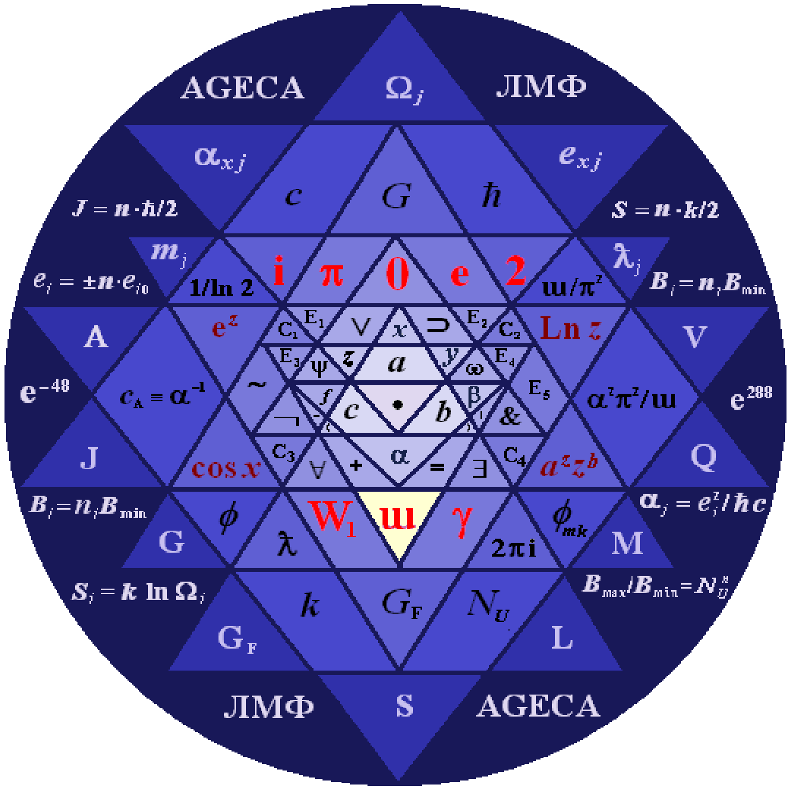
Грант Аракелян

Фундаментальные математические константы как начало всех чисел и новая ФМК



***Т**ысячелетиями в математике всё вращалось вокруг натуральных чисел. Они – необходимый элемент счета, используемый еще в доисторические времена, понятие натурального числа всегда казалось настолько привычным, простым, изначальным и незаменимым, что долгое время не возникало потребности в его определении посредством других понятий. Знаменательно и то особое место, которое натуральные числа занимали в науке и философии, мифологии и религии, магии и оккультизме, в обыденном сознании и т.д. Однако все попытки обоснования математики сведением ее к арифметике натурального ряда оказались безуспешными. В основе любой программы обоснования лежит идея ее унификации путем редукции к тому или иному минимальному базису исходных положений и простейших, далее неразложимых понятий, играющих роль “атомов”, первичных объектов. Детальный анализ оснований математики, отвергая идею первичности натурального ряда, приводит, в качестве решения проблемы “кирпичиков-первоатомов” числового континуума, к системе двух **исходных функций** и нескольких **фундаментальных математических констант**.*

Оглавление

1. Почему математика не может начаться с единицы
2. Формальные системы G и AG
3. Континуум, формальная система, конкретные числа
4. Функциональные уравнения
5. Взаимно обратные функции ψ и α
6. Решение уравнений E_0. Построение континуума. О других числовых системах
7. Экспонента и логарифм
8. Проточисла и функции
9. Уравнение суперпозиции
10. Суперпозиция для действительной и мнимой переменных
11. Замечания, итоги и перспективы

1. Почему математика не может начаться с единицы

1. **Н**атуральный ряд обычно начинают с единицы, но последняя, несмотря на свою кажущуюся элементарность при более глубоком рассмотрении оказывается в теории чисел и анализе отнюдь не простым, а наоборот, весьма сложным математическим объектом. Можно, конечно, начинать с 2 или 3 или даже, как это иногда делают, с 4, считая именно двойку (тройку, четверку) первым натуральным числом, однако наша математическая интуиция восстает против этого: ряд, начинающийся не с нуля и даже не с единицы, выглядит надуманно и не очень привлекательно. Хуже всего то, что единицу так или иначе ввести надо, как и нуль, который всегда почему-то очень плохо вписывается в идею изначальности натурального ряда.

2. **К**онцепция, основанная на идее первичности натуральных чисел по отношению ко всем остальным математическим объектам, вынуждена для построения всех чисел – действительных и комплексных – прибегать к искусственным приемам. В частности, отрицательные целые числа –1, –2, –3,… так же как нуль, не могут быть получены из натуральных чисел без дополнительных допущений. Наверное не случайно, что отрицательные числа лишь в XIII веке были завезены Леонардо Пизанским (Фибоначчи) в Европу с Востока, где они также появились позже дробных чисел и тоже далеко не сразу – вначале в Древнем Китае, с VII века в Индии. Нельзя упрощенно представлять себе дело так, что из понятия натурального числа логически вытекает понятие отрицательного натурального ряда –1, –2, –3, … Для введения последних необходим какой-то новый принцип, допустим, делающий возможным установление взаимно-однозначного соответствия между теми и другими. Здесь существенно, что новые объекты вроде отрицательных чисел и нуля не строятся из натуральных, а фактически определенным образом вводятся в дополнение к ним.

Между тем основная цель любой концепции, стремящейся к унификации математики путем выявления ее первоосновы, остается всё той же: из минимального базиса исходных математических объектов и правил оперирования ими построить все остальные объекты – здесь это множество всех чисел, – не выходя за пределы первоначально выбранного базиса. Конечно, в данном случае в исходный базис с самого начала могут быть включены и такие объекты как бесконечный ряд отрицательных чисел вместе с нулем, раз уж процесс их получения нарушает указанное условие. Расширенный подобным образом базис оказывается достаточным для того чтобы уже без помех построить множество всех действительных чисел. Но, во-первых, это уже *не* натуральный базис, во-вторых, он слишком громоздок, а главное, всё равно не способен решить некоторые очень важные вопросы.

3. **С**реди них проблема комплексных чисел. Мнимая единица обычно определяется равенствами

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1} \quad \text{или} \quad \mathrm{i}^2 = -1$$

а множество комплексных чисел как множество чисел типа $x + \mathrm{i}y$, где x и y произвольные действительные числа. Не говоря уж об искусственности подобного определения чрезвычайно важной для современной математики величины, которое в сущности является лишь свойством числа i, взятым за неимением лучшего в качестве его определения, есть и нечто другое. Совершенно непонятно, почему например мнимая единица в своей же степени равна $\mathrm{e}^{-\pi/2}$:

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} \equiv (\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$$

В рамках обсуждаемой концепции такое соотношение выглядит загадочным. Действительно, почему это корень квадратный из минус единицы в своей же степени, то есть очень простая комбинация минус единицы и двойки, каким-то непостижимым образом дает комбинацию чисел e, π, 2, кстати, в десятичной записи равную 0,20787 95763…? Это соотношение, получаемое в теории функций комплексного переменного, не поддается никакому рациональному осмыслению в пределах концепции первичности натуральных чисел. Даже самая сильная математическая интуиция натурального ряда не в состоянии ее предсказать или “переварить”.

Не менее загадочным выглядит простой пример извлечения корня степени n из единицы. Уравнение

$$x = \sqrt[n]{1}$$

в правой части которого нет ничего кроме натуральных чисел, имеет n корней

$$x_k = \mathrm{e}^{2k\pi \mathrm{i}/n} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

из которых лишь один (при $k = 0$) является действительным, а все остальные корни – комплексные.

4. **С**овременную математику невозможно представить без таких величин как константы e и π, между тем они не находят себе никакого разумного объяснения в рамках обсуждаемой концепции, хотя и могут выражаться через натуральные числа с помощью бесконечных рядов и произведений. Притом во многих случаях появление этих констант, в частности при решении различных задач, весьма неожиданно и едва ли предсказуемо, хотя и строго доказано.

Можно привести множество впечатляющих примеров, показывающих совершенно особую роль в математике таких величин как π и e. Непонятно, почему среди бесконечного множества трансцендентных, иррациональных чисел явно выделяется среди остальных небольшая группа фундаментальных констант, появляющихся во всех сферах математики включая такое исконное "владение" натурального ряда как теория простых чисел. Между тем в концепции, первооснову которой составляет натуральный ряд, числа типа π и e выступают как вторичные по отношению к натуральным числам конструкты, определенным образом из них построенные. Объяснение универсальной значимости и уникальности ФМК входит в прямые обязанности данной концепции, является ее внутренней задачей. Иначе она не методология, не философия и вообще никому не нужна, особенно если учесть те порой очень строгие ограничения, которые налагаются на применимость тех или иных математических понятий и средств во имя доказательства тезиса об исконности натурального ряда. Однако жесткая числовая демократия натурального ряда не в состоянии объяснить появление чисел-аристократов, притом чуждой природы, не подчиняющихся действующим канонам. Здесь не видно никакого подхода: числа π и e, мнимая единица i и другие, менее значительные константы это как бы пришельцы из другого математического мира, необъяснимые феномены в математической и философской доктрине изначальности натуральных чисел.

Подводя итог сказанному, прежде всего констатируем, что великая тысячелетняя идея, превратившись в какой-то момент в стойкий, нерушимый догмат, а впоследствии – в тормозящий развитие предрассудок, пыталась захватить всю сферу чистой математики, а также математического естествознания. Достичь конечной цели или хотя бы приблизиться к ней ни в том ни в другом случае не удалось. Ни потрясающая история, ни мистический ореол и огромная практическая польза, ни авторитет многочисленной и блистательной плеяды мыслителей разных эпох, являющихся предвестниками современной доктрины исключительности и изначальности натуральных чисел, ни какие-либо другие факторы не в состоянии компенсировать ее полное бессилие в решении проблем, касающихся оснований математики и математического естествознания. Бессилие, порожденное многими *не*. Математика, даже формальная,

не сводится к системам арифметики натуральных чисел,

натуральные числа включая 1 вопреки ожиданию при ближайшем рассмотрении оказываются ***не*** простыми математическими объектами,

с помощью натуральных чисел можно построить множество всех положительных действительных чисел, но с отрицательными целыми числами справиться как следует уже ***не*** удается, тем более ***не*** справляется интуиция натурального ряда с числами мнимыми, комплексными и математическими константами типа e и π,

сложные проблемы теории простых чисел посредством натуральных чисел или функций натурального переменного, как правило, ***не*** решаются,

важнейшие физические величины типа ψ-функции ***не*** есть функции действительного переменного, ***не*** являются таковыми и все специальные функции физической теории,

простейшие колебательные процессы выражаются посредством синуса и косинуса, а ***не*** через функции действительного переменного,

выделенные физические числа – безразмерные физические постоянные (исключая, естественно, такие величины как размерность пространства-времени или, допустим, общее количество истинно фундаментальных частиц) – натуральными числами или же комбинациями натуральных чисел ***не*** являются.

В принципе вполне можно ограничиться одним-единственным *не*:

системы арифметики натуральных чисел неполноценна в том смысле, что ***не*** содержит в себе все те первичные элементы, которые необходимы для построения остальных объектов математики.

2. Формальные системы G и AG

Отвечающая всем требованиям искомая формальная система хотя и не так популярна как системы арифметики натуральных чисел, но тоже известна и в первом приближении обозначается символом **G** **[**Клини 1973, 259–263**]**. Система **G** содержит следующие формальные символы:

$$\sim \ \supset \ \& \ \vee \ \neg \ \forall \ \exists \ = \ + \ - \ 0 \ a \ \ b \ \ c \ldots x \ \ y \ \ z \ \ \alpha \ \beta \ \gamma \ldots \chi \ \psi \ \omega \ (\ ) \ _{|}$$

Это семь логических (эквивалентность, импликация, конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, квантор всеобщности, квантор существования) и три математические операции (равенство, сложение, вычитание), расположенные в порядке убывающего слева направо ранга, индивидуальный объект 0 (нуль), 26 курсивных букв латинского и 24 строчные буквы греческого алфавита, левая и правая скобки, наконец символ $_{|}$, снабжая которым переменные a, b, c, ..., можно получить потенциально бесконечное множество новых переменных $a_{|}$ $a_{||}$ $a_{|||}$ $a_{||||}$... $b_{|}$ $b_{||}$ $b_{|||}$..., а строчные греческие буквы используются для обозначения только функций.

Система **G**, посредством которой осуществляется переход от логико-математического формализма, точнее исчисления предикатов, к формальной математике, содержит следующие шесть аксиом:

$\mathbf{M}_1$ $\quad a = b \supset (a = c \supset b = c)$

$\mathbf{M}_2$ $\quad a = b \supset a + c = b + c$

$\mathbf{M}_3$ $\quad a = b \supset c + a = c + b$

$\mathbf{M}_4$ $\quad (a + b) + c = a + (b + c)$

$\mathbf{M}_5$ $\quad a + 0 = a$

$\mathbf{M}_6$ $\quad a - a = 0$

Содержательный смысл аксиом достаточно ясен. Аксиомы $\mathbf{M}_1$–$\mathbf{M}_4$ фиксируют свойства равенства и сложения, $\mathbf{M}_5$ – уникальное свойство нуля, состоящее в том, что прибавление нуля к любому a не меняет a, $\mathbf{M}_6$ вводит операцию “–” и объект $-a$, противоположный a в смысле равенства их суммы нулю. Таким образом, (не приведенные здесь) постулаты исчисления предикатов вместе с шестью математическими аксиомами для операций равенства, сложения, вычитания объектов a, b, c и нуля образуют логико-математическую аксиоматику системы **G**. Но в чем, спрашивается, преимущество системы **G** перед другими формальными системами и что следует понимать под бесконечным множеством объектов a, b, c, ...? В отличие от систем, имеющих единственную интерпретацию на множестве натуральных чисел, формальная система **G** допускает большое количество интерпретаций как числовой, так и нечисловой, теоретико-групповой (отсюда, кстати, и само обозначение системы – от слова **G**roup) природы. К последним относятся, например, множества всевозможных вращений квадрата либо круга в плоскости; множества всевозможных вращений квадрата либо круга либо куба в трехмерном пространстве, переводящих их в себя; всевозможные вращения сферы. Что же касается числовых интерпретаций системы **G**, то множествами объектов a, b, c, ... могут быть:

а) все целые числа

б) все рациональные числа

в) все действительные числа

г) все комплексные числа

Если в аксиомах $\mathbf{M}_1$–$\mathbf{M}_6$ символы +, –, 0 заменить соответственно через символы $\cdot$, $^{-1}$, 1 или, что в принципе то же самое, толковать + как умножение, $-a$ как обозначение обратного a элемента, то есть деления единицы на a, 0 как единицу, то бесконечными множествами объектов системы **G** могут быть:

д) положительные рациональные числа

е) рациональные числа, *не равные нулю*

ж) положительные действительные числа

з) действительные числа, *отличные от нуля*

и) множество *не равных нулю* комплексных чисел

Содержательных интерпретаций, как видим, много, но главное здесь не их количество и многообразие, а то, что среди этого многообразия есть интерпретация (г) на множестве всех комплексных чисел, то есть на множестве всех чисел, если учесть, что действительные числа, частным случаем которых являются натуральные, есть частный случай комплексных чисел. Отметим, что система аксиом $\mathbf{M}_1$–$\mathbf{M}_6$ с операциями $\cdot$, $^{-1}$ и индивидуальным объектом 1 (в их обычных значениях) имеет интерпретацию (и) на множестве всех комплексных чисел, но только *без нуля*. А пытаться строить универсальную систему без нуля несерьезно, поскольку это совершенно уникальная и незаменимая математическая величина, фундаментальная математическая константа.

Поскольку мы добиваемся формальной системы, имеющей в виду всё без исключения множество чисел, то выбор однозначно падает на операции сложения, вычитания и константу 0, а не на умножение, деление и 1. Кроме того, есть прямой резон включить в список аксиом системы коммутативный закон для сложения, что облегчит предстоящие построения и избавит от лишних хлопот. Спектр возможных приложений системы пострадает от этого не слишком сильно: останутся коммутативные (абелевы) группы и все перечисленные числовые множества включая континуум. Таким образом, обозначаемая обычно через **AG** окончательная система математических аксиом включает в себя и аксиому

$$\mathbf{M}_7 \quad a + b = b + a$$

в чем состоит единственное ее формальное отличие от системы **G**. Можно теперь уже говорить об универсальной логико-математической системе, аксиоматически определяющей математическое число вообще, континуум всех чисел без каких-либо упущений и лакун. Важно также, что наряду со множеством исходных объектов система **AG** задает полный набор первичных логических и математических операций, через которые по идее могут быть выражены все остальные. На этом пути нас ждут интересные результаты, в частности при попытке получения провалившихся только что в конкурсе на роль исходных элементов системы операций умножения, деления и единицы.

Нетрудно заметить, что в списке базисных компонентов нет ни одного математического объекта (числа) за исключением нуля; посредством семи аксиом **M** полностью, хотя и неявно, определено понятие математического числа, но *конкретные числа как таковые пока отсутствуют. Не определены еще единица и вторичные операции умножения и деления*. Это важнейшая задача, которая в рамках системы **AG** должна быть решена как прямое, логически и онтологически необходимое продолжение первых двух этапов. Необходимо прежде всего осуществить переход от аксиоматически задаваемых основных свойств числа к конкретным числам. *Какие именно числа должны следовать за нулем в формальной иерархии математических величин, являющейся естественным продолжением и необходимым следствием принятой системы универсальной математики? Каковы правила – законы, устанавливающие соответствие между составленными из переменных и постоянных величин множествами, иначе говоря, каковы исходные, материнские функции, посредством которых строятся остальные функции?*

3. Континуум, формальная система, конкретные числа

Пытаясь ответить на поставленные вопросы начнем с бесспорного факта существования исторически сформировавшейся концепции бесконечного континуума чисел, как и его составных частей, с фиксированными правилами оперирования, определенными принципами упорядочивания, характерными особенностями отдельных подмножеств или даже отдельных чисел и т.д. Словом, начнем с факта независимого существования содержательной, притом довольно развитой теории, которую будем называть *теорией чисел*, понимая под этим всю числовую математику за исключением теории трансфинитных чисел. В свете этого необходимо уточнить, что когда после задания аксиоматического каркаса системы **AG** говорят, что она формализует континуум, или имеет интерпретацию на множестве всех чисел, это следует понимать примерно так, что при определенном толковании графических знаков, составляющих алфавит системы **AG**, система аксиом $\mathbf{M}_1$–$\mathbf{M}_7$ вместе с логическими правилами образования, преобразования, подстановки, замены и т.п. является достаточно адекватным формальным отображением своего независимо существующего содержательного прототипа. Точнее, исходная система аксиом системы **AG** при соответствующем моделировании трансформируется в систему соотношений, выражающих основные свойства “живых” чисел и тем самым удостоверяется пригодность взятой аксиоматики для формального представления данной содержательной теории. И не более того. При интерпретации или моделировании результаты, так или иначе получаемые в теории чисел, не становятся собственностью формальной системы; она должна прийти к этим результатам самостоятельно, используя лишь арсенал своих формальных средств.

Если не принимать в расчет те обычно небольшие неувязки, которые видимо нельзя полностью устранить при идентификации живой теории с жестко регламентированной формальной схемой, и если отвлечься от специфических математических проблем, лишний раз свидетельствующих о принципиальной недостижимости абсолютно точного соответствия между содержательным оригиналом и его формальным двойником, то может показаться, что других серьезных проблем здесь нет. Действительно, если устанавливается, что какие-то результаты, получаемые в теории чисел, одновременно являются выводимыми формулами формальной теории, что́ мешает говорить о соответствии между двумя теориями хотя бы в этих пределах и с указанными оговорками, коль скоро конкретный вывод любой формулы – вопрос всё же *технологии*, а не *принципа*? На деле все обстоит сложнее, чем кажется на первый взгляд, поскольку при решении некоторых фундаментальных задач развертывания формальной системы важен не только ответ, но и способ его получения. Это весьма тонкий и в высшей степени ответственный, требующий особого внимания вопрос, суть которого состоит в следующем. Теория чисел наряду с общим понятием математического числа, наряду с понятием бесконечного множества, континуума чисел имеет дело и с вполне конкретными, вообще говоря, комплексными числами. В формальной же системе **AG** на нынешнем этапе ее развертывания постулировано потенциально бесконечное множество объектов $a_{|}$, $a_{||}$, …, $b_{|}$, $b_{||}$, …, $z_{|}$, $z_{||}$, $z_{|||}$, … с определенными свойствами, истолковываемых как числа, но нет еще, как отмечалось ранее, ни одного конкретного числа как такового за исключением аксиоматически заданного нуля. Добавим, что нет пока и ни одной конкретной функции. Можно сказать, что имеется в наличии математическая субстанция, но нет еще ее субстрата, дана идея относящихся к субстанции законов, но ни один из них еще не оглашен и не представлен. Необходимо, следовательно, от понятия числа, числового множества, задаваемого совокупностью свойств, и от понятия числовой функции перейти к конкретным, реальным числам и функциям; весь вопрос в том, как это сделать.

Обратимся вначале к знакомым примерам и посмотрим, как вводятся натуральные числа. Обычно здесь применяется древнейший *метод зарубок*, известный еще доисторическому человеку. Способ чрезвычайно прост и эффективен в простейших ситуациях: зарубка – один (день, палец, шкура убитого зверя, вообще всё, что поддается счету), еще зарубка – два, еще одна – три и т.д. В современном научном варианте зарубки делаются не ножом или топором на дереве или допустим камне, а более цивилизованно ставятся ручкой, карандашом и т.п. на бумаге в виде точек или палочек – именно так строится натуральный ряд в интуиционистской математике, где знаки 1, 2, 3,… являются сокращенными обозначениями соответствующих последовательностей точек или палочек. В известной аксиоматике Пеано и в выросших из нее формальных системах арифметики натуральных чисел ряд натуральных чисел вводится следующим образом: задается начальное число (обычно нуль) и принцип генерирования новых чисел, то есть означающий прибавление единицы оператор $'$, последовательным применением которого порождается шаг за шагом бесконечный ряд вполне определенных чисел 0, $(0)'$, $((0)')'$, $(((0)')')'$, …, коротко обозначаемых знакомыми символами 0, 1, 2, 3, … Наконец, в аксиоматике классической теории множеств, где множество натуральных чисел является лишь начальным членом в возрастающей по *мощности* последовательности трансфинитных чисел, конкретные числа просто постулируются как актуальная данность так называемой аксиомой бесконечности, гласящей: “существует по крайней мере одно бесконечное множество – множество $\{1, 2, 3, \ldots\}$ натуральных чисел”. В других вариантах ряд начинается не с 1, а с 0, но здесь важно другое.

Во всех указанных случаях введение конкретных чисел как физических объектов (зарубки, палочки, точки), как последовательности объектов, порождаемых из начального члена действием числового генератора или как актуально бесконечной данности, обусловлено наличием трех необходимых и достаточных условий. *Во-первых*, существованием наименьшего числа (нуль, в других вариантах один, реже два, три и даже четыре); *во-вторых*, дискретностью числового – натурального множества; *в-третьих*, возможностью, по крайней мере принципиальной, однозначного нахождения и представления любого его элемента как при конструировании строго упорядоченного ряда, так и при его задании в виде готового множества. Нетрудно заметить, что для четных и нечетных чисел, факториалов и т.п. реализуются все три условия, для простых чисел не выполняется третье, для положительных действительных чисел – второе и третье, а для множества всех чисел не выполняется ни одно из трех условий. В общем, не все, что верно в частности, верно и для целого, и ясно, что решение поставленной задачи в случае континуума требует более тонкого подхода и универсальных методов.

4. Функциональные уравнения

Как же тогда, не прибегая к искусственным приемам, решить эту задачу, как, оставаясь в рамках исходного формального базиса системы **AG**, ввести в нее конкретные числа? При такой постановке вопроса, если провести аналогию между множеством всех и множеством натуральных чисел и принять во внимание сказанное относительно способов введения натурального ряда, не видно никаких подходов и задача кажется неразрешимой. Поставим поэтому проблему несколько иначе и спросим, чего в первую очередь недостает пока системе **AG**, каково магистральное направление ее развертывания как формальной теории чисел, какие глубинные внутренние потенции системы еще не востребованы и не раскрыты? В неявной форме ответ частично содержится в предыдущем разделе, когда обсуждались различные интерпретации системы **AG**. Там наряду с интерпретацией на множестве всех чисел, с пониманием трех символов формального языка как сложения, вычитания и нуля была и интерпретация системы **AG** также на множестве всех чисел (только без нуля) и при толковании тех же символов как умножения, обратного элемента (деления единицы на a) и единицы. Приняв тогда единственно возможное решение, мы вместе с тем как бы приняли на себя обязательство непременно выразить отодвинутые “по конкурсу” на второй план операции $\cdot$, $^{-1}$ и число 1 через исходные операции $+$, $-$ и число 0. Впрочем, и так ясно, что без умножения, деления и свойств единицы говорить о теории чисел и вообще о математике не приходится, и так или иначе они должны быть как-то определены. Отметим, что задача корректного введения арифметических действий стоит и перед любой достаточно богатой системой формальной арифметики. В случае формальной системы универсальной числовой математики задача введения недостающих пока арифметических действий, а также ничуть не менее важная задача *получения первичных чисел и исходных функций* фактически сводятся, как сейчас увидим, к решению соответствующим образом составленной системы функциональных уравнений.

Предварительно условимся о терминологии. Любое математическое равенство назовем, как иногда делается, *законом сохранения*, желая тем самым подчеркнуть, что в равенстве двух частей математической формулы (предложения) содержится глубокая идея постоянства математического закона, неизменяемости аналитических связей и в некоторых случаях идея сохранения каких-то величин. Равенство, содержащее только постоянные величины, назовем *соотношением*, равенство с переменными – *уравнением*, а равенство, где в качестве искомой величины выступает функция, – *функциональным уравнением*. Введение новых математических реалий редукцией их посредством функциональных уравнений к исходным элементам это могучее средство, общий метод развертывания формальной системы, дополняющий функциональными свойствами задаваемые аксиомами свойства числа. В сущности, это неявное определение новых элементов, раскрывающее изначально заложенный в системе потенциал. Функциональные уравнения это простейший и самый верный путь к редукции операций умножения и деления к сложению и вычитанию; здесь достаточно ограничиться умножением и сложением, поскольку остальное уже тривиально.

Итак, обозначив новую операцию умножения точкой $\cdot$, которую во многих случаях можно опустить, мы хотим с помощью *простейших функциональных уравнений* определить, или в некотором смысле свести, умножение к сложению, и сейчас требуется составить соответствующие уравнения. Для двух числовых выражений $x+y$ и $x\cdot y$, а следовательно четырех функциональных выражений

$$f(x+y),\ \ f(x\cdot y),\ \ f(x)+f(y),\ \ f(x)\cdot f(y)$$

возможны в общей сложности шесть уравнений. Поскольку уравнения

$$f(x+y)=f(x\cdot y),\ \ f(x)+f(y)=f(x)\cdot f(y)$$

просто означают отождествление умножения со сложением, а в уравнениях

$$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y),\ \ f(x+y)=f(x)+f(y)$$

нет сведения одной операции к другой, остается всего два функциональных уравнения – так называемые уравнения Коши. Обозначив искомые функции через $\psi(x)$ и $\alpha(x)$, имеем:

$$\mathbf{E}_1\quad \psi(x+y)=\psi(x)\cdot\psi(y)$$

$$\mathbf{E}_2\quad \alpha(x)+\alpha(y)=\alpha(x\cdot y),\ \ (x\neq 0, y\neq 0)$$

Функциональные уравнения $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ нетрудно обобщить на случай многих переменных:

$$\mathbf{E}_{10}\quad \psi(x_1+x_2+\ldots+x_k)\quad =\psi(x_1)\cdot\psi(x_2)\,\ldots\,\psi(x_k)$$

$\mathbf{E}_{20}\ \ \alpha(x_1)+...+\alpha(x_k) \quad = \alpha(x_1 \cdot x_2 \ldots x_k)$

Введем теперь функциональный аналог изначальной математической константы нуль – константу λ, то есть основным свойствам нуля $a \pm 0 = a$ (как обычно, символом $\pm$ два отдельных выражения объединяются в одно; в выражениях общего типа $x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_k$ один раз берутся верхние знаки, другой раз нижние), зафиксированным в аксиомах $\mathbf{M}_5 - \mathbf{M}_6$, придадим функциональный характер. Для этого есть только один путь. В единственной под знаком функции сумме одну из переменных заменим, по аналогии с ± 0, выражениями $\pm\lambda$ для некоей константы λ, так что

$\mathbf{E}_{3-4}\ \psi(x \pm \lambda) = \psi(x)$

что равносильно двум уравнениям:

$\mathbf{E}_3\ \ \psi(x+\lambda) = \psi(x)$

$\mathbf{E}_4\ \ \psi(x-\lambda) = \psi(x)$

В более общем случае, учитывающем возможность многократного применения *функционального правила нуля* (периодичности), эти уравнения выглядят так:

$\mathbf{E}_{30}\ \ \psi(x+\lambda+...+\lambda) \quad = \psi(x)$

$\mathbf{E}_{40}\ \ \psi(x-\lambda-...-\lambda) \quad = \psi(x)$

Договоримся при понимании $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_4$, или $\mathbf{E}_{10} - \mathbf{E}_{40}$ как единых, целостных систем уравнений применять обобщенные символы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}_0$, а полученную к настоящему моменту логико-математическую систему обозначать далее символом **AGE**.

Отметим для справки, что формальная система **AGE**, подробно представленная в капитальной, монографии “Фундаментальная теория ЛМФ”, это лишь первые три части пятичленного формализма базисной, фундаментальной теории физического мира ЛМФ, которая основана на идее единства математической логики (Л), числовой математики (М) и фундаментальной физики (Ф). Ее корневая структура начинается с логических атомов и завершается обобщенными физическими законами сохранения, изменения и квантования. Теория изложена в указанной монографии, ее сжатый примерно в четыре раза вариант – в книге “От логических атомов к физическим законам”, а в конце 2010-го года вышла в свет книга “LMP Fundamental Theory” – с учетом новейших экспериментальных данных мюонной физики, соответствующих числовым предсказаниям теории ЛМФ и тем самым подтверждающих ее истинность.

5. Взаимно обратные функции ψ и α

Система функциональных уравнений $\mathbf{E}$ или ее обобщенный вариант $\mathbf{E}_0$, призванные свести умножение к сложению и заодно распространить фундаментальный для математики закон сохранения любого числа относительно сложения и вычитания нуля на функциональный случай, дает в действительности нечто гораздо большее. Об этом легче будет судить после ознакомления с некоторыми особенностями и выводами, получаемыми из функциональных уравнений. Знакомство начнем с выявления родственных связей между функциями ψ и α (нет надобности всякий раз писать $\psi(x)$, $\alpha(x)$, часто удобнее обозначать функции просто символами ψ и α). Если некая функциональная зависимость f задана уравнением $y = f(x)$, то для получения обратной функциональной зависимости φ необходимо, поменяв местами x и y, перейти к уравнению $x = \varphi(y)$, определяющему x как зависимую переменную – функцию от независимой переменной – аргумента y. Сделать это удается, правда, не всегда; если из уравнения $y = f(x)$ следует уравнение $x = \varphi(y)$, говорят, что функция $f(x)$ имеет обратную функцию $\varphi(y)$, и наоборот – если уравнение $x = \varphi(y)$ приводит к $y = f(x)$, то $f(x)$ есть функция, обратная $\varphi(y)$. Это обычное (наравне с теоретико-множественным определением, которое здесь нет нужды приводить) определение понятия взаимно обратных функций. Нетрудно убедиться, см. **[**Аракелян 2007**]**, что функции ψ и α таковыми и являются:

Таким образом, ψ и α являются взаимно обратными функциями, причем, как выясняется, ψ однозначная, а α многозначная (бесконечнозначная) функция. Ничуть не отрицая правомерность определения понятия обратной функции отношением *функция – аргумент*, дадим понимание этого вопроса, вытекающее из особенностей системы **AGE** и продиктованное следующими конкретными соображениями. Во-первых, мы вообще полагаем, что других помимо ψ и α исходных аналитических числовых функций нет, иначе говоря, все математические функции подобного типа включая все специальные функции математической физики посредством исходных и вторичных математических операций всегда могут быть представлены через *материнские* функции ψ и α. Если же это так, то определение обратной функции, как и некоторых других математических понятий для ψ и α, должно иметь основополагающее значение для понимания этих понятий в математике вообще. Во-вторых, внимательно вчитаемся в словесную формулировку функциональных уравнений:

$\mathbf{E}_1$ Функция ψ от суммы аргументов равна произведению ψ-функций от каждого из аргументов в отдельности

$\mathbf{E}_2$ Функция α от произведения аргументов равна сумме α-функций от каждого из аргументов в отдельности

В предельно сжатом виде это выглядит так:

$\mathbf{E}_1$ Функция от суммы равна произведению функций

$\mathbf{E}_2$ Функция от произведения равна сумме функций

Вполне очевидно, что в каждом из двух уравнений по отношению к операциям сложения и умножения производится действие, обратное действию, производимому в другом уравнении. Следовательно, в отношении *сложение – умножение* функция α является обратной функцией для ψ, а ψ – обратной функцией для α.

Далее, есть еще один заслуживающий внимания способ выявления обратной функции. Если вспомнить о возможности операторного представления функций и ввести операторные обозначения $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ для прямой и обратной функций, то даже без строгого доказательства, чисто интуитивно ясно, что двукратное применение операторов в любой последовательности $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ либо $\hat{\mathbf{A}}^{-1}\hat{\mathbf{A}}$ не должно в итоге приводить к каким-либо изменениям переменных величин и может лишь сопровождаться появлением постоянных. Это и понятно: преобразование и обратное преобразование в совокупности должны привести математическое выражение к его первоначальному виду, который вместе с тем в силу возможной многозначности одной из функций уже не обязательно единствен. Выражаясь не очень строго, это восстановление исходного графического рисунка с точностью до подчиненной некоему правилу произвольной постоянной.

Правило сокращения (с указанными оговорками) функциональных знаков является достаточно общим и как бы обращенным к самой семантике слова *обратный*, поэтому посмотрим, как оно работает в случае материнских функций ψ и α. Для этого в уравнение $\mathbf{E}_1$ вместо переменных x и y подставим $\alpha(x)$ и $\alpha(y)$, а в $\mathbf{E}_2$ переменные заменим функциями $\psi(x)$, $\psi(y)$. После очевидных преобразований получим

$$\psi(\alpha(x\cdot y)) = \psi(\alpha(x))\cdot\psi(\alpha(y))$$

$$\alpha(\psi(x+y)) = \alpha(\psi(x)) + \alpha(\psi(y))$$

так что первое уравнение для $\psi\alpha$ содержит лишь операцию умножения, а уравнение для $\alpha\psi$ лишь операцию сложения. Если теперь просто опустить функциональные знаки, то придем к равенствам

$$x\cdot y = x\cdot y \ \text{ и } \ x+y = x+y$$

из которых, как легко догадаться, принимая во внимание однозначность функции ψ и многозначность α, первое есть тождество, а второе должно содержать постоянную, кратную периоду λ. Для полного же согласования правила сокращения функциональных знаков $\alpha\psi$ с идеей единственности произведения чисел достаточно ограничиться главным значением функции α ($n\lambda = 0$) и тогда двойное равенство

$$\psi(\alpha(x)) = \alpha(\psi(x)) = x$$

справедливо для любого числа $x \neq 0$.

Можно констатировать следующее. Материнские функции ψ и α удовлетворяют основанному на замене местами аргумента и функции теоретико-множественному определению понятия обратной функции, как и правилу сокращения операторов или функциональных знаков. Вместе с тем мы пришли к альтернативному, лучше сказать дополнительному, определению прямой и обратной функции по отношению к важнейшим операциям сложения и умножения. Это принципиально новое определение весьма важных понятий относится только к материнским функциям и лишний раз свидетельствует об их статусе.

6. Решение уравнений E_0. Построение континуума. О других числовых системах

Подробный и всесторонний анализ **[**Аракелян 1973, 259–263**]** уравнений $\mathbf{E}_{10}$–$\mathbf{E}_{40}$ в рамках системы **AG** однозначно приводит к материнским (комплексным) функциям экспоненты $\psi(x) \equiv e^x$ и логарифма $\alpha(x) \equiv \mathrm{Ln}\, x$, к системе ФМК e, π, i, 2, связанных известными формулами Эйлера

$$e^{\pi i/2} = i, \quad e^{2\pi i} = i^2 \equiv -1, \quad e^{3\pi i/2} = -i, \quad e^{\pm 2\pi i} = i^2 \cdot i^2 \equiv 1$$

с периодом $\lambda = 2\pi i$.

Посредством ФМК e, π, i, 2 нетрудно построить континуум как бесконечный упорядоченный универсум, как множество конкретных чисел, придать аморфной математической субстанции, объединяемой совокупностью общих свойств, статус составленного из индивидуально конструируемых элементов математического субстрата. Построить число значит выразить его через известные величины или по крайней мере указать способ, алгоритм сведения к ним. А таковых у нас уже достаточно, и по формулам

$$e^0 = i^2 \cdot i^2 = 1, \quad e^{\pi i/2} = i, \quad e^{\pi i} = i^2 = -1, \ \ldots$$

они образуют единую, самосогласованную и самодостаточную систему *проточисел* – исходных математических атомов для построения остальных чисел. Следует особо подчеркнуть, что мы имеем не одну, как в концепции первичности натурального ряда, а сразу все четыре математические “единицы”. В геометрической интерпретации они представляются в виде показанных на рисунке точек на осях прямоугольной системы координат, в которой любое число толкуется как точка на плоскости (комплексной). Используя геометрические образы, можно сказать, что всё, на что способна интуиционистская математика в одном, положительном направлении оси *OX*, здесь делается одновременно (не в физическом, разумеется, смысле, а в смысле равноправия, отсутствия логической очередности) и единообразно во всех четырех возможных направлениях; при этом не возникает проблем с введением, например, отрицательных чисел, с мнимой единицей, с математическими константами и т.д. Само построение множества всех чисел, осуществленное в **[**Аракелян 1981, 123–129**]**, покажем схематично, не вникая в детали.

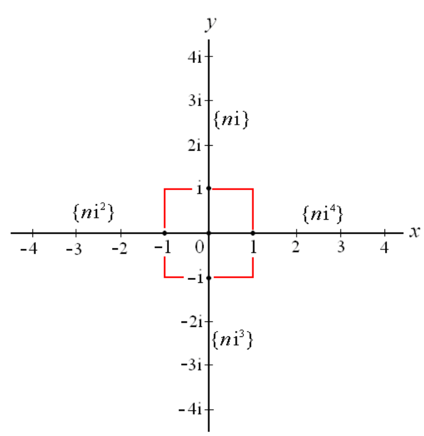


Рис. 1
Геометрическая интерпретация математических
единиц и образованных их них множесть типа $\{n\,i^k\}$

Вначале из исходных элементов 0, i, –1, –i, 1, последовательно применяя схему сложения

$$0, \quad 0 + a \equiv a, \quad a + a \equiv 2a, \quad 2a + a \equiv 3a, \quad 3a + a \equiv 4a, \ \ldots$$

с вполне очевидными сокращенными обозначениями, получим четыре потенциально бесконечных множества типа

$$\{n\,i^k\} \quad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{6.1}$$

“целочисленных” (по отношению к четырем единицам) чисел с соответствующими условными названиями:

$\{n\mathrm{i}\}$	$0,\quad \mathrm{i},\quad 2\mathrm{i}, \ldots,\quad k\mathrm{i},\ldots$	мнимо-положительные целые числа
$\{n\mathrm{i}^2\}$	$0,\quad -1,\quad -2, \ldots,\quad -k\mathrm{i},\ldots$	целые отрицательные числа
$\{n\mathrm{i}^3\}$	$0,\quad -\mathrm{i},\quad -2\mathrm{i}, \ldots,\quad -k\mathrm{i},\ldots$	мнимо-отрицательные целые числа
$\{n\mathrm{i}^4\}$	$0,\quad 1,\quad 2, \ldots,\quad k,\ldots$	целые положительные числа

Два следующих построения для каждого из множеств также вполне очевидны и в принципе ничем не отличаются от обычного построения множества всех положительных действительных чисел, являющегося разновидностью одного из четырех конструируемых здесь множеств. Построения эти сводятся к получению положительных рациональных чисел как отношений между целыми положительными и трех их аналогов – отрицательных, мнимо-положительных и мнимо-отрицательных; затем к получению четырех множеств положительных, отрицательных, мнимо-положительных и мнимо-отрицательных иррациональных чисел, образуемых, например, путем составления бесконечных непериодических, в частности двоичных, дробей. В геометрической интерпретации им ставится в соответствие бесконечное множество точек на осях абсцисс и ординат указанной прямоугольной системы координат и остается лишь построить точки комплексной плоскости, проекциями которых считаются точки на осях. Это осуществляется двучленным выражением типа $\pm x \pm \mathrm{i}y$, где x и $\mathrm{i}y$ в геометрической интерпретации – точки правого верхнего квадранта декартовой системы координат комплексной плоскости. Если устранить это весьма искусственное ограничение и, не умаляя общности, считать x и y отличными от $\pm\mathrm{i}$, все двучлены можно привести к единой знакомой всем форме $z = x + \mathrm{i}y$. Разумеется, к геометрическим образам мы прибегли лишь для наглядности, по идее вполне можно обойтись без понятий точки, плоскости, системы координат и т. п. Кроме того, количество шагов, приводящих к комплексным числам, можно сократить, минуя, например, построения “рациональных” чисел или, допустим, генерирование чисел из объектов 0, i, –1, –i, 1 рассматривать как единое, не расчленяемое, не распадающееся на отдельные процедуры действие. Можно даже при желании построить множество всех чисел из исходных *единиц* “одним махом”, унифицировано и минуя все промежуточные звенья. Всё это в конце концов вопросы технического свойства, которые в данной ситуации не столь существенны. Цель обсуждения схемы построения в другом: показать, что система **AGE** действительно обладает потенциалом, воплощаемым в инструментарий, необходимый и достаточный для получения континуума как множества математических конструктов, строящихся по определенным правилам из исходных.

Добавим, что хотя содержательные толкования множества комплексных чисел могут быть разными – точки на плоскости, векторы двухмерного пространства, матрицы второго порядка и др., – проточисла как генератор четырех единиц и множество чисел, конструируемых из последних, обладают исключительно важным свойством единственности. Об этом в какой-то мере свидетельствует безальтернативность всех наших построений, основанных на идее полного исчерпания всех возможных простейших вариантов, а строгое доказательство единственности имеется в содержательной теории. Не углубляясь в детали, скажем только, что применительно к системе **AGE** единственность следует понимать, во-первых, как отсутствие каких-либо других помимо системы величин e, π, i, 2 числовых решений исходных функциональных уравнений и отсутствие каких-либо других помимо множества элементов типа $x + \mathrm{i}y$ завершенных числовых множеств, соответствующих постулатам системы и конструируемых из атомов 0, $\pm\mathrm{i}$, ± 1. Во-вторых, любая попытка обобщения, расширения, дополнения и т. п. множества комплексных чисел (гиперкомплексные числа, в частности кватернионы, числа Кэли, Клиффорда – Липшица, а также p-адические числа, ...) возможна лишь ценой отказа от тех или иных исходных положений системы **AGE**. Например, частный случай гиперкомплексных чисел – кватернионы, или числа типа

$$x_0 + \mathrm{i}x_1 + \mathrm{j}x_2 + \mathrm{k}x_3$$

отличаются формально от комплексных чисел тем, что у них три вместо одной комплексные единицы, связанные между собой формулами, тиражирующими

$$\psi(\pi\mathrm{i}) = \mathrm{i}^2 = -1$$

и соотношениями для их циклической перестановки:

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$$

$$\mathrm{ij} = \mathrm{k},\quad \mathrm{ji} = -\mathrm{k},\quad \mathrm{jk} = \mathrm{i},\quad \mathrm{kj} = -\mathrm{i},\quad \mathrm{ik} = -\mathrm{j},\quad \mathrm{ki} = \mathrm{j}$$

Легко увидеть, что закон коммутативности умножения для кватернионов не выполняется. Следовательно, переход от размерности 2 к размерности 4, которому геометрически соответствует переход от двумерной плоскости к четырехмерному пространству, не означает (в отличие, допустим, от заполнения множества всех рациональных чисел числами иррациональными) заполнения, расширения и т.п. множества комплексных чисел родственными им по общим признакам объектами нового рода, поскольку это сопровождается разрушением основ самой системы постулатов. Для других размерностей, число которых, конечно, не ограничено, отличия оказываются еще более глубокими. Так, для размерностей 3, 5 и выше нельзя построить даже систему, аналогичную кватернионам, а гиперкомплексные системы с делением (каждое из уравнений

$$ax = b \quad \text{и} \quad xa = b, \ \text{где } a \neq 0$$

имеет единственное решение) могут иметь только размерности 4 и 8 [Кантор, Солодовников, 36]. Словом, если под числами понимать объекты, обладающие вполне определенной совокупностью обычных свойств включая коммутативность умножения и операцию деления, то универсум отвечающих этим требованиям объектов целиком формируется и заполняется комплексными числами x + iy. В этом смысле можно утверждать, что других чисел нет, а все остальные "числа" – объекты другого рода, то есть с существенно другим набором основных свойств. Иногда это положение, известное благодаря исследованиям Вейерштрасса, Фробениуса, Пирса и других, облекается в сходную форму: невозможно какое-либо расширение понятия комплексного числа за пределами системы комплексных чисел без отказа от каких-то фундаментальных свойств числа. К тому же теория гиперкомплексных чисел не порождает новых математических констант, поскольку соотношения

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \ldots = -1$$

лишь мультиплицируют, тиражируют мнимую единицу, а не вводят какие-то новые математические величины.

7. Экспонента и логарифм

Тот факт, что посредством функций ψ и α оказывается возможным не только сведение операций умножения и деления к аксиоматически заданным операциям сложения и вычитания, но и однозначное получение четырех фундаментальных математических констант, неявно определяемых системой уравнений **E** и $\mathbf{E}_0$, говорит о совершенно исключительной роли этих функций в математике. Другого унифицированного способа введения в математическую теорию констант e, π, i, 2 как замкнутой, согласованной системы фундаментальных величин не существует.

Можно, конечно, определить экспоненту e^z, а тем самым логарифм $\mathrm{Ln}\, z$ и константу e через закон сохранения функции по отношению к дифференцированию, а значит и интегрированию, как это фактически делается в работе [Гурвиц, Курант, 73–74], коль скоро e^z является единственной функцией, производная которой равна самой функции:

$$\frac{d\mathrm{e}^z}{dz} = \mathrm{e}^z, \ \text{или} \ \int \mathrm{e}^z dz = \mathrm{e}^z + C_0$$

Доказательство этого свойства проведено там, однако, не в основаниях теории функций, а с использованием множества предварительно полученных результатов, а главное, это ничего не дает для получения остальных констант. Таким образом функциональные уравнения

$$\psi'(x) = \psi(x), \qquad \int \psi(x)\,dx = \psi(x) + C_0$$

– это лишь определение функции ψ, не более того. Даже отдаленного намека на другие фундаментальные константы здесь нет. Если все же попытаться в рамках аксиоматической системы заменить $\mathbf{E}_1$ этим уравнением, сохранив уравнения для периода $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_4$, то сразу встанет вопрос о целесообразности, а скорее всего и допустимости такой замены. Дело в том, что новых функций помимо экспоненты и логарифма и новых констант помимо проточисел мы все равно не получим, зато базис может при этом сильно усложниться. За внешней простотой и красотой функционального уравнения $\psi' = \psi$ скрывается сложность определения понятия производной, сложность, которая плохо согласуется с требованиями простоты, минимальности, удобства оснований теории в целом. Предельный переход – чрезвычайно важная, но громоздкая математическая операция. Для ее определения требуются кроме пропозициональных связок, кванторов и нуля математические операции сложения и вычитания и выражаемая обычно через умножение операция деления, но ведь если последние две уже заданы, то отпадает всякая надобность в операции lim для введения функций e^z, Ln z и четверки констант. Словом, не давая в принципе никаких преимуществ, не добавляя ничего нового, подобная система уравнений создавала бы массу технических неудобств, устранение которых привело бы снова к системе **E**. Всё это свидетельствует как о единственности материнских функций с четырьмя константами, так и о фактической безальтернативности их представления.

Другой, в какой-то степени дополняющий этот способ введения логарифма и экспоненты связан с интегральным исчислением [Курант, 197–206]. Поскольку равенство

$$\int x^{\alpha+1}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (C \text{ – постоянная интегрирования})$$

справедливо для всех значений α за исключением $\alpha = -1$, естественно прийти к заключению, что мы имеем дело с новой, принципиально отличной от x^α функцией

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

определенной для всех положительных x кроме $x = 0$. Данное определение натурального логарифма можно, конечно, обобщить и на общий случай комплексной переменной, но надобности в этом здесь нет. Настоящее определение дает возможность получить в рамках интегрального и дифференциального исчисления все необходимые свойства логарифмической функции, а существование обратной функции e^x непосредственно вытекает из монотонности функции $\ln x$. При этом константа e есть “то число, логарифм которого равен 1” [там же, 207]. Интегральный, так сказать, способ введения логарифмической и экспоненциальной функций не лишен изящества, но с обозначенной выше точки зрения он столь же несовершенен как и предыдущий, дифференциальный способ. Общий вывод и бóльшая часть приведенной выше аргументации относительно неприемлемости дифференциального определения экспоненты как альтернативного способа введения материнских функций справедлив и для интегрального случая, поэтому нет нужды почти дословно повторять высказанные там соображения.

8. Проточисла и функции

Не совсем очевидным следствием всех этих рассуждений является вывод, что любая попытка сведения всех математических функций к какому-либо списку исходных функций неизбежно столкнется с проблемой фундаментальных констант, необходимость решения которой столь же неизбежно приведет ко всё тем же экспоненте и логарифму. Поэтому мы еще раз утверждаем, что никаких других функций, способных реально претендовать на базисную роль в математике нет. Любая аналитическая функция, какой бы сложной, неординарной она ни была, посредством математических констант и их комбинаций, операций $+$, $-$, $\cdot$, $:$, lim, суммы слагаемых Σ, произведения сомножителей Π, дифференцирования df/dz, интегрирования, суперпозиции и других операций может быть выражена, по крайней мере в области комплексных чисел, через e^z и Ln z. Количество интересующих нас функций практически необозримо, и не только рассмотрение, но даже простое перечисление всех случаев заняло бы слишком много места и едва ли вообще реально. Этого, впрочем, и не требуется – достаточно ограничиться основными элементарными функциями, простые как правило комбинации которых с помощью бесконечных сумм, произведений, суперпозиций и т.д. образуют обширный класс неэлементарных функций.

Простейшими и наиболее полезными в самых различных случаях, не исключая самые сложные, комбинациями экспоненты и проточисел (e-i-2-преобразования) являются шесть хорошо известных тригонометрических функций, сокращенно обозначаемых как cos z, sin z, tg z, ctg z, sec z, csc z (для тангенса и котангенса нередко используются и другие обозначения), и столько же аналогичных им и не содержащих мнимой единицы (e-2-преобразования) гиперболических функций. Шесть обратных тригонометрических и шесть обратных гиперболических функций попарно связаны между собой посредством константы i, и все без исключения двенадцать обратных функций выражаются через i и логарифм.

Выражение z^u, возводящее комплексное число z в комплексную степень u, распадается на два частных случая, когда либо основание степени z, либо показатель степени u постоянное комплексное число. Следовательно, *степенная* функция z^a $(z \neq 0)$ представляется в виде

$$e^{a\,\mathrm{Ln}\,z} = e^{a(\ln z + k2\pi i)} = e^{a(\ln|z| + i\varphi + k2\pi i)}$$

и вследствие свойств логарифма однозначна, если $a = 0, \pm1, \pm2\ldots$, и многозначна в остальных точках. Для *показательной* функции a^z ($a \neq 0$) также все ясно: $a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,a}$ есть многозначная (из-за $\mathrm{Ln}\,a$) функция в отличие от экспоненты e^z, областью однозначности которой является вся комплексная плоскость, "разрезанная" вдоль отрицательной части действительной оси. В теории специальных функций, например Г-функции, нередко встречается произведение показательной функции a^z на степенную z^b, где a и b могут быть различными постоянными величинами. В общем случае

$$a^z z^b = e^{x\,\mathrm{Ln}\,a + b\,\mathrm{Ln}\,z} \tag{8.1}$$

для главного же значения логарифма

$$a^z z^b = e^{x\ln a + b\ln z} \tag{8.1$'$}$$

К этому виду можно привести также любое число за исключением 0, и в определенных случаях именно такая форма представления числа является наиболее удобной и отвечающей существу дела.

Неограниченное количество элементарных функций получается из основных конечным применением операций $+$, $-$, $\cdot$, $:$ и суперпозиции. Снимая ограничения на конечность и допуская тем самым бесконечные ряды и произведения, дифференцирование и интегрирование во всех их разновидностях, бесконечную суперпозицию, то есть допуская операции, связанные с предельным переходом lim, получим почти необозримый класс неэлементарных функций, по-прежнему выражаемых через e^z, $\mathrm{Ln}\,z$, но уже посредством и предельных операций. Желающие могут заглянуть в энциклопедии и специальные справочники или в справочную часть известной программы "Mathematica 7" и убедиться как в существовании множества различных связей между отдельными функциями, так и в их сводимости к исходным ψ и α. Завершая обсуждение функций, следует непременно добавить (это обстоятельство является крайне важным, возможно даже решающим), что, как принято считать, произвольная математическая функция может быть представлена, притом единственным образом, в виде конечного, а чаще бесконечного e-i-2-преобразования, то есть тригонометрического ряда, частный случай которого – ряды Фурье. Окончательного доказательства нет, но для очень широкого класса функций это доказано, см. **[**Зигмунд**]**.

9. Уравнение суперпозиции

Считая аксиоматически заданный 0 константой наивысшего, условно *нулевого*, *ранга*, мы должны считать константами *первого ранга* связанные с нулем, функциями ψ и α и составляющие замкнутую числовую систему проточисла. Сюда можно добавить постоянную Эйлера, которая в противоположность ϕ элементарной комбинацией проточисел не является и в получении которой используется по сути логико-математический, выражаемый в аксиоматике через не только математические операции, но и логические кванторы, принцип бесконечного предельного перехода. А комбинациям вроде e^π, e^γ, 2π, $\pi/2$, $\pi^2/4$, $\ln 2$, $\sqrt{2}$ и даже более сложным комбинациям отводится в этой иерархии место констант *второго ранга*.

В свете сказанного неизбежно встает вопрос об общем количестве констант первого ранга, который мы поставим в такой форме: все ли начальные потенции системы **AGE** задействованы для получения фундаментальных математических констант и нет ли каких-то других, не использованных еще возможностей? Способ введения проточисел, а также знакомство со спецификой постоянной Эйлера имеют решающее значение для понимания этого вопроса и позволяют подойти к ответу на него с самых общих позиций. Анализ ситуации под таким углом зрения показывает, что неиспользованным пока остается конструктивный принцип суперпозиции функций, и можно по крайней мере допустить, что неэлементарное, выражающееся через операцию lim действие этого принципа может привести к чему-то принципиально новому, необычному. Далее отметим, что система функциональных уравнений $\mathbf{E}_1$–$\mathbf{E}_4$ содержит все основные виды сохранения (инвариантность аналитической формы связи, инвариантность величины по отношению к преобразованию, наличие в преобразовании числовых констант) за исключением лишь одного – независимости числового решения от выбора переменных преобразования. Сводя воедино оба начала – бесконечную суперпозицию и не зависящую от переменных преобразования константу, придем к следующему функциональному уравнению:

$$\mathbf{E}_5 \qquad \lim_{n\to\infty} S(S(\ldots S(x)\ldots) = \mathrm{const}$$

Символом S здесь обозначена неизвестная еще функция или, быть может, функции, бесконечная суперпозиция которой (которых) должна по идее привести к гипотетической и не равной другим константе (константам); x означает произвольно взятое число.

Предполагая существование обратной S функции $\operatorname{arc} S$, рассматривая выражение во внешних скобках как функцию-переменную и опираясь на очевидное свойство операции предельного перехода $\lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n-1\to\infty}$ можно свести всё к системе двух уравнений для прямой и обратной функций, которую представим в виде двойного равенства

$$\mathbf{E}_{51} \qquad S(x) = \operatorname{arc} S(x) = x$$

содержащего константу(ы) суперпозиции уже неявно, в качестве числового решения системы уравнений. Решение ищем в *простейших элементарных функциях*, понимая под этим все известные элементарные функции математики исключая, однако, их комбинации, получаемые применением арифметических действий и суперпозиции. Существует три десятка таких функций, необходимые сведения о которых содержатся в учебниках по математике и справочниках по элементарным функциям. С целью их тестирования на предмет соответствия фундаментальному уравнению $\mathbf{E}_5$ сформулируем по убывающей степени общности естественные требования, предъявляемые к искомой функции (или функциям).

а) Уравнение $\mathbf{E}_5$ имеет место для всех действительных чисел
б) Графики функций $f(x), f^{-1}(x)$ и $y = x$ имеют общую точку пересечения, в которой выполняется соотношение $\mathbf{E}_{51}$, то есть равенство значений функции, обратной функции и аргумента
в) Функции $f(x), f^{-1}(x)$ и $y = x$ пересекаются лишь в одной точке
г) Эта точка отлична от 0 и 1

Всем этим требованиям удовлетворяют лишь три функции: a^x, $\cos x$, $\operatorname{sech} x$. Учтем теперь, что уравнение суперпозиции $\mathbf{E}_5$, рассматриваемое отдельно от остальных лишь по практическим соображениям, является неотъемлемой частью системы уравнений $\mathbf{E}_1$–$\mathbf{E}_5$. А последняя представляет собой единую систему функциональных уравнений с единым решением в найденных уже функциях $\psi(x)$, $\alpha(x)$ и в константах, из которых неизвестны пока лишь константы суперпозиции. Отсюда следует, что показательная функция может быть только экспонентой: $a^x = \mathrm{e}^{-x}$.

Таким образом, решение уравнения $\mathbf{E}_5$ в элементарных функциях действительной переменной приводит к следующим функциям и константам:

$$\psi(-x) \equiv \mathrm{e}^{-x} \qquad\qquad x_\mathrm{e} = 0{,}56714\,32904\ldots$$

$$\cos x \equiv \frac{\psi(\mathrm{i}x) + \psi(-\mathrm{i}x)}{2} \equiv \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \qquad\qquad x_\mathrm{c} = 0{,}73908\,51332\ldots$$

$$\operatorname{sech} x \equiv \frac{2}{\psi(x) + \psi(-x)} \equiv \frac{2}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} \qquad\qquad x_\mathrm{h} = 0{,}76500\,99545\ldots$$

Из трех довольно близких по значению констант последняя, как скоро выяснится, менее значительна чем две другие, а тройные точки пересечения x_c и x_e показаны на рисунках; для большей наглядности отдельно приводятся также взятые в более широком интервале графики функций $\cos x = x$ и $y = x$, пересекающиеся в точке x_c.

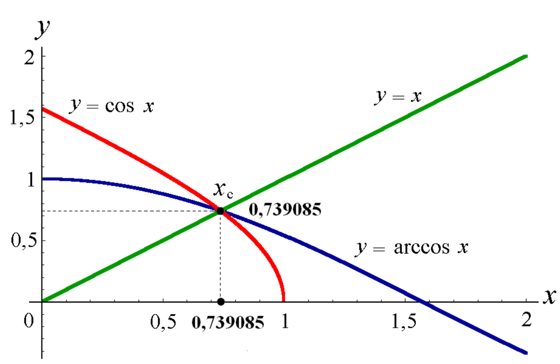


Рис. 2
Константа x_c как тройная точка
пересечения кривых $y = \cos x$, $y = \arccos x$ и $y = x$

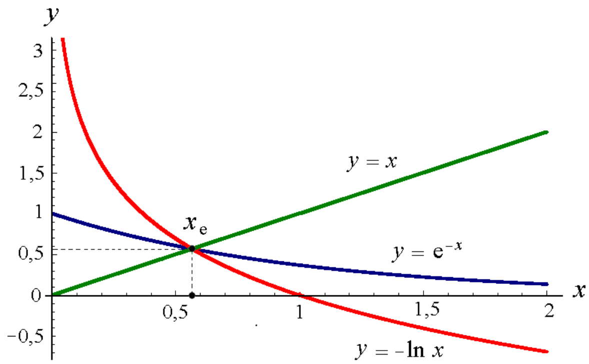


Рис. 3
Константа x_e как тройная точка
пересечения кривых $y = e^{-x}$, $y = -\ln x$ и $y = x$

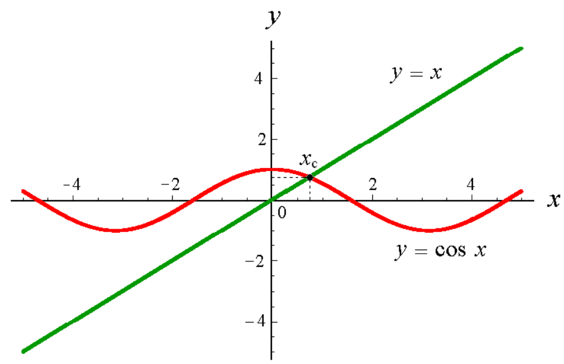


Рис. 4
Пересечения кривых $y = \cos x$ и $y = x$ в точке x_c

10. Суперпозиция для действительной и мнимой переменных

Все три прошедшие отбор функции непосредственно связаны с экспонентой и потому дальнейшее исследование фактически касается свойств материнской функции ψ. Переход от частного случая функции действительной переменной к более общему случаю функций действительной и мнимой переменных означает добавление нового условия, дополняющего условие (а).

д) Уравнение $\mathbf{E}_5$ имеет место для всех мнимых чисел

Известное соотношение

$$\operatorname{sech}(\mathrm{i}x) = \sec(x) = 1/\cos x \tag{10.1}$$

показывает, что гиперболический секанс мнимого числа есть число действительное, следовательно формула $\mathbf{E}_5$ имеет место не только для всех действительных, но и для различных мнимых чисел, однако не всех. Функция sech z не определена в точках

$$z_n = n\cdot\pi\mathrm{i}/2 \quad (n = \pm1, \pm2, \pm3, \dots)$$

в которых она обращается в бесконечность, следовательно условию (д) функция sech z не удовлетворяет, а константа суперпозиции всех действительных чисел x_h на роль ФМК претендовать не может. Понятно также, что преимущество функции $\cos x$ (как универсального генератора одной из ФМК) перед $\operatorname{sech}(\mathrm{i}x)$ состоит в том, что выражение $\psi(\mathrm{i}x) + \psi(-\mathrm{i}x)$ стоит здесь в числителе, а не в знаменателе дроби, оттого и нет у косинуса особых точек указанного типа.

В итоге, условиям (а)–(д) удовлетворяют лишь функции $(e^{-x} + e^{x})/2$ и e^{-x} со своими константами суперпозиции ա (первая буква армянского алфавита, читается “а”) и $W(1)$:

$$x_c \equiv \text{ա}, \quad x_h \equiv W(1)$$

По поводу последнего обозначения скоро будут даны необходимые разъяснения. Для данной пары функций и констант справедливость предельного отношения $\mathbf{E}_5$ не зависит от выбора начальной, действительной или мнимой, переменной x. А выражаясь языком геометрии, можно сказать, что применением принципа бесконечной суперпозиции ко всем точкам, лежащим на действительной и мнимой осях, обе оси отображаются в точки ш или W(1).

Для функции косинуса из уравнения

$$\mathbf{E}_{52} \qquad \lim_{n\to\infty} \cos(\cos \ldots \cos(z) \ldots) = ш$$

имеем

$$\mathbf{E}_{53} \qquad \cos z = \arccos z = z$$

или в явном виде

$$\mathbf{E}'_{53} \qquad \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -i\ln(z + \sqrt{z^2-1}) = z$$

Аналогично для экспоненты e^{-x} из исходного уравнения

$$\mathbf{E}_{54} \qquad \lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(\psi^{-1} \ldots \psi^{-1}(z) \ldots) = W(1)$$

получаем

$$\mathbf{E}_{55} \qquad e^{-z} = \mathrm{Ln}(-z) = z$$

Трансцендентные уравнения $\mathbf{E}_{53}$ и $\mathbf{E}_{55}$, удобные для вычисления констант ш и W(1), неразрешимы в конечном виде относительно неизвестной x. Стало быть, эти константы, связанные как и дóлжно с функциями ψ, α и проточислами, не являются однако комбинациями последних наподобие e^{π} или, допустим, $\pi^2/4$. Следовательно, ш и W(1) имеют равный с π, e, i, 2, γ статус констант первого ранга.

Займемся вначале константой ш. Предшествующее изложение подводит к мысли, что в области действительных и мнимых чисел любая математическая константа так или иначе, через те или иные операции обусловлена материнскими операциями ψ и α и что все константы глубоко связаны друг с другом, составляя единую взаимодополняющую систему выделенных математических величин. Вполне поэтому закономерно, что константа ш, определяемая уравнением $\mathbf{E}_5$ через исходную в системе **AGE** операцию суперпозиции, то есть будто совершенно независимо от принципов, которые положены в основу определения функций ψ, α и проточисел, тем не менее имеет решение непосредственно соотносящееся с теми и другими. Более того, близость по природе, удивительное сходство вторичных аналитических форм, включенность константы ш в систему фундаментальных констант бросается в глаза, если простейшую комбинацию соотношений для проточисел сравнить с соотношением $\mathbf{E}_{53}$, получаемым из исходного $\mathbf{E}_5$:

$$\frac{\psi(i\pi) + \psi(-i\pi)}{2} = i\cdot i \tag{10.2}$$

$$\frac{\psi(iш) + \psi(-iш)}{2} = ш \tag{10.3}$$

В обоих соотношениях полусумма функциональных слагаемых типа $\psi(x)$, $\psi(-x)$ дает одну из содержащихся под знаком функции констант, другими словами e-2-i-π-преобразование приводит к $i\cdot i$, а e-2-i-ш-преобразование, с заменой π на ш, приводит к ш. В обоих соотношениях содержатся только константы, составляющие таким образом семейство взаимосогласованных фундаментальных математических величин. Уравнение $\mathbf{E}_5$, определяющее фактически константы ш и W(1), наряду с функцией косинуса

$$S(x) = \frac{\psi(ix) + \psi(-ix)}{2} \quad (x \text{ действительно или мнимо})$$

и материнской функцией $\psi^{-1}(x)$ с самого начала могло быть включено в систему функциональных уравнений **E** в качестве одного из ее уравнений. Но стоявшие тогда задачи, в частности введение новых операций и построение континуума, не требовали констант γ, ш и W(1), добавление же уравнения $\mathbf{E}_5$ несколько осложнило бы решение системы из пяти уравнений, и в основном по техническим соображениям мы предпочли заняться суперпозицией позже. Перед тем как привести более точное чем в предыдущем разделе десятичное значение числа ш, дадим для сравнения уравнение $\mathbf{E}_{53}$ и в интегральной форме $\mathbf{E}_{56}$, которая при соответствующем выборе постоянных интегрирования неопределенных интегралов либо пределов интегрирования определенных интегралов эквивалента $\mathbf{E}_{53}$:

$$\mathbf{E}_{56} \qquad \int \sin x\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int dx \tag{10.4}$$

Решая любое из трех уравнений $\mathbf{E}_{53}$ (удобнее, конечно, иметь дело с уравнением $\cos x = x$ для действительной переменной x) одним из существующих методов приближенного решения трансцендентных уравнений, например стандартным методом касательных Ньютона, получим число **[**Аракелян 1981, 135, 136**]**

ш = 0,73908 51332 15160 64165 53120 87673 87340 40134 11758 90075 74649 65680 63577 32846 54883 54759 45993 76106 93176 65318 49801 24664 39871 63027 71490 36913 08420 31578 04405 74620 77868 85249 03891 53928 94388 45095 23480 13356 12767 7223… (10.5)

которое по всей видимости трансцендентно, то есть выражается бесконечной непериодической десятичной (или любой другой n-ичной) дробью. Здесь приведены лишь двести знаков десятичного представления константы ш, а вычислены 100 000, а затем и 6 400 000 ее десятичных знаков **[**Аракелян 2007*b*, 2010*a***]**. Заметим также, что есть и другой – общедоступный, “эмпирический” способ получить десятичное приближение числа ш. Дело в том, что с определенной точностью оно как бы содержится в любом калькуляторе, способном производить операцию cos. Надо лишь наугад набрать число (выражаемое, понятно, в радианах) или, ничего даже не набирая, нажимать раз за разом или держать нажатой кнопку “cos”. Получаемый с доступной для данного калькулятора точностью результат (10.5) скоро замелькает на экране. Это означает, что предельное значение бесконечной последовательности математических преобразований не зависит от выбора начального действительного, и добавим мнимого, числа. Другими словами, перед нами уникальный случай глобального числового аттрактора.

О характере приближения к пределу получаемой из $\mathbf{E}_{52}$ последовательности чисел можно судить по рисункам.

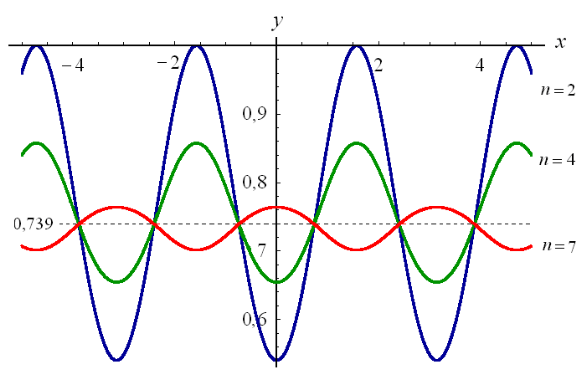


Рис. 5
Графики функции cos(cos(…cos(x)…) для n = 2, 4, 7

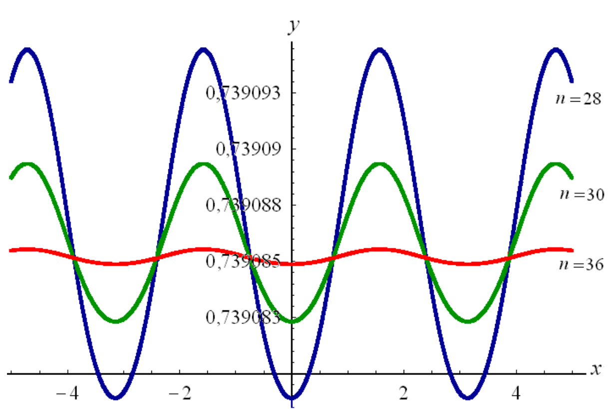


Рис. 6
Графики функции cos(cos(…cos(x)…) для n = 28, 30, 36

Для мнимой переменной ix это последовательность действительных чисел $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ x_{n+1},\ \ldots$ которая с каждым шагом приближается к своему пределу, попеременно принимая большие и меньшие чем ɯ значения. Кстати, в теории ЛМФ константа ɯ − это тот самый “скрытый параметр”, недостающее звено в семействе математических величин, которое позволяет в [Аракелян 2007; 2007*a*; 2010] решить, считающуюся ранее “непробиваемой” проблему теоретического определения численных значений некоторых фундаментальных физических постоянных путем их сведения к ФМК.

Что касается второго случая, он несколько своеобразен. Известно, что экспонента e^{-ix} переводит мнимое число в комплексное, поэтому для любого ix уравнение $\mathbf{E}_{54}$ приводит к бесконечному упорядоченному множеству типа

$$x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2,\ x_3 + iy_3,\ \ldots,\ x_n + iy_n,\ \ldots$$

Особенность этой последовательности комплексных чисел в том, что с увеличением n варианта y_n стремится к нулю, переменная же x_n, а вместе с ней и вся последовательность $x_n + iy_n$, сходится к пределу $\mathrm{W}(1)$. При этом, как и в случае косинуса, переменная x_n приближается к своему пределу колеблясь возле точки сходимости $\mathrm{W}(1)$ с постоянно уменьшающейся амплитудой колебаний. Первые двести знаков десятичного представления второй константы суперпозиции таковы:

$$\begin{aligned}\mathrm{W}(1) = {} & 567143\,2904\,09783\,87299\,99686\,62210\,35554\,97538\,15787\,18651\,25081\,35131\,07922\,30457\,93086 \\ & 68456\,6932\,19446\,96175\,22945\,57638\,02497\,28667\,89785\,45235\,84659\,40072\,99560\,85164\,39289 \\ & 99461\,43115\,71492\,95980\,35943\,76698\,47463\,56061\,34226\,84613\ldots \end{aligned} \tag{10.6}$$

С точностью в n десятичных знаков константа $\mathrm{W}(1)$, называемая также *омега-константой*, может быть получена в “Mathematica 7” набором выражения N[ProductLog[1], n], где вместо n может стоять любое семи- или даже восьмизначное число.

Используемое здесь обозначение не случайно, поскольку речь фактически идет об определенном значении функции Ламберта $\mathrm{W}(z)$, или омега-функции, см. [Michon], обычно задаваемой функциональным уравнением

$$z = \mathrm{W}(z)e^{\mathrm{W}(z)},\ \text{ или }\ \mathrm{W} = ze^{-\mathrm{W}} \tag{10.7}$$

Функция $\mathrm{W}(z)$, определенная для множества всех чисел z включая 0 и используемая при решении различных трансцендентных уравнений, нашла достаточно широкое применение в чистой математике и за ее пределами – в физике и биологии, в механике жидких сред, при анализе динамических систем, в теории алгоритмов и т. д., см. [Corless *et al.*]. Кривая $\mathrm{W}(x)$, $(x \geq 0,\ \mathrm{W}(0) = 0)$, напоминающая по виду график логарифма, показана на рисунке вместе с кривой $y = \ln x$:

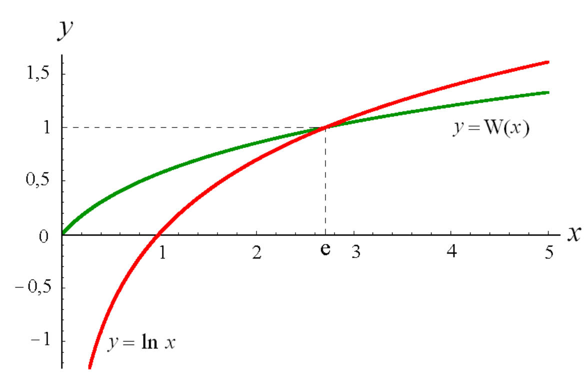


Рис. 7
Графики функций $\mathrm{W}(x)$ и $\ln x$

Если $z = 1$, получаем уравнение

$$\mathrm{W}(1) = e^{-\mathrm{W}(1)}$$

тождественное $\mathbf{E}_{55}$. Таким образом, одно из двух решений уравнения $\mathbf{E}_5$ для действительной и мнимой переменных совпадает с выделенным значением функции $\mathrm{W}(z)$, соответствующим простейшему случаю отсутствия множителя z в уравнении (10.7). В этом смысле число $\mathrm{W}(1)$ может считаться первенцем бесконечного семейства чисел $\mathrm{W}(z)$. Следует также отметить, что пути, ведущие к константе 0,567143…, весьма различны. В то время как в последнем уравнении экспонента задана с самого начала и задача сводится лишь к нахождению различных значений W(z) в зависимости от значений переменной z, в функциональном уравнении $\mathbf{E}_5$ неизвестными "величинами" наряду с ɯ и W(1) являются функции cos(z) и e^{-z}, причем значения констант суперпозиции от конкретных значений z никак не зависят. Остается добавить, что получение приближенного десятичного значения константы W(1) на калькуляторе ненамного сложнее чем в случае константы ɯ. Взяв произвольное число, надо производить над ним одну за другой операции e^x и $1/x$ до тех пор, пока число 0,56714 32904… не появится на дисплее с максимальной для данного калькулятора точностью. Следовательно, ФМК W(1) это еще и один из двух глобальных числовых аттракторов.

11. Замечания, итоги и перспективы

Характерной особенностью ФМК является неожиданное появление в самых разных разделах чистой и прикладной математики, в самых разных ролях и в самых непредвиденных обстоятельствах. История математики полна таких неожиданностей, притом в отношении всех без исключения фундаментальных констант. В связи с этим любопытно отметить, что уравнение $\cos x = x$, впервые рассмотренное в [Аракелян 1981, 135, 136] в связи с решением проблемы теоретического определения численных значений фундаментальных физических постоянных, в последнее время встречается довольно часто. В этом можно убедиться с помощью Интернета, последовательно задавая например поиск десятичных приближений

0,73908   0,739085   0,7390851   0,73908513   0,739085133 …

числа ɯ в поисковых системах Google, Alta Vista, Yahoo, … Для пяти-четырнадцати верных знаков после запятой количество web-страниц исчисляется обычно сотнями, далее оно убывает и с пятнадцати до ста и более знаков исчисляется десятками, считанными единицами или полным отсутствием ссылок. Конечно, очень часто, особенно для пяти-шести знаков, имеет место простое совпадение каких-то сочетаний цифр с тем или иным десятичным приближением константы. После того как всё случайное будет отброшено, останется более тысячи (!) страниц, где речь уже идет о математическом числе, являющемся решением уравнения для косинуса. Правда, и здесь рассмотрение обычно носит формальный характер и преследует весьма ограниченные, преимущественно иллюстративные цели – при изложении приемов математического исследования, таких как анализ итерационных процессов и методы численного решения (например, метод касательных Ньютона) трансцендентных уравнений, простейшим и характерным примером которых и является данное уравнение. Исследование формальных свойств косинуса, в частности его особых точек, также приводит к "магической" точке 0,739085… С основаниями математики, а тем более с фундаментальной физикой эти случаи, безусловно, прямо не соотносятся, хотя и здесь можно найти подоплеку. Уравнение $\cos x = x$ относится к числу простейших трансцендентных уравнений, к тому же с единственным, графически легко представимым и не равным 0 или 1 решением, известным еще со второй половины 19-го века [Bertrand; Briot; Heis; Miller].

Всё вроде очень просто, доступно и лежит на поверхности, но лишь глубокий анализ позволяет постичь истинную природу указанного числа как фундаментальной математической константы одного ранга с π. Впрочем, и огромный чистый алмаз может быть принят за любопытный блестящий камешек: если уж говорить о константе π, то вплоть до появления методов решения бесконечных числовых рядов и произведений она рассматривалась *лишь* как чисто геометрическое отношение длины окружности к диаметру. Широкий выход новой константы за рамки чистой математики практически неотвратим, и вот уже число 0,739085… вместе с уравнением для косинуса появляется наряду с числами Фейгенбаума при анализе процессов перехода от хаоса к упорядоченности, при рассмотрении фракталов – см., например, [Bojar; Rynne], а также [Weisstein] – при решении уравнения Кеплера для предельного случая, когда эксцентриситет эллиптической орбиты равен 1 [AKiTi]. В этом нет ничего удивительного или неожиданного, если принять во внимание исходное уравнение $\mathbf{E}_5$. Геометрически оно может интерпретироваться как отображение мнимой и действительной осей координат в одну точку, а содержательно истолковано как, допустим, переход от произвольной множественности к вполне определенной количественно иной особенности. Можно поэтому предположить, что новые появления константы ɯ в области физических явлений мыслимы при исследовании энтропийных процессов, процессов упорядочивания физических систем, колебательных процессов, фазовых переходов, фракталов, динамических систем, турбулентности, …

Наше рассмотрение постоянной суперпозиции косинуса не будет полным без упоминания истории касающейся ее обозначения и названия. Напомним, что число 0,739085… как решение уравнения типа $f(x) = x$, конкретно уравнений $\mathbf{E}_{53}$, является неподвижной точкой отображения, как решение уравнения суперпозиции $\mathbf{E}_{53}$ – глобальным аттрактором, а как одно из решений системы функциональных уравнений $\mathbf{E}$ – фундаментальной математической константой. Разумеется аттрактор – нечто большее чем неподвижная точка отображения, но в то же время фундаментальная математическая константа – куда более важный объект, чем аттрактор. Но и в ранге аттрактора, тем более глобального, число заслуживает не только специального обозначения, но и именного названия. О том как это иногда делается (возможно по неведению, но в любом случае с нарушением авторского права) можно судить по выдержке из небольшой статьи, опубликованной в 2007 году в известном американском математическом журнале и случайно обнаруженной нами в интернете в конце 2009 года. "Среди моих друзей, выпускников школы, *число Дотти* было прозвищем единственного действительного корня уравнения $\cos x = x$. Говорят, что Дотти, профессор французского языка, заметила, что какое бы число она не набирала на калькуляторе, последовательное нажатие кнопки COS всякий раз давало на дисплее одно и то же значение 0.739085… . Она спросила своего мужа, профессора математики, почему калькулятор всегда дает только одно значение, независимо от первоначально набранного числа. Он посмотрел, попробовал и сказал, что пока еще не разобрался. На следующий день он понял произошедшее, как и то, что его жена нашла красивый, простой образец глобального аттрактора" [Kaplan].

После этой статьи о *числе Дотти* (*Dottie number*), как о глобальном аттракторе и просто замечательном числе, заговорили многие. Появились упоминания в научной печати, предложение о включении в учебники по математике, отдельная статья в математическом веб-сайте MathWorld [Weisstein], десятичная запись (более ста знаков после запятой) *Dottie number* в онлайн энциклопедии целочисленных последовательностей [Sloane], широкое обсуждение на математических форумах с интригующими названиями [A most mysterious of numbers] и т. п.

Между тем, число 0,739085…, как аттрактор и более того как фундаментальная математическая константа, впервые появилось за четверть века до "Dottie number", в начале 80-ых прошлого столетия [Аракелян 1981]. Названная "постоянной косинуса" или "постоянной суперпозиции косинуса" и обозначенная символом ɯ эта константа широко использовалось при решение некоторых важнейших проблем физической теории [Аракелян 1981; 1989; 1995; 1997; 2007; 2007*a*; 2010]. Впрочем, наше авторское право на обозначение и название данного числа, подтвержденное соответствующими доказательствами и подкрепленное обращением руководства Национальной академии наук Армении к журналу "Mathematics Magazine", никем фактически не оспаривается и уже внесены кое-какие изменения в указанную статью в MathWorld. А раз уж принято не только символически обозначать, но и давать именные названия особо значимым числам, всё похоже говорит в пользу *константы Аракеляна*, хотя понятно допустимы и другие названия: *постоянная суперпозиции косинуса*, *аттрактор косинуса*, просто *константа ɯ* и т. п.

Что касается числа W(1), обнаружившего себя в качестве константы суперпозиции экспоненты в ходе очерченного выше исследования, то о его достаточно широком применении в области чистой математике и ее приложений уже говорилось. Напомним только, что омега-константа не только одна из фундаментальных математических констант, но один из двух числовых глобальных аттракторов в области элементарных функций.

В числах заключена великая тайна и великая сила, которую человек стал осознавать с незапамятных времен. Не случайно числовая магия возникла задолго до появления математики как науки, оказав на последнюю немалое влияние, особенно в момент ее становления; не случайно и современная наука и "тайное знание" при всём их различии с одинаковым пиететом относятся к числам; пожалуй, только *наука о числах* (по-разному, конечно, понимаемая) является обязательной, непременной принадлежностью как фундаментальной науки, так и оккультизма. С высоты сегодняшнего знания кажется вполне очевидным, что в лоне математики и математического естествознания хорошо известные величины – фундаментальные математические константы – приобрели со временем высочайший статус, вселенскую значимость. Если вообще попытаться хотя бы в грубом приближении, без особых претензий на точность и тем более полноту, буквально в нескольких словах охарактеризовать наиболее характерную содержательную особенность, прикладную роль каждой из восьми фундаментальных математических констант в отдельности, то картина может быть такой:

0	отсутствие данного количества или свойства
π	от прямолинейного к криволинейному

e быстрое увеличение

i периодические процессы

2 появление нелинейных связей

γ переход к интегральным формам

ш, W(1) переход от множественного к единичному

А в более важном в данном контексте системном подходе константы 0, e, π, i, 2 вправе, как было показано выше, считаться началом всех чисел, "первоатомами" числового множества, способными конструировать континуум; что же касается констант γ, ш, W(1) это как бы мостик между единичным (число) и актуальной математической бесконечностью (интеграл, суперпозиция).

Литература

Аракелян Г.Б. *Фундаментальные безразмерные величины (Их роль и значение для методологии науки).* Ереван: Изд. АН, 1981

- *Числа и величины в современной физике*. Ереван: Изд. АН, 1989
- *The New Fundamental Constant of Mathematics*. Pan-Armenian Scientific Rev., vol. 3, London, 1995
- *Основания физической теории*. Ереван: Давид, 1997
- Фундаментальная теория ЛМФ. Ереван, 2007 www.hrantara.com/Monograph.pdf
- От логических атомов к физическим законам. Ереван: "Лусабац", 2007*a* www.hrantara.com/Book.pdf
- Новая фундаментальная математическая константа (с точностью до 100000 знаков после запятой), 2007*b* http://www.hrantara.com/NewConstant.pdf
- *LMP Fundamental Theory*. Yerevan: Sarvard, 2010
- Новая фундаментальная математическая константа (с точностью до 6 400 000 знаков после запятой), 2010*a* http://www.hrantara.com/NewConstant2.pdf

Гурвиц А., Курант Р. *Теория функций*. М.: Наука, 1968

Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*, т. 1–2. М.: Мир, 1965

Кантор И.Л., Солодовников А.С. *Гиперкомплексные числа*. М.: Наука, 1973

Клини С. *Математическая логика*. М.: Мир, 1973

Курант Р. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. I. М.: Наука, 1967

A most mysterious of numbers http://forums.xkcd.com/viewtopic.php?f=17&t=23066&p=687416

AKiTi Kepler's Equation of Elliptical Motion http://www.akiti.ca/KeplerEquation.html

Bertrand J. Exercise III in *Traité d'algèbre, Vols. 1-2, 4th ed.*, Paris: Librairie de L. Hachette et Cie, 1865, p. 285.

Bojar Ondřej. *Chaos přehledně* http://chaospace.hyperlinx.cz/index.php?pgid=230

Briot C.M. *Leons d'algèbre conformes aux programmes officiels de l'enseignement des lycées, 11th ed.*, Paris: Librairie Ch. Delagrave, 1881, 341–343.

Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J., and **Knuth D.E.** *On the Lambert W Function*. Advances in Computational Mathematics **5**, 329–359 (1996)

Heis E. *Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, Vol. 2, 3rd ed.*, Cologne, Germany: Verlag der M. DuMont-Schauberg'schen Buchhandlung, 1886, p. 468

Kaplan S.R. *The Dottie Number*, Math. Mag. **80**, (2007), 73–74

Michon G.P. *Final Answers: Numerical Constants* http://home.att.net/~numericana/answer/constants.htm#mertens

Miller T.H. *On the Numerical Values of the Roots of the Equation* $\cos x = x$, Proc. Edinburgh Math. Soc. **9**, (1890), 80–83

Rynne B.P. *F1.4ZJ2 Fractals and Chaos Solutions 7* http://www.ma.hw.ac.uk/~bryan/f14zj2/sol7.pdf

Schwinger J. Phys. Rev. **73**, 416 (1948)

Sloane N.J.A. *Sequence A003957*. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences http://oeis.org/history?seq=A003957

Weisstein E. W. *Fixed Point*. From MathWorld http://mathworld.wolfram.com/FixedPoint.html

- *Dottie Number*, From *MathWorld*. A Wolfram Web Resource http://mathworld.wolfram.com/DottieNumber.html