числом $x$ (A157084) пифагоровой пятерки (пятиплекса) $(x, x+1, x+2, z-1, z)$, удовлетворяющей условию $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (z-1)^2 + z^2$:

$$\mathbf{108}^2 + 109^2 + 110^2 = 133^2 + 134^2 = 35645.$$

**18)** Наименьшее число (>13) такое, что сумма последовательных квадратов является квадратом (A075404)

$$\sum_{k=13}^{108} k^2 = 425104 = 652^2.$$

**19)** Нельзя представить в виде суммы различных квадратов (A001422).

**20)** Наименьшее число $n = \mathbf{108}$ такое, что $\left\lceil \dfrac{n}{\Phi^k} \right\rceil = k$, где $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ – число золотого сечения, $k = 7$ (A182614).

**21)** Наименьшее число, состоящее из 5 простых сомножителей $(2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3)$ и равное сумме 5 кубов (A122733):

$$\mathbf{108} = 1^3 + 2^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3.$$

Среднеарифметическое четырех последовательных кубов $\dfrac{3^3+4^3+5^3+6^3}{4} = \mathbf{108}$.

**22)** Такое число, что одно вращение (слева) цифр его квадрата снова приводит к квадрату (A045878):

$$\mathbf{108}^2 = \underline{1}1664 \to 16641 = 129^2.$$

**23)** Минимальное число $n = \mathbf{108}$ такое, что $16!$ – делитель $n!$ (A093886).

$$\frac{\mathbf{108}\,!}{\prod_{k=1}^{16} k\,!} = 700510340441082642093840253105933153332589208644243997595134407837450702578650778750.$$

**24)** Количество представлений $n^2 = 9^2 = 81$ в квадратах, не больших чем $n$ (A093115).

То есть, **108** – число вариантов представления $9^2$ в виде суммы $9^2 = a\cdot1^2 + b\cdot2^2 + c\cdot3^2$, где $(a, b, c)$ – неотрицательные целые числа.

**25)** Количество различных равенств, составленных суммированием чисел 1÷8, используя каждое число в конкретном равенстве не более одного раза (A161943).

Например, 1+7=2+6, 3+5=8, 2+7=1+3+5 и т.д.

**26)** Наименьшее произведение четырёх $(n = 4)$ различных чисел, сумма которых равна факториалу $n!$ (A114310). Определяется формулой $(n-1)![n!-n(n-1)/2]$.

Так, $1\cdot2\cdot3\cdot18 = \mathbf{108}$, $1+2+3+18 = 24 = 4!$

**27)** Такое $n = \mathbf{108}$, что $\sigma(N) \geq 2N$, то есть $N = 2^n - 1$ – совершенное или избыточное число: сумма положительных делителей, отличных от $N$, равна или больше $N$ (A103292).

**28)** Существует ровно **108** пар дружественных чисел, из которых меньшее значение не превышает $10^7$ (A066873).

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 220 | 284 |
| 2 | 1184 | 1210 |
| | …… | …… |
| 107 | 9660950 | 10025290 |
| **108** | 9773505 | 11791935 |

Напомним, что *дружественные* числа (*amicable number*) [19] – два различных натуральных числа с равными суммами всех их собственных делителей (A063990).

**29)** *Товарищеское* число (*friendly number*) [20] – число-член товарищеской пары или более высокого порядка товарищеского кортежа [21] (например, 6, 28, 496, 8128), удовлетворяющей соотношению $\dfrac{\sigma(n)}{n} = \dfrac{\sigma(m)}{m}$, где $\sigma(x)$ – функция делителей (A074902).

Не следует путать с дружественными числами [19], для которых $\sigma(n) = \sigma(m)$. Товарищеская пара (**108**, 372438): $\dfrac{280}{108} = \dfrac{965580}{372438} = \dfrac{70}{27}$ [22].

**30)** Объем прямоугольного параллелепипеда (*cuboid*, A118901) с целыми сторонами $(a, b, c) = (18, 6, 1)$: $18\cdot6\cdot1 = \mathbf{108}$ и целой диагональю $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 19$.

**31)** Представляет интерес последовательность, образованная по следующему правилу (A080445 – A080453): $a_n$ – наименьшее (нетривиальное) число, кратное $a_{n-1}$ и содержащее $n$ цифр, причем $a_n \neq 10a_{n-1}$.

Примечательно, что из 9 случаев $(a_1 = 1 \div 9)$ больше половины (пять) на третьем шаге приводят к искомому числу **108** (табл. 1).

*Таблица* 1

**Начальные значения *n*-значных членов последовательностей**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 12 | 12 | 15 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 121 | **108** | **108** | **108** | 105 | **108** | 112 | 112 | **108** |
| 1089 | 1188 | 1188 | 1188 | 1155 | 1188 | 1008 | 1008 | 1188 |

**32)** Не менее интересен и другой числовой ряд: $a_1 = 1$, $a_n$ – самое маленькое положительное число, кратное $a_{n-1}$, которое содержит двоичные представления всех положительных целых чисел, не превышающих $n$, как минимум единожды в его двоичном представлении (A144098): 1, 2, 6, 12, **108**, **108**, 756 ...

В двоичной записи чисел, кратных двенадцати, отсутствуют 3(11) или 5(101): 12(1100), 24(11000), 36(100100), 48(110000), (111100), 72(1001000), 84(1010100), 96(1100000).

И лишь число 12·9 = 108(1101100) содержит 1÷5 (1, 10, 11, 100, 101), поэтому $a_5$ = **108**.

Это же число **108**·1 содержит и 6(110), следовательно, $a_6$ = **108**.

**33)** Двоичная замена $n = 6$ и слияние двух кусков в двоичном расширении (A065159):

$$6 = 110 \to 110(0)110 = 1100110 = 2^6 + 2^6 + 2^3 + 2^2 = \mathbf{108}.$$

**34)** Количество кратчайших общих двоичных строк, содержащих бинарное представление натуральных чисел от 1 до 20 (A175809) равно **108**. Так, для первых 5 натуральных чисел 1, 10, 11, 100, 101 имеются две короткие строки 110100 и 101100.

**35)** Наименьшее натуральное число, которое в двоичной записи содержит двоичные представления шестого простого (13) и шестого составного (12) числа в виде одной перекрывающейся строки (A175349):

$$13(1101) \text{ и } 12(1100) \to 1101100 \to 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^2 = \mathbf{108}.$$

**36)** Сумма первых **108** простых чисел $\sum_{k=1}^{108} p_k = 28697$ – простое число (A013916).

$$1 + \sum_{k=0}^{35} k^{108} = 600716636404698196575202089300758853315184126673906797409949355642090354619563919894399993814140194597454567172041932751754734667248366503300982396490839201802426549 79$$ – простое (A124187).

**37)** Сумма двухзначных простых чисел: минимального и максимального 11 + 97 = **108**.

**38)** Сумма первых простых чисел с четными индексами (A077126):

$$p_2 + p_4 + p_6 + p_8 + p_{10} + p_{12} = 3 + 7 + 13 + 19 + 29 + 37 = \mathbf{108}.$$

Сумма первых простых чисел, чьи индексы – простые (A083186):

$$p_2 + p_3 + p_5 + p_7 + p_{11} + p_{13} = 3 + 5 + 11 + 17 + 31 + 41 = \mathbf{108}.$$

Разность квадрата и простого числа $p_5^2 - p_6 = 11^2 - 13$ = **108**.

**39)** $2^{2n} - 2^n - 1$ = 1053122916685571866979180276836701078003414369738223280982904012 79 – простое число, $n$ = **108** ( A098845).

Следующие весьма примечательные числа тоже простые:

$5 \cdot 10^n - 7 = 49_{n-1}3$ (A103002);

$4 \cdot 1_{\mathbf{108}} + 5 = 4_{107}9$ (A099414);

$57_{\mathbf{108}}3$ (A101585);

$2^{\mathbf{108}} + 3^{\mathbf{108}} + 4^{\mathbf{108}}$ (A081507);

1+**108**!/10 (A139071).

1+**108**!/10 = 1324641819451828974499891837121832599810209360673358065686551152497461815091591578895743130235002378688844343005686404521144382704205360039762937774080000000000000000000000001.

Здесь $m_k$ – число репдигит [23], запись которого содержит $k$ одинаковых цифр (знаков) $m$, то есть цифра $m$ повторяется $k$ раз: $1_4$ = 1111, $6_3$ = 666 и т.д.

**40)** Количество позиций в игре «крестики-нолики» на поле 3×3 после 4 ходов, с учетом вращений и отображений (A008907).

**41)** Количество различных способов, которыми $k = 4$ человека могут перейти мост по схеме: 2 переходят, 1 возвращается, 2 переходят, 1 возвращается,.., 2 переходят (A167484):

$$k!\frac{[(k-1)!]^2}{(2!)^{k-1}} = \mathbf{108} \text{ при } k = 4.$$

**42)** Сумма трёх последовательных пятиугольных чисел [24] $P_n = n(3n-1)/2$ :

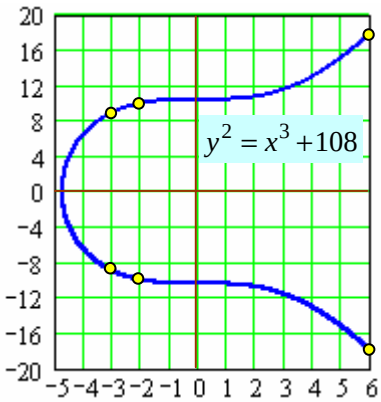
$$P_4 + P_5 + P_6 = 22 + 35 + 51 = \mathbf{108}.$$

Суммы таких троек выражаются последовательностью (A129863): 6, 18, 39, 69, **108**, 156...

$$a_n = \frac{3}{2}\left(3n^2 + 5n + 4\right), \quad a_4 = \mathbf{108}.$$

**43)** Количество решений кубического уравнения по модулю $n$ при $n = 14$ (A137401)

$$\left(x^3 + y^3\right)(\text{mod } n) = z^3(\text{mod } n), \qquad 1 \le (x, y, z) < n.$$



Кривая Моделля

**44)** Представимо в виде $x^2 - y^3$ (A080761):

$$\mathbf{108} = 18^2 - 6^3 = 7002^2 - 366^3.$$

Допускает выражение своего куба в виде

(A054234): $\mathbf{108}^3 = 62^3 + C_{184}^3$.

Седьмая степень записывается в виде суммы (A175556):

$$\mathbf{108}^7 = 648^5 + 7558272^2.$$

**45)** Эллиптическое диофантово уравнение Моделля $y^2 = x^3 + n$ при $n$ = **108** имеет 8 решений (A179152):

$$(-3, \pm 9), \quad (-2, \pm 10), \quad (6, \pm 18), \quad (366, \pm 7002).$$

**46)** Допускает более одного способа представления в виде суммы квадрата и куба других чисел (A05440, A055393): **108** = $9^2 + 3^3 = 10^2 + 2^3$.

**47)** Раскладывается $(a+b)$ = **108** = $x{\cdot}y$ так, что $a{\cdot}b$ = **108**$(x+y)$:

$$\mathbf{108} = (36 + 72) = 6{\cdot}18, \quad 36{\cdot}72 = \mathbf{108}(6 + 18).$$

**48)** $a_{10}$ = **108** в последовательности (A091766) $a_n = a_{n-1} + m(a)$, где $m(a)$ – наименьшее число, которое не может быть выражено как $a_i$, $a_j \pm a_i$, $i < j < n$, $(a_0, a_1) = (0,\ 1)$.

**49)** Количество $N$ = **108** натуральных чисел $\{n\}$ таких, что $\sqrt[3]{n} \approx 6$ по правилам округления до целых (A058034): начальное число – $\lceil 5{,}5^3 \rceil + 1 = 167$, конечное число – $\lceil 6{,}5^3 \rceil = 274$. Всего: 274 – 167 + 1 = **108**.

**50)** Справедливы следующие числовые представления:

$$\frac{3^5-3^3}{2} = \frac{3^6-3^4}{6} = 10^2+3^2-1^2 = 3\cdot 6^2 = \frac{6\cdot 6\cdot 6}{2} = \frac{6!+6^2}{7} = \left\lceil e^{\sqrt{22}} \right\rceil = \mathbf{108}.$$

**51)** $\dfrac{10+\mathbf{108}!}{10} = 1 + \dfrac{\mathbf{108}!}{10}$, $\quad \mathbf{108}^3 + \mathbf{108} + 1 = 1259821$ – простые числа (A139071).

**52)** $\dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+16)}{n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+16)}$ = 9632530575360000 – целое, $n$ = **108**.

**53)** 9973·**108** + 10007 = 10887091 – простое (A101444),
где 9973 – наибольшее 4-значное простое, 10007 – наименьшее 5-значное простое.

997·**108** + 101 = 107777 – простое (A105679),
где 101 и 997 – соответственно наименьшее и наибольшее 3-значное простое.

97·**108** + 11 = 10487 – простое (A105779),
где 11 и 97 – соответственно наименьшее и наибольшее 2-значное простое.

**54)** Составное число **108**235711131719 – простое (A099192), где вторая часть образована последовательным соединением первых восьми простых чисел: 2 3 5 7 11 13 17 19.

**55)** Среднее простых чисел-близнецов (A014574) – пары простых чисел, отличающихся на 2: 107 и 109. Все пары простых близнецов, кроме (3, 5) имеют вид $6m \pm 1$.

Одновременно **108** – сумма 5 последовательных средних простых близнецов (A160919):

$$6_{(5,7)} + 12_{(11,13)} + 18_{(17,19)} + 30_{(29,31)} + 42_{(41,43)} = \mathbf{108}_{(107,109)}.$$

Кроме того, $n$ = **108** относится к таким числам (A154671), для которых $n^3$ и $n/3$ – квадраты: **108**·3 = 324 = $18^2$; **108**/3 = 36 = $6^2$.

Последовательность простых чисел $(p, p+2, p+6)$ или $(p, p+4, p+6)$ – *триплет*.

Например, простые числа около **108**: (103, 107, **108**, 109), (107, **108**, 109, 113).

В настоящее время, наибольшими известными простыми близнецами являются числа $65516468355{\cdot}2^{333333} \pm 1$ (http://primes.utm.edu/largest.html#twin).

**56)** Количество различных дельтоидов (четырёхугольников с двумя парами сторон одинаковой длины, наподобие воздушного змея), включая квадраты, вершины которых расположены на сетке 13×13 (A159944).

**57)** *Сложность* целого $n$ – наименьшее количество единиц, необходимых для представления $n$, используя сложение, умножение и скобки [25].

Так, число шесть можно представить тремя способами, один из которых использует 5 единиц, то есть сложность 6 равна пяти: 6 = 1+1+1+1+1+1 = (1+1)(1+1)+1+1 = <u>(1+1)(1+1+1)</u>.

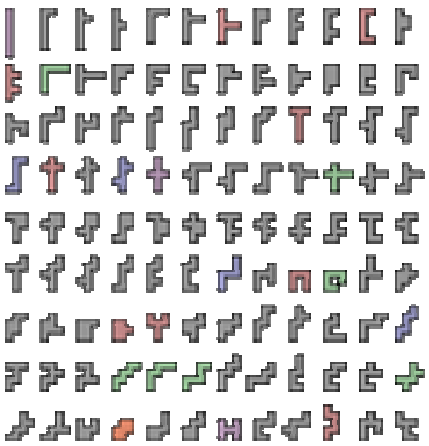
Число 18 = $2{\cdot}3^2$ = **108**/6 можно представить единицами **108** способами (A005421).

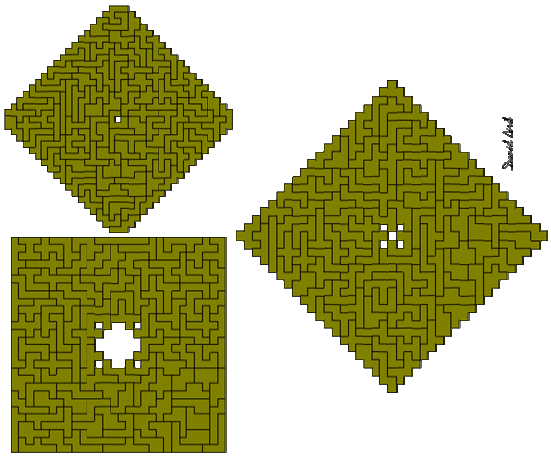
**58)** Наименьшие нетривиальные кубы $y_n = x_n^3$, начинающиеся цифрами предыдущего числа $y_{n-1}$ (исходный куб равен 1), составляют последовательность (A048563):
1, 125, 1259712, 12597128685582839, 125971286855828397030916344220094986726819180 8152, ...
с исходными основаниями $x_n$ (A048564): 1, 5, **108**, 232679, 10800002482161878, ...

**59)** Наподобие домино в математике известно их расширение в фигурки полимино (*polyominoes*) [26], которые содержат $n$ клеток-квадратиков, соединённых между собой сторонами ("ходом ладьи"). Суммарные количества таких фигурок для разных значений $n$ определяют последовательность (A000105): 1, 1, 1, 2, 5, 12, 35, **108**, 369, 1285...

В частности, гептомино (7-мино) – полимино из семи квадратиков [27] или плоские фигуры, каждая из которых содержит семь одинаковых квадратиков.

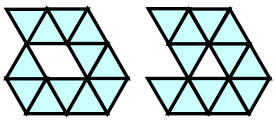
Считается, что зеркальная и вращательная симметрии не создают новых фигур.





Количество полимино 7-го порядка (*heptomino*) равно **108**, в том числе:
88 – ассиметричных;
9 – с одной осью зеркальной симметрии, вдоль стороны квадратиков;
7 – с одной осью зеркальной симметрии, вдоль диагонали квадратиков (под 45°);
4 – с вращательной симметрией второго порядка;
3 – с двумя осями отражательной симметрии, вдоль стороны квадратиков;
1 – с двумя осями вращательной симметрии, вдоль диагонали квадратиков.

Характерная особенность: из всех **108** фигурок не удается полностью заполнить квадрат (http://www.recmath.com/PolyPages/).



В то же время существует ровно **108** полимино, которые состоят из квадратов (A103473) [28].

Кроме того, **108** – количество 12-ячеистых треугольных полимино (полимондов) с дырками.

**60)** В области числовых манипуляций известна следующая задача (A097156):

по мере роста натуральных чисел $n$ определить наименьшее целое положительное число $x = a(n)$, которое приводится к нулю после последовательного повторения точно $n$ операций: $x_{t+1} = R(x_t) - d_{\max}(x_t)$, где $R(\xi)$ – реверс числа $\xi$; $d_{\max}(\xi)$ – максимальная цифра (digit) в записи числа $\xi$; $x_0 = a(n)$, $x_{n-1} \neq 0$, $x_{n-1} = 0$.

Реверсивная функция (реверс-число), по сути, представляет собой запись натурального числа в обратном порядке $R(\xi) = R(\alpha_m \ldots \alpha_0) = \alpha_0 \ldots \alpha_m$, где $\alpha_t$ – цифры исходного числа $\xi$.

Образованные этой функцией числа иногда называют зеркальными.

Смысл вроде понятен, хотя само действо таковым может и не являться, например, числа 760 и 76 с трудом воспринимаются зеркальными.

Легко проверить, что **108** – минимальное число, которое превращается в ноль в результате выполнения операции (1) ровно за 10 шагов.

$$a(10) = \mathbf{108} \to 793 \to 388 \to 875 \to 570 \to 68 \to 78 \to 79 \to 88 \to 80 \to 0.$$

Кроме того, удовлетворяет равенству (A160930) **108** = $R(23) + 24 + R(25) = 32 + 24 + 52$.

**61)** В продолжение темы золотых матриц Фибоначчи [29] представляет интерес формирование треугольной матрицы по следующей рекуррентной схеме (A105422):

$$T_{k,n} = T_{k,n-1} + T_{k,n-2} + T_{k-1,n-1} - T_{k-1,n-2},\ T_{0,0} = 1,\ T_{0,1} = 0.$$

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **0** | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 |
| | 1 | 0 | 2 | 2 | 5 | 8 | 15 | 26 | 46 | 80 | 139 |
| | | 1 | 0 | 3 | 3 | 9 | 15 | 31 | 57 | **108** | 199 |
| | ***k*** | | 1 | 0 | 4 | 4 | 14 | 24 | 54 | 104 | 209 |
| | ↓ | ***n*** → | | 1 | 0 | 5 | 5 | 20 | 35 | 85 | 170 |

В частности, **108** = 57 + 31 + 46 – 26.

В нулевой строке ($k = 0$) расположены числа Фибоначчи.

Физически $T_{k,n}$ – количество *композиций* числа $n$, содержащих в точности $k$ единиц.

*Композиция* – представление числа в виде упорядоченной суммы натуральных слагаемых (частей) с учетом порядка следования частей (в отличие от разбиения) [30].

Число $n$ имеет всего $2^{n-1}$ композиций, в том числе $C_{n-1}^{k-1}$ вариантов длиной $k$.

Таким образом, **108** – это количество композиций числа 10, содержащих в составе их частей ровно две единицы.

**62)** В продолжение данной темы, **108** – это количество композиций числа 10 из двух частей, содержащих величины 1 и 2 двух видов или цветов (A105478).

**63)** В результате сложения числа $\overline{\alpha_1 ... \alpha_k}$ со своим реверсом (зеркально-цифровым отражением) $\overline{\alpha_k ... \alpha_1}$ образуется некая траектория:

**108** → 909 → 1818 → 9999 → 19998 → 109989 → 1099890 → 2089791 → 4069593 ....

Вследствие специфики десятичного представления **108** является базовым для многих других чисел в части траектории функции сложения числа со своим реверсом.

То есть ряд чисел (A070797) выходят на данную траекторию, начиная с $m$-го шага.

Обычно $m = 1 \div 15$.

В частности ($m = 15$), 171 (270) → 342 → 585 → 1170 → 1881 → 3762 → 6435 → 11781 → 30492 → 59895 → 119790 → 217701 → 325413 → 639936 → 1279872 → 4069593 ...

**64)** Число пар $(x, y)$ таких, что $2^2x + 3^2y = n$, определяется по формуле (A033183)

$$m_n = 1 + \left\lceil \frac{7}{9} n \right\rceil + \left\lceil \frac{-3}{4} n \right\rceil.$$

Наименьшее значение $n$ = **108** соответствует четырём возможным решениям $m_{\mathbf{108}} = 4$.

**65)** Является членом любопытного ряда (A063108) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = a_n + \Pi(a_n)$, где $\Pi(a_n)$ – произведение ненулевых цифр числа $a_n$: 1, 2, 4, 8, 16, 22, 26, 38, 62, 74, 102, 104, **108**, 116...

**66)** *Гладким числом* называется целое число, все простые делители которого малы. Эти числа особенно важны в алгоритмах факторизации (разложения на простые множители).

Количество последовательных пар гладких чисел ($x$, $x$+1) таких, что все их простые сомножители не превышают первые $n$ простые числа, образуют последовательность (A002071): 1, 4, 10, 23, 40, 68, **108**, 167, 241...

Таким образом, существует ровно **108** пар гладких чисел[2], простые сомножители которых не превышают $p_7 = 17$.

**67)** Одиннадцатый член последовательности "тетраначчи" (A000078): $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + f_{n-4}$ со стандартными начальными условиями

$$(f_0, f_1, f_2, f_3) = (0, 0, 0, 1): 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, \mathbf{108}, 208...$$

Комбинаторная формула для элементов ряда в явном виде (не рекуррентная) имеет вид:

$$f_n = \sum_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-3}{5} \right\rceil} (-1)^i C_{n-3-4i}^{\ i} 2^{n-3-5i} - \sum_{i=0}^{\left\lceil \frac{n-4}{5} \right\rceil} (-1)^i C_{n-4-4i}^{\ i} 2^{n-4-5i}.$$

Корень характерного полинома $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ равен 1,92756 и удовлетворяет также уравнению $x + x^{-4} = 2$.

**68)** **108** – количество трёхзначных положительных палиндромов (A050250).

**69)** Среднеарифметическое квадратов простых сомножителей – простое число (A134617)

$$\mathbf{108} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow \frac{2\left(2^2\right) + 3\left(3^2\right)}{2+3} = 7.$$

**70)** «Магическое число» – такое число $\overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$, что каждое взятое слева $k$-цифровое число $\overline{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}$ делится на $k$ при любом $k = \overline{1, n}$ (A144688).

$$\mathbf{108}/3 = 36, \quad 10/2 = 5.$$

Например, самое большое 25-цифровое магическое число равно (Seidov Z., 2009) 3608528850368400786036725.

**71)** Наименьший предшественник $n$-цикла (A151543) в задаче "Возвращающегося цифрового инварианта" [31]:

$$\mathbf{108} \to 1^3 + 0^3 + 8^3 = 513 \to 5^3 + 1^3 + 3^3 = \underline{153} \to 1^3 + 5^3 + 3^3 = \underline{153}.$$

**72)** Количество пар натуральных чисел $(x, y)$, $x \geq 2$, $y \geq x$ таких, что $x \cdot y < 9^2$ (A037048).

**73)** Количество паросочетаний в 3-кубе (A045310) – набора независимых ребер в полиграфе, не имеющих общих вершин [32]: **108** = 1 + 12 + 42 + 44 + 9.

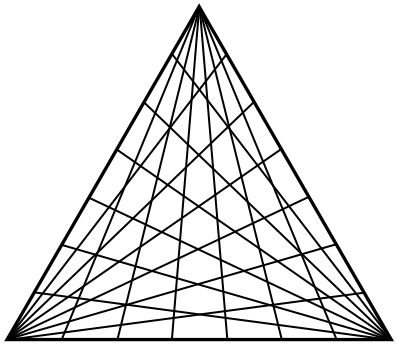
**74)** Количество внутренних точек пересечения прямых, проходящих через углы равностороннего треугольника и $n-1$ точек, образуемых в результате деления сторон на $n$ равных частей-отрезков [33].

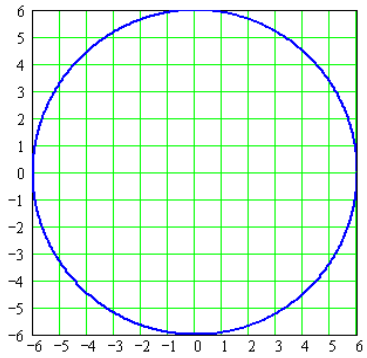
Подсчет точек пересечения выполняется только один раз (A091908).

При $n$ = 6 внутри треугольника содержится ровно **108** таких точек пересечения (см. рисунок слева).

---

[2] Størmer's theorem. – http://en.wikipedia.org/wiki/St%C3%B8rmer%27s_theorem.






**75)** **108** – количество точек координатной сетки с шагом 1, покрытых кругом диаметр 12 [34]. Центр круга выбирается так, чтобы круг покрывал минимально возможное число "решетчатых точек" (A123689) (см. рисунок справа).

**76)** Количество частичных биекций (подперестановок) в $n$-элементном множестве без фиксированных точек (A144085)

$$b_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{C_{n-k}^{\,j}}{j!}, \quad b_4 = \mathbf{108}.$$

или рекуррентно

$$b_n = (2n-1)b_{n-1} - (n-1)(n-3)b_{n-2} - (n-1)(n-2)b_{n-3}, \quad b_4 = 71\cdot 8 - 3\cdot 4 - 6\cdot 1 = \mathbf{108}.$$

**77)** Количество бит факториала 30!, равное $\left\lceil \frac{\lg 30}{\lg 2} \right\rceil + 1$ = **108** (A072831),

где $\lceil \xi \rceil$ – целая часть от $\xi$.

**78)** Наименьшее число, куб которого начинается и заканчивается 12 (A077752)

$$\mathbf{108}^3 = \underline{12}597\underline{12}.$$

**79)** Треугольно-спичечные числа: сумма $n+1$ целых, начиная с $n$, то есть 1+2, 2+3+4, 3+4+5+6, 4+5+6+7+8 ... (A045943):

$$a_n = \sum_{j=0}^{n}(j+n) = \frac{3n(n+1)}{2}; \quad a_0 = 0, \quad a_n = a_{n-1} + 3n: \ 0, 3, 9, 18, 30, 45, 63, 84, \mathbf{108}, 135...$$

**80)** Элемент любопытной последовательности (A046966): $a_n$ – наименьшее число, которое больше предыдущего $a_n > a_{n-1}$ и удовлетворяет условию: $a_1 \cdot a_2 \cdot\cdot a_n + 1$ – простое.

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdot 16\cdot 22\cdot 25\cdot 29\cdot 31\cdot 35\cdot 47\cdot 57\cdot 61\cdot 66\cdot 79\cdot$ **108** = 401225954266456402406400 01 – простое.

**81)** Член ряда экзотических последовательностей "цифросложения", в том числе:

- (A131954) $a_n = \Sigma[n! + a_{n-1}]$, где $\Sigma[\cdot]$ – сумма цифр: 1, 3, 9, 6, 9, 18, 18, 18, 36, 36, 45, 36, 36, 54, 54, 72, 72, 63, 54, 63, 72, 81, **108** ...

$$a_{23} = 23! + 81 = 2585201673888497664008 1; \ \Sigma[a_{23}] = \mathbf{108}.$$

- (A071121) $a_n = a_{n-1} + \Sigma[n^3]$: 1, 9, 18, 28, 36, 45, 55, 63, 81, 82, 90, **108**, ...

**82)** Относится к числам $n$, для которых суммы цифр $\Sigma[\cdot]$ степеней $n^k$ и $n^{k+1}$ для отдельных значений $k$ одинаковы и равны $n$ (A12436), $\Sigma[\mathbf{108}^{11}] = \Sigma[\mathbf{108}^{12}] = \mathbf{108}$.

Более того, это наибольшее число для 11 и 12 степеней (A046000).

Кроме того, сумма цифр числа $18^{18} = \left(2\cdot 3^2\right)^{2\cdot 3^2}$ = 3934640807529653757542 4 равна **108** (A066588).

**83)** Элемент $a_6$ = **108** аддитивно-мультипликативной последовательности (A095234):

$$a_1 = 1,\ \ a_n = if\left[a_{n-1}\ (\mathrm{mod}\ n) = 0,\ \ n\cdot a_{n-1},\ \ n + a_{n-1}\ \right].$$

**84)** Знаменатель несократимой дроби (A158623)

$$\frac{\left(2^3-1\right)\cdot\left(3^3-1\right)\cdot\left(4^3-1\right)\cdot\left(5^3-1\right)\cdot\left(6^3-1\right)\cdot\left(7^3-1\right)\cdot\left(8^3-1\right)}{\left(2^3+1\right)\cdot\left(3^3+1\right)\cdot\left(4^3+1\right)\cdot\left(5^3+1\right)\cdot\left(6^3+1\right)\cdot\left(7^3+1\right)\cdot\left(8^3+1\right)} = \frac{53421870312720}{79035095805120} = \frac{73}{108}.$$

**85)** Известная полиномиальная факторизация

$$n^{13}+1 = (n+1)\left(n^{12}-n^{11}+n^{10}-n^9+n^8-n^7+n^6-n^5+n^4-n^3+n^2-n+1\right)$$

ни при каких $n$ не является простым числом, но при некоторых значениях $n$ (A105237) может быть *полупростым* (*бипростым*) числом, представимым в виде произведения двух простых чисел.

В частности, **<u>108</u>**$^{13}$ + 1 = <u>109</u>·24950676386830244745076 21.

**86)** Образуется в результате 5-ходовой селекции–просеивания чисел (A001696):

1. Записываем неотрицательные целые числа {0, 1, **2**, 3, ...}
2. Остается каждое 2-е число после $a_2$ = 2: {0, 1, 2, **4**, 6, 8, 10, ...}
3. Остается каждое 4-е число после $a_3$ = 4: {0, 1, 2, 4, **12**, 20, 28, ...}
4. Остается каждое 12-е число после $a_4$ = 12: {0, 1, 2, 4, 12, **108**, 204, ...}
5. Остается каждое **108**-е число после $a_5$ = **108**: {0, 1, 2, 4, 12, **108**, 10476, ...} и т.д.

Рекуррентная формула: $a_n = a_{n-1}(1 + a_{n-1} - a_{n-2})$, $(a_0, a_1) = (0,\ 1)$.

**87)** **108** = 4 + 8 + 15 + 16 + 23 + 42 – пропавшие числа (The Lost Numbers) по TV-сериалу «Остаться в живых», который стал культурным феноменом[3].

Если числа 4, 8, 15, 16, 23, 42 перевести в двоичный код компьютера, а затем в азбуку Морзе, то получится "ТЕСТ ЯДА" (http://ru.lostpedia.wikia.com/wiki/108).

**88)** "Мультипликативная модель Фибоначчи" $a_n = a_{n-1}\cdot a_{n-2} = 2^{F_{n-3}}\cdot 3^{F_{n-2}}$, $(a_0, a_1) = (2,\ 3)$: (A000304) 2, 3, 6, 18, **108**, 1944, 209952...; $F_n$ – числа Фибоначчи.

**89)** **108** удивительным образом "вписывается" в такие тождества:

144000 – 144 = (**108** + **108**)·666;

144000 : (**108** + **108**) = 666 + 144;

$6^2 + 6^2 + 6^2$ = **108**,

где 144 000 – число спасенных людей после Апокалипсиса, 666 – число зверя.

**90)** Относится к числам, приводящим к простым четверкам ($30n + 11$, $30n + 13$, $30n + 17$, $30n + 19$), A014561: 0, 3, 6, 27, 49, 62, 69, **108**, 115, 188...

**91)** "Дважды степенная зависимость" [35] $a_n = a_{n-1}(1 + a_{n-1} - a_{n-2})$, $(a_0, a_1) = (0,\ 1)$ (A001696): 0, 1, 2, 4, 12, **108**, 10476, 108625644...

---

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/The_Lost_numbers#The_Numbers.

**92)** "Дважды степенная зависимость" [35], когда четные члены образуются путем перемножения двух предшествующих элементов, а нечетные – их сложением:

$$(f_0,\ f_1)=(0,1),\qquad f_n=\begin{cases} f_{n-1}f_{n-2}, & n(\mathrm{mod}\ 2)=0,\\ f_{n-1}+f_{n-2}, & n(\mathrm{mod}\ 2)=1.\end{cases}$$

Получается своеобразная аддитивно-мультипликативная разновидность модели Фибоначчи, формирующая ряд (A039941): 0, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 8, 12, 96, **108**, 10368, 10476...

**93)** Задача замощения поля размером 2×$n$ двумя типами фигурок [36]: квадратиками 1×1 и L-образными угольниками, состоящими из трёх квадратиков 1×1.

Общее количество квадратиков во всех вариантах замощения поля 2×$n$ образует последовательность (A127865): 2, 8, 30, **108**, 354, 1152... и в комбинаторной форме определяется по формуле:

$$T_n=\sum_{t=0}^{n/3}\sum_{d=0}^{(n-3t)/2} C_{n-d-2t}^{\ t}\,C_{n-d-3t}^{\ d}\,(2n-3d-6t)4^d2^t$$

или в явном виде:

$$T_n=(-1)^n(2n-12)+\frac{2}{3}\left[\left(9-5\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\left(9+5\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right]+\frac{n}{\sqrt{3}}\left[\left(\sqrt{3}-1\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^n+\left(\sqrt{3}+1\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n\right].$$

Напомним, что подобное разбиение данного поля домино 1×2 приводит к числам Фибоначчи. Эти типы разбиений представляют интерес в химии и статистической механике, где квадратики и домино выступают в качестве мономеров и димеров.

**94)** Весьма примечательна треугольная матрица (A109876), формирующая суммы циклических произведений

$$a_{n,n}=n!,\quad a_{k,n}=\sum_{i=0}^{n-1}\prod_{j=i+1}^{i+k} if\,(j\le n,\ j,\ j-n).$$

$$a=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28\\ 0 & 2 & 11 & 24 & 45 & 76 & 119\\ 0 & 0 & 6 & 50 & 120 & 252 & 476\\ 0 & 0 & 0 & 24 & 274 & 720 & 1680\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 120 & 1764 & 5040\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 720 & 13068\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5040 \end{pmatrix}$$

1 строка – треугольные числа

$$a_{1,n}=1+2+...+n=n(n+1)/2.$$

2 строка – произведение (1, 2, ..., $n$)(2, 3, ..., $n$, 1)

$$a_{2,n}=\left(n^3+2n\right)/3.$$

3 строка – сумма циклических произведений (по3)

$$a_{3,n}=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+(n-2)\cdot(n-1)\cdot n+(n-1)\cdot n\cdot1+n\cdot1\cdot2=$$
$$=n(n+1)\left(n^2-3n+6\right)/4.$$

3 строка – сумма циклических произведений (по 4)

$$a_{4,n}=1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+\ldots+n\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4=(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)/5+n\left(n^2-n+6\right).$$

В частности, $a_{1,4}$ = 1+2+3+4 = <u>10</u>, $a_{2,4}=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot1=\underline{24}$,

$a_{3,4}=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot1+4\cdot1\cdot2=\underline{50}$, $a_{4,4}=1\cdot2\cdot3\cdot4=\underline{24}$

Их сумма равна **108**.

**95)** Степень $2^{108}$ = 324518553658426726783156020576256 не содержит цифры 9, хотя сумма цифр равна 145 → 9.

**96)** **108** – решение «проблемы почтовой марки» [37] для 4 шт. 6 номиналов (A001211).

**97)** Наименьшее число, которое требует точно 10 повторений операции в виде разности между реверсом числа и его максимальной цифрой (A097156):

$$\mathbf{108} \to 793 \to 388 \to 875 \to 570 \to 68 \to 78 \to 79 \to 88 \to 80 \to 0.$$

**98)** Относится к таким числам $n$, что одновременно $n \cdot 3$ и $n/3$ – квадраты (A154671):

$$\mathbf{108} \cdot 3 = 324 = 18^2, \quad \mathbf{108}/3 = 36 = 6^2.$$

Кроме того, допускает конкатенацию $x//y$ такую, что $x^3 + y^3$ делится на $n$:

$$\mathbf{108} \to (10^3 + 8^3)/\mathbf{108} = 14.$$

**99)** Входит в рекуррентную последовательность (A026532): 1, 3, 6, 18, 36, **108**, 216, 648... с периодически изменяемым коэффициентом пропорциональности (2 – для четных и 3 – для нечетных номеров ряда):

$$a_n = \begin{cases} 2a_{n-1}, & n(\mathrm{mod}\ 2) = 0, \\ 3a_{n-1}, & n(\mathrm{mod}\ 2) = 1. \end{cases}$$

Числовой ряд эквивалентен следующим рекурсивным и аналитическим соотношениям:

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{5 + (-1)^n}{2} a_{n-1}; \qquad a_{n+2} = 6a_n; \qquad a_n = \frac{3 - (-1)^n}{4} 6^{\lceil n/2 \rceil},$$

а также суммированию последовательных произведений с термом (1, 2, 1, 2, 1, 2, ...), например:

$$(1,\ 1,\ 3,\ \ 6,\ 18,\ \ 36)$$
$$(1,\ 2,\ 1,\ \ 2,\ \ 1,\ \ 2)$$
$$1 + 2 + 3 + 12 + 18 + 72 = 108.$$

**100)** Некоторые числа вида $2^n$ содержат в своей записи надлежащую подстроку (набор цифр) $256 = 2^8$ (A046294).

Причем для $n = 100k + 8$, $k = 1, 2, \ldots$ такая подстрока находится в конце.

Число **108** – минимальное из таких представлений.

$2^{\mathbf{108}} = 324518553658426726783156020576\underline{256}$;

$2^{208} = 411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152\underline{256}$ ...

**101)** Хорошо известна бесконечная последовательность Колаковского [38]:

```
(a1  a2  i  j  m) ← (1  2  1  2  1)
while  j ≤ n
    m ← m + 1
    t ← (3 + (−1)^m) / 2
    (aj  i  j) ← (t  j  j + am)
    aj−1 ← t  if  j − i = 2
```

1. Состоит только из чисел 1 и 2.
2. Каждое число указывает на то, сколько новых чисел добавляется в последовательность: 1 или 2.
3. Не содержит более двух подряд идущих одинаковых чисел. Например, 2 2 2 означает, что где-то в последовательности указано на добавление трёх двоек. Но такой цифры 3 в последовательности нет
4. Каждый раз, "считывая" новое число, мы сталкиваемся с альтернативой написания 1 или 2.

Программка формирует ряд $a_n$ длиной $n$.

Примечательно, последовательность занимает в энциклопедии почетное второе место (A000002).

Множество чисел выстраивает серпантин попеременно 1 и 2. Но до сих пор (!) не удалось решить математическую проблему и показать, что их плотности равны 1/2.

Первые $2^4 = 16$ чисел повторяются впервые после **108** / 2 = 54 шагов (A022294).

Кроме того, **108** – наименьшее число, начиная с которого повторяется обратное (зеркальное) дополнение первых $2^4 = 16$ членов исходного ряда.

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Исходная выборка, $a_1 \ldots \rightarrow$ | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| Реверс выборки, ... $a_1$ $\leftarrow$ | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| Исходный ряд, $a_{\mathbf{108}} \ldots$ он же дополнение к реверсу | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |

Начальная выборка из 36 элементов содержит поровну единиц и двоек так, что их сумма равна 18·(1+2) = 54. При этом 36-й элемент равен двум. Так, что $a_{36} \sum_{k=1}^{36} a_k$ = **108**.

**102)** *Гипотеза Коллатца* (3*n*+1, сиракузская проблема) [39]. Берём любое натуральное число *n*. Если оно чётное, то делим его на 2, а если нечётное, то умножаем на 3 и прибавляем 1 (получаем 3*n* + 1). Над полученным числом выполняем те же самые действия и так далее.

Гипотеза Коллатца заключается в том, что какое бы начальное число мы ни взяли, рано или поздно мы получим единицу.

Это одна из нерешённых проблем математики.

Начиная с 1, начинают циклически повторяться числа 1, 4, 2.

Так, для числа 27 получаем последовательность, которая приходит к единице через 111 шагов, достигнув в пике значения 9232.

В частности, для чисел 124, 125, 126, 752, 756, 757, 760, 762 процедура Коллатца сходится за **108** шагов.

*Таблица* 2

**Числа *n* в порядке возрастания количества шагов *s* по процедуре Коллатца**

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *n* | 3 | 7 | 9 | 19 | 25 | 27 | 55 | 73 | 97 | 129 | 171 | 231 | 313 | 327 | 649 | 703 |
| *s* | 7 | 16 | 19 | 20 | 23 | 111 | 112 | 115 | 118 | 121 | 124 | 127 | 130 | 143 | 144 | 170 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | |
| *n* | 871 | 1161 | 2223 | 2463 | 2919 | 3711 | 6171 | 10971 | 13255 | 17647 | 23529 | 26623 | 34239 | 35655 | 52527 | 77031 |
| *s* | 178 | 181 | 182 | 208 | 216 | 237 | 261 | 267 | 275 | 278 | 281 | 307 | 310 | 323 | 339 | 350 |

Число 5, – пожалуй, единственное число, которое сходится за такое же количество (5) шагов: $5 \rightarrow 2^4 \rightarrow 2^3 \rightarrow 2^2 \rightarrow 2^1 \rightarrow 1$.

А вот число 12 = **108**/9 сходится за 9 шагов.

Траектория Коллатца числа **108** содержит предшествующее целое 107 (A070991).

**103)** Точный угол в градусах между часовой и минутной стрелкой (до секунды) ровно в 06:36 и 08:24. Для условно-одинаковой единичной длины стрелок 1 отрезок между их кончиками численно равен золотому сечению $\Phi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2 \approx 1{,}618$.

**104)** Количество *n*-узловых деревьев высотой *h* не более 5 определяется рядом (A001385):1, 1, 1, 2, 4, 9, 20, 47, **108**, 252, 582...

То есть имеется ровно **108** разновидностей 9-узловых деревьев ($h \le 5$).

**105)** Усеченное треугольное число (A051942) $a_n = n(n+19)/2 = C_n^2 - 9n$.

Если нумерацию начать с девяти, то $a'_n = n + a'_{n-1}$, $a'_9 = 0$. $a_8 = a'_{17}$ = **108**.

Среди многоугольных (*p*-угольных) чисел отличимое только как 37-гональное число.

Рекуррентные и явные формулы для $n$-го $p$-угольного числа имеют вид [40]:

$$a_n = \frac{(p-2)n^2-(p-4)n}{2} = n+(p-2)\frac{n(n-1)}{2},$$

$$a_n = \sum_{j=0}^{n}[(p-2)j+1]; \qquad a_0=0,\ \ a_n = a_{n-1} + (p-2)n - (p-3);$$

$$p = 37:\ \ a_3 = 3 + 35\cdot 3\cdot 2/2 = \mathbf{108}.$$

**106)** Количество меченных порядковых отношений на $n$ узлах, в которых самая длинная цепь имеет $n-1$ узлов (A055533): $a_n = \frac{n!(n-1)^2}{2}$, $a_3$ = **108**.

**107)** Представимо в виде суммы чисел, образованных его цифрами (A061487):

$$a_{18} = (18+81) + (1+8) = \mathbf{108}.$$

Кроме того,

$a_{27}$ = (27+72) + (2+7) = **108**; $a_{36}$ = (36+63) + (3+6) = **108**; $a_{45}$ = (45+54) + (4+5) = **108**.

**108)** Ядра с четным числом протонов и нейтронов являются более стабильными, чем с нечетными номерами. В частности, существуют "магические числа" (A018226): атомы с одним из этих чисел протонов и нейтронов в ядрах считаются особенно стабильными [41, 42]: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.

Их ядра обладают определенными свойствами, включая аномально низкую массу, высокую природную распространенность и высокую энергию начальных возбужденных состояний.

Примечательный факт: накопительная сумма первых пяти (!) чисел равна 2+8+20+28+50 = **108**.

**Заключение.**

Понятно, что ряд свойств любого числа – в той или иной мере плод манипуляций.

Ясно также, что отдельные специфические особенности, присущие числу, часто получаются механически и потому не несут особой смысловой нагрузки.

Вместе с тем практически любое число по-своему уникально и одновременно является элементом других числовых рядов с самобытными и неповторимыми характеристиками.

Всё это так...

**1.** Тем не менее, многие "шифровки", так или иначе, говорят нам, что когда-то с числом 108 связывались совершенно конкретные астрономические и астрологические смыслы.

Оно имеет древние корни в человеческой деятельности и ряде природных процессов.

Впоследствии они были совершенно позабыты и сегодня больше представляются некоторой символикой.

**2.** Число 3С напрямую связано с внутренним углом $108^{\circ}$ правильного пятиугольника.

В определенном смысле здесь устанавливается связь между непрерывной дугой и дискретной градусной мерой.

Это дает основание выдвинуть гипотезу, что человек вольно или невольно и разными путями вышел на золотое сечение несколько тысячелетий назад задолго до геометрического представления Евклидом.

Многочисленные и разнообразные свойства числа 108 косвенно это подтверждают, играя определенную роль в предыстории золотого сечения.

**Литература.**


1. *Golden angle* // Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_angle.
2. *Кара-Мурза С.Г.* Манипуляция сознанием: изд. юбил., доп. – М.: Эксмо: Алгоритм, 2010. – 862 с. – http://www.situation.ru/app/rs/books/manipul/manipul_content.htm.
3. *История философии* в кратком изложении: Пер. с чеш. – М.: Мысль, 1995. – 590 с.
4. *Наука в Сибири*. – Еженедельная газета СО РАН. – № 2 (2388), 2003
5. *Koenraad E.* Why 108? – http://koenraadelst.bharatvani.org/articles/misc/why108.html.
6. *Jnaneshvara B.* Meaning of 108 beads on a mala. – http://www.swamij.com/108.htm.
7. *The Significance* of the number 108. – http://www.hknet.org.nz/108meaning.html.
8. 108 (*число*) // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=29978199.
9. 108 (number) // Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/108_(number).
10. *Лукавая астрология* / Глава 32. – http://www.arfon.narod.ru/10/index10.htm.
11. *Очиров Ц.* Буддийские четки. – 2000. – http://ningma.org.ua.
12. *Powerful number* // Wikipedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Powerful_numbers.
13. *Achilles number* // Wikipedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Achilles_number.
14. *Самопорождённые числа* // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=5905609.
15. *Гарднер М.* Самопорожденные числа. – http://golovolomka.hobby.ru/books/gardner/bornnum.shtml.
16. *Числа харшад* // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=29260763.
17. *Pseudoforest* // Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Pseudoforest.
18. *Pisano period* // Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Pisano_period.
19. *Дружественные числа* // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=29875479.
20. *Friendly number* // Wikipedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Friendly_numbers.
21. *Weisstein E.W.* Friendly Pair // Wikipedia. – http://mathworld.wolfram.com/FriendlyPair.html.
22. *Nissen W.* Primitive Friendly Integers and Exclusive Multiples, 2004. – http://upforthecount.com/math/mandrill.html.
23. *Василенко С.Л.* Числовая гармония моноцифровой мозаики: репьюниты и репдигиты // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16152, 10.11.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161720.htm.
24. *Фигурные числа* // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=31322616.
25. *Weisstein E.W.* Integer Complexity // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/IntegerComplexity.html.
26. *Weisstein E.W.* Polyomino // From MathWorld. –A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Polyomino.html.
27. *Heptomino* // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Heptomino.
28. *Kurz S.* Number of *k*-polyominoes for small parameters. – http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/sascha/oeis/k-polyominoes.html.
29. *Василенко С.Л.* Золотые матрицы Фибоначчи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16310, 21.01.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161771.htm.
30. *Композиция* (теория чисел) // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=18430122.
31. *Angelini E.* A Recurring Digital Invariant variant. – http://www.cetteadressecomportecinquantesignes.com/RecurDigit.htm.
32. *Lundow P.H.* Enumeration of matchings in polygraphs, 1998. – http://91.121.118.218/simon/OEIS/archive_in_pdf/1factors2.pdf.
33. *Pfoertner H.* Visualization of diagonal intersections in an equilateral triangle. – http://www.randomwalk.de/sequences/a091908.pdf.

34. *Pfoertner H.* Minimal number of points in the square lattice covered by circular disks. – http://www.randomwalk.de/sequences/a123689.pdf.

35. *Aho A.V.*, *Sloane N.J.A.* Some Doubly Exponential Sequences // Fibonacci Quarterly. – Vol. 11 (1970). – pp. 429–437. – http://www2.research.att.com/~njas/doc/doubly.html.

36. *Chinn P.*, *Grimaldi R.*, *Heubach S.* Tiling with Ls and squares // J. of Integer Sequences. – 10 (2007), Article 07.2.8. – http://www.calstatela.edu/faculty/sheubac/papers/Ls-Squares-tilings.pdf.

37. *Weisstein E.W.* Postage Stamp Problem // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/PostageStampProblem.html.

38. *Kolakoski sequence* // Wikipedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Kolakoski_sequence.

39. *Гипотеза Коллатца* // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=30617014.

40. *Polygonal number* // Wikipedia. –http://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_number.

41. *Jovanovic R.* Magic Numbers and the Pascal Triangle. – http://milan.milanovic.org/math/english/atom/proton.html.

42. *Ladma V.* Magic Numbers. – http://vladimir_ladma.sweb.cz/english/atom/magicn.htm.

© ВаСиЛенко, 2011

Ф / 108