С.Л. Василенко

Золотые матрицы Фибоначчи

Среди профи и любителей математики, а также специалистов самых разных специальностей хорошо известны числа Фибоначчи.

Они названы так известным французским математиком Франсуа Люка (1842–1891) в честь итальянца Фибоначчи, который в своей "Книге об абаке" (1202) привел довольно незамысловатую, но весьма поучительную арифметическую задачку о подсчете количества абстрактно размножающихся кроликов.

Сами числа, возникающие из этой задачи, как и способ формирования их, были хорошо и задолго известны в древней Индии [1, с. 126], где они применялись в метрических науках за много веков до того, как впервые появились в Европе.

Особую популярность они получили после публикации монографии Н.Воробьева [2].

Сегодня всевозможные расширения и обобщения подобных числовых последовательностей (называемых по-прежнему именем Фибоначчи) достигли небывалых высот.

Варьируется количество слагаемых, вводятся добавочные коэффициенты, изменяются интервальные задержки между элементами последовательностей и проч.

Обобщения давно перешагнули треугольник Паскаля, с которым так или иначе связаны числа Фибоначчи, покоряя вершины пирамид Паскаля [3] и других форм-образований.

Но есть, на наш взгляд, в этой области ещё одно весьма интересное структурирование.

Построение матриц Фибоначчи. Комбинаторика нам подсказывает, что на основе аддитивных схем могут быть особым способом построены таблицы (матрицы), обладающие основными признаками получения чисел Фибоначчи.

Инструментарий здесь достаточно широкий.

Остановимся на одном из них. Он достаточно простой и одновременно максимально приближенный к базовой схеме.

В первой строке формируется ряд Фибоначчи.

В последующих строках ячейки также заполняются суммами двух предшествующих ячеек, сложенных с теми или иными числами из вышерасположенных строк.

Определение. *Матрица Фибоначчи* – треугольная числовая таблица, первая строка которой содержит числа Фибоначчи, а ячейки последующих строк заполняются фибоначчиевыми суммами содержимого двух предшествующих ячеек плюс некоторых ячеек из вышележащих строк.

Примерные схемы построчного образования подобных матриц (с одной дополнительной строкой) по строкам i и столбцам j показаны на рис. 1, где знаком "+" помечены складываемые ячейкам, а результат помещается на место зеленой клетки "·".

Рассмотрим базовую треугольную матрицу. Она совпадает с таблицей A063967[1], приведенной в энциклопедии числовых последовательностей.

Начальные условия: диагональ равна 1, диагональ слева от нее и верхняя строка = 0.

$$a_{i\,i} = 1, \;\; a_{i+1,\,i} = a_{0,\,i} = 0, \;\; i = \overline{0,\,n}\,.$$

Рекурсия образуется сложением содержимого двух верхних и пары левых ячеек:

$$a_{i\;j} = \left(a_{i,\;j-1} + a_{i,\;j-2}\right) + \left(a_{i-1,\;j-1} + a_{i-1,\;j-2}\right).$$

[1] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://oeis.org/.

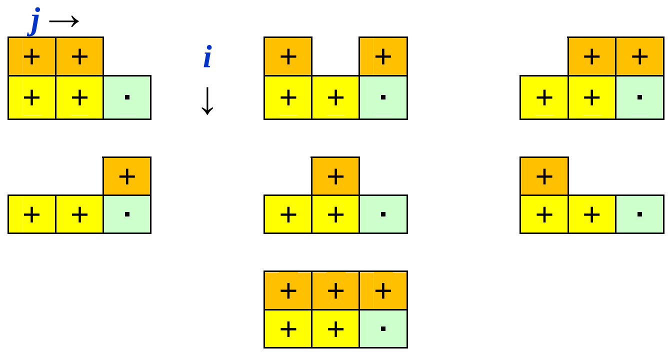

Рис. 1. Мнемосхемы построчного построения матриц Фибоначчи
с одной дополнительной формообразующей строкой

Или в эквивалентной записи

$$a_{i\ j} = f_{i\ j} + f_{i-1,\ j}\,,$$

где $f_{i\ j} = a_{i,\ j-1} + a_{i,\ j-2}\,,\quad i = \overline{1, n-2}\,;\quad j = \overline{i+1, n}\,.$

В первой строке образуются числа Фибоначчи F_n (табл. 1).

Таблица 1

Базовая матрица Фибоначчи

(формат верхнего треугольника)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2		0	1	3	7	15	30	58	109	201	365
3			0	1	5	16	43	104	235	506	1051
4				0	1	7	29	95	271	705	1717
5					0	1	9	46	179	591	1746
6						0	1	11	67	303	1140
7							0	1	13	92	475
8								0	1	15	121
9									0	1	17
10										0	1
	0	**1**	**2**	**6**	**16**	**44**	**120**	**328**	**896**	**2448**	**6688**

Данная матрица обладает многими интересными свойствами.

Так, вторая строчка образует ряд A023610 с производящей функцией $\dfrac{x+1}{(1-x-x^2)^2}$ (L.Smiley, 2001) и аналитической формулой $a_{2,\ j+1} = \dfrac{jF_{j+1} + 2(j+1)F_j}{5}$ (R.Stephan, 2003).

Например, для $j = 7$ имеем: $a_{2,7} = (7 \cdot 34 + 4 \cdot 13)/5 = 58$.

Его j-й элемент представляет количество членов во всех упорядоченных разбиениях числа $j-1$ с использованием только единиц и двоек. В частности, $a_{2,6} = 30$, поскольку восемь упорядоченных разбиений пятерки содержат 30 единиц и двоек:

5 = 1+1+1+1+1 = 2+1+1+1 = 1+2+1+1 = 1+1+2+1 = 1+1+1+2 = 2+2+1 = 2+1+2 = 1+2+2.

Каждый элемент $(i+1,\ j+1)$ матрицы может быть вычислен по аналитико-комбинаторной формуле явного вида как сумма произведений (P.Barry, 2005):

$$a_{i+1,\ j+1} = \sum_{k=1}^{j} C_{k}^{\,j-k} \cdot C_{k}^{i}\ , \qquad (1)$$

где $C_x^y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{x\,!}{y\,!(x-y)}$ – число сочетаний из x по y (биномиальные коэффициенты)

В частности, для второго ряда $a_{2,\ j+1} = \sum\limits_{k=0}^{j} (j-k) C_{j-k}^{\,k}$.

Кроме того, элементы второй строки равны текущим суммам аналогичного ряда из табл. 4 (см. ниже). Например, $58 = 1+2+4+8+15+28$.

Числа, расположенные по столбцам матрицы a, удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^{j} (m-1)^{k-1} a_{k,\ j} = g_j\ ,$$

где m – произвольное вещественное число; g – обобщенная последовательность Фибоначчи

$$g_t = m(g_{t-1} + g_{t-2}),\quad (g_0, g_1) = (0, 1)\,,$$

Учитывая, числа Фибоначчи $F_n = \dfrac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$ стремятся к величине $\dfrac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$ (Φ – число золотого сечения) с ростом порядкового номера n, найдем аттрактор:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{2,\ j+1}}{a_{2,\ j}} = \lim_{j\to\infty} \frac{jF_{j+1} + 2(j+1)F_j}{(j-1)F_j + 2jF_{j-1}} = \lim_{j\to\infty} \frac{j\Phi^{j+1} + 2(j+1)\Phi^j}{(j-1)\Phi^j + 2j\Phi^{j-1}} = \lim_{j\to\infty} \frac{j\Phi^2 + 2(j+1)\Phi}{(j-1)\Phi + 2j} =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{\Phi^2 + 2\Phi}{\Phi + 2} = \lim_{j\to\infty} \Phi \cdot \frac{\Phi + 2}{\Phi + 2} = \Phi.$$

Таким образом, подобно числам Фибоначчи, данная последовательность в своих отношениях соседних членов стремится к золотому сечению!

Можно несколько изменить начальные условия, положив диагональ вместо 1 равной числам натурального ряда, то есть $b_{i,\,i} = 1$. Всё остальное остается по-прежнему.

В результате образуется следующая матрица b.

Таблица 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2		0	2	4	9	18	35	66	122	222	399
3			0	3	9	25	61	139	301	628	1273
4				0	4	16	54	156	410	1006	2345
5					0	5	25	100	335	1001	2752
6						0	6	36	167	638	2141
7							0	7	49	259	1113
8								0	8	64	380
9									0	9	81
10										0	10

Для неё выполняется ключевое соотношение $b_{i\ j} = b_{i-1,\ j-1} + a_{i\ j}$.

То есть каждый элемент матрицы b равен сумме своего предшествующего "соседа" (по диагонали вверх) и одноименного элемента матрицы a.

Например, $b_{2,7} = b_{1,\,6} + a_{2,7} = 8 + 58 = 66$.

Примечательно, что стоит нам только подвинуть первую строку, начав её с пары (1, 2), как существенно изменяются все нижележащие строки (по сравнению с табл. 1).

В результате получаем следующую матрицу (A154929)

Таблица 3

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
2		0	1	4	10	22	45	88	167	310	566
3			0	1	6	21	59	147	339	741	1557
4				0	1	8	36	124	366	976	2422
5					0	1	10	55	225	770	2337
6						0	1	12	78	370	1443
7							0	1	14	105	567
8								0	1	16	136
9									0	1	18
10										0	1

Каждый элемент $(i+1,\ j+1)$ матрицы может быть вычислен по аналитико-комбинаторной формуле явного вида как сумма произведений

$$a_{i+1,\ j+1} = \sum_{k=1}^{j} C_{k+1}^{j-k} \cdot C_k^i \ .$$

Она отличается от подобной формулы (1) лишь нижним индексом у первого сомножителя: $k \to k + 1$.

Помимо изложенного способа складывания содержимого ячеек таблицы возможны и другие варианты рекуррентных форм (см. рис. 1).

Так, рекурсия образуется сложением содержимого пары левых ячеек и одной верхней (буквой "г" или ходом шахматного коня от основной ячейки):

$$a_{i\ j} = f_{i\ j} + a_{i-1,\ j-2}\,.$$

Таблица 4

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2		0	1	2	4	8	15	28	51	92	164
3			0	1	2	5	11	24	50	102	203
4				0	1	2	5	12	28	64	142
5					0	1	2	5	12	29	69
6						0	1	2	5	12	29
7							0	1	2	5	12
8								0	1	2	5
9									0	1	2
10										0	1

Вторая строка образует ряд (A029907) с производящей функцией $\dfrac{x(1-x^2)}{(1-x-x^2)^2}$ и аналитической формулой $a_{2,\ j+1} = \dfrac{(j+4)F_j + 2jF_{j-1}}{5} = \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{r=0}^{k/2} C_{j-1-r}^{\,r}$.

Или её обновленный вариант с диагональю в виде чисел натурального ряда

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2		0	2	3	6	11	20	36	64	113	198
3			0	3	5	11	22	44	86	166	316
4				0	4	7	16	34	72	150	308
5					0	5	9	21	46	101	219
6						0	6	11	26	58	130
7							0	7	13	31	70
8								0	8	15	36
9									0	9	17
10										0	10

Рекурсию можно образовать и сложением содержимого пары левых ячеек и одной верхней, отстоящей от основной ячейки по диагонали (A037027)

$$a_{i\,j} = f_{i\,j} + a_{i-1,\ j-1}\,.$$

Таблица 5

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2		0	1	2	5	10	20	38	71	130	235
3			0	1	3	9	22	51	111	233	474
4				0	1	4	14	40	105	256	594
5					0	1	5	20	65	190	511
6						0	1	6	27	98	315
7							0	1	7	35	140
8								0	1	8	44
9									0	1	9
10										0	1

Вторая строка представляет числа Фибоначчи, "сворачивающиеся в себя" (A001629) с производящей функцией $\dfrac{x^2}{(1-x-x^2)^2}$ и аналитическими формулами:

$$a_{2,\ j} = \sum_{k=0}^{\lceil j/2-1\rceil}(k+1)C_{j-1-k}^{\,k+1} = \sum_{k=0}^{\lceil j/2-1\rceil}(j-1-k)C_{j-k-2}^{\,k}\,,$$ (E.Deutsch, 2001; P.Barry, 2005);

$$a_{2,\ j} = \left\lceil \frac{1}{5}\left(j-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\Phi^j + \frac{1}{2}\right\rceil = \frac{(j-1)\cdot F_j + 2j\cdot F_{j-1}}{5}\,,$$ (Benoit Cloitre, 2003; Vajda),

где $\lceil \xi \rceil$ – целая часть от величины ξ.

Примечательно, что вторая строка выражается суммой произведений чисел Фибоначчи

$$a_{2,\ j} = \sum_{k=1}^{j} F_k F_{j-k}\ .$$

В общем виде i-я строка содержит ряд с производящей функцией $\dfrac{1}{\left(1-x-x^2\right)^i}$.

Третья строка также представляется суммой произведений чисел Фибоначчи

$$a_{3,\ j} = \sum_{n_1+n_2+n_3=j} F_{n_1} F_{n_2} F_{n_3}\ .$$

Общая комбинаторная формула получена нами в виде

$$a_{i+1,\ j+1} = \sum_{k=1}^{j-i} C_{k+i}^{\ i} \cdot C_{\ k}^{\ j-i-k}\ .$$

Она корреспондируется с обобщением формулы (P.Barry, 2005–2008)

$$a_{i+1,\ j+1} = \sum_{k=1}^{\left\lceil \frac{j-i}{2} \right\rceil} C_{j-k}^{\ i} \cdot C_{j-i-k}^{\ k}$$

Обобщение формулы (B.Cloitre, 2002) воплощается в уникальное тождество (!) для представления элементов матрицы через сумму произведений чисел Фибоначчи

$$a_{i,\ j} = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_i=j} F_{n_1} F_{n_2} \cdots F_{n_i}\ ,$$

и содержит различные комбинации i индексов так, чтобы их сумма постоянна и равняется номеру столбца $n_1 + n_2 + \ldots + n_i = j$.

Отдельные строки (i = 3–9) приведены в следующих последовательностях:
3 – A001628, 4 – A001872, 5 – A001873, 6– A001874, 7 – A001875, 8 – A023007, 9 – A023008.

Справедливы также следующие формулы для третьей, четвертой и пятой строк:

$$a_{3,\ j+2} = \frac{(5j+11)jF_{j+1} + (5j+12)(j+1)F_j}{50};$$

$$a_{4,\ j+3} = \frac{(j+4)(j+2)\left[4jF_{j+1} + 3(j+1)F_j\right]}{3! \cdot 5^2};$$

$$a_{5,\ j+5} = \frac{\left(1368+970j+215j^2+15j^3\right)(j+1)F_{j+2} + 2\left(408+305j+70j^2+5j^3\right)(j+2)F_{j+1}}{4! \cdot 5^3}\ .$$

Они дают нам возможность найти аттракторы:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{3,\ j+2}}{a_{3,\ j+1}} = \lim_{j\to\infty} \frac{(5j+11)jF_{j+1} + (5j+12)(j+1)F_j}{(5j+6)(j-1)F_j + (5j+7)jF_{j-1}} = \frac{5\cdot 2\cdot \Phi^2 + 5\cdot 2\cdot \Phi}{5\cdot 2\cdot \Phi + 5\cdot 2} = \Phi\ ;$$

$$\lim_{j\to\infty}\frac{a_{4,\ j+3}}{a_{4,\ j+2}}=\lim_{j\to\infty}\frac{(j+4)(j+2)\left[4jF_{j+1}+3(j+1)F_j\right]}{(j+3)(j+1)\left[4(j-1)F_j+3jF_{j-1}\right]}=$$

$$=\lim_{j\to\infty}\frac{4j(j+4)(j+2)\Phi^2+3(j+1)(j+4)(j+2)\Phi}{4(j+3)(j+1)(j-1)\Phi+3j(j+3)(j+1)}=\frac{4\cdot 3!\cdot\Phi^2+3\cdot 3!\cdot\Phi}{4\cdot 3!\cdot\Phi+3\cdot 3!}=\Phi\,;$$

$$\lim_{j\to\infty}\frac{a_{5,\ j+5}}{a_{5,\ j+4}}=\frac{15\cdot 4!\cdot\Phi^2+10\cdot 4!\cdot\Phi}{15\cdot 4!\cdot\Phi+10\cdot 4!}=\Phi\,.$$

Компьютерные эксперименты подтверждают справедливость подобных соотношений для любой строки матрицы, что позволяет высказать гипотезу (i = 1, 2, ...; k = 1, 2, ...):

$$\lim_{j\to\infty}\frac{a_{i,\ j+k}}{a_{i,\ j}}=\frac{\displaystyle\sum_{n_1+\ldots+n_i=j+k}F_{n_1}\cdots F_{n_i}}{\displaystyle\sum_{m_1+\ldots+m_i=j}F_{m_1}\cdots F_{m_i}}=\Phi^k\,.$$

Просто невероятно! Но сочетание практически бесконечных сумм бесконечного числа сомножителей в виде чисел Фибоначчи дает в результате фиксированную степень ЗС.

Это дает нам основание назвать исследуемые матрицы "золотыми".

Аналогично получению матрицы (табл. 3), если подвинуть первую строку, начав её с пары (1, 2), то значительно изменяются и все нижележащие строки (по сравнению с табл. 5).

В результате получаем следующую матрицу (A055830, A122075)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
2		0	1	3	7	15	30	58	109	201	365
3			0	1	4	12	31	73	162	344	707
4				0	1	5	18	54	145	361	850
5					0	1	6	25	85	255	701
6						0	1	7	33	125	413
7							0	1	8	42	175
8								0	1	9	52
9									0	1	10
10										0	1

Общая комбинаторная формула для её элементов имеет вид

$$a_{i+1,\ j+1}=\sum_{k=1}^{j-i}C_{j-k}^{\,i}\cdot C_{j-i-k+1}^{\,k}\,.$$

Суммы диагональных элементов (справа–налево) равны 2 в степени: $\displaystyle\sum_{i=1}^{j/2}a_{i,\ j-i}=2^{j-2}$.

Например (j = 10), $89+201+162+54+6=256=2^8$.

Диагональ 3, 7, 12, 18, 25, 33, 42 ... представляется рекуррентно и аналитически:

$$a_{n,\ n+2} = a_{n-1,\ n+1} + n + 2 = \frac{n(n+1)}{2} + 2n = \frac{n^2 + 5n}{2}.$$

Диагональ 5, 15, 31, 54, 85, 125 ... (A055831) выражается уравнением

$$a_{n,\ n+3} = \frac{n\left(n^2 + 12n + 17\right)}{6}.$$

Диагональ 8, 30, 73, 145, 255, 413 ... (A055832) описывается соотношением

$$a_{n,\ n+4} = \frac{n(n+1)\left(n^2 + 21n + 74\right)}{24}.$$

Наконец, в пределах ближайшей области ячейки рекурсию можно образовать путем сложения пары левых ячеек и одной верхней, расположенной над основной ячейкой:

$$a_{i\ j} = f_{i\ j} + a_{i-1,\ j}.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2		0	1	3	7	15	30	58	109	201	365
3			0	1	8	24	62	144	315	660	1340
4				0	1	25	88	257	660	1577	3577
5					0	1	89	347	1096	3020	7693
6						0	1	348	1445	4813	13951
7							0	1	1446	6260	21657
8								0	1	6261	27919
9									0	1	27920
10										0	1

Вторая строка здесь повторяет аналогичный ряд базовой матрицы (табл. 1).

Прибавляя к построчной фибоначчиво-построчной сумме пару верхних ячеек, подобно базовой матрице, получаем ещё две разновидности.

$$a_{i\ j} = f_{i\ j} + a_{i-1,\ j-2} + a_{i-1,\ j}.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2		0	1	4	9	20	40	78	147	272	495
3			0	1	11	36	96	230	513	1093	2248
4				0	1	38	146	450	1205	2978	6944
5					0	1	148	637	2136	6201	16486
6						0	1	639	2924	10401	31947
7							0	1	2926	13967	51764
8								0	1	13969	68660
9									0	1	68662
10										0	1

Вторая строчка образует ряд (A023607) с производящей функцией $\dfrac{x(2x+1)}{\left(1-x-x^2\right)^2}$ (L.Smiley, 2001) и комбинаторной формулой $a_{2,\ j+1} = \sum_{k=0}^{j} C_k^{\,j-k}$ (P.Barry, 2004).

Кроме того, выполняется равенство: $a_{2,\ j+1} = jF_{j+1}$.

$$a_{i\ j} = f_{i\ j} + a_{i-1,\ j-1} + a_{i-1,\ j} = f_{i\ j} + f_{i-1,\ j+1}.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2		0	1	4	10	22	45	88	167	310	566
3			0	1	15	48	130	311	696	1484	3056
4				0	1	64	243	748	1998	4926	11464
5					0	1	308	1300	4354	12578	33322
6						0	1	1609	7264	25805	78969
7							0	1	8874	41944	155592
8								0	1	50819	248356
9									0	1	299176
10										0	1

Вторая строка представляет собой последовательность (A004798).

В своем классическом исполнении числа Фибоначчи образуются в результате двучленно-аддитивной рекурсии.

Поэтому вполне естественно расширить предложенный нами подход к построению матриц Фибоначчи с привлечением к основной строке ещё двух предшествующих строк.

Примерные схемы построчного образования матриц Фибоначчи (с двумя дополнительными строками) по строкам i и столбцам j показаны на рис. 2.

Знаком "+" по-прежнему помечены складываемые ячейки с помещением результата на место зеленой клетки "·".

Двухчленная структура здесь имеет двойное объединение:

по двум ячейкам (жёлтым) основной строки и по двум ячейкам (оранжевым) двух дополнительных ближайших строк.

То есть заимствование числового материала идет фактически с трёх уровней.

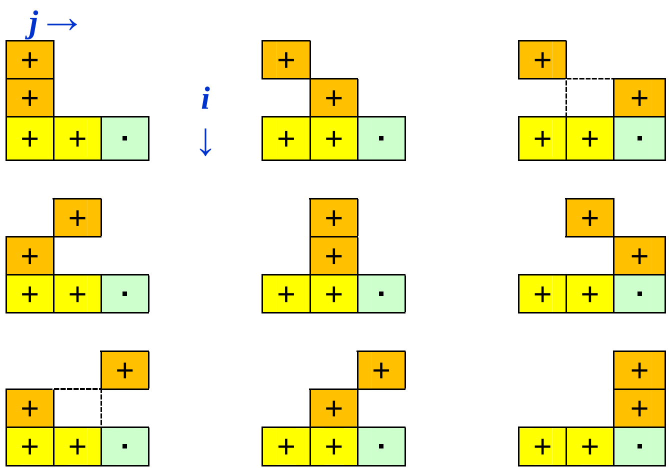

Рис. 1. Мнемосхемы построчного построения матриц Фибоначчи
с двумя дополнительными формообразующими строками

Введение ещё одной формообразующей строки вызывает необходимость добавления (для построения основной строки) ещё одной начальной нулевой строки с индексом "–1".

Хотя её можно и не вырисовывать, условно подразумевая лишь для первой строки.

Отдельные примеры матриц с двумя дополнительными формообразующими строками приведены ниже.

$$a_{i\ j} = f_{i\ j} + a_{i-1,\ j-2} + a_{i-2,\ j-2}\,.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2		0	1	2	4	8	15	28	51	92	164
3			0	1	3	8	18	39	80	160	312
4				0	1	4	12	32	77	176	384
5					0	1	5	18	53	142	352
6						0	1	6	24	80	234
7							0	1	7	32	116
8								0	1	8	40
9									0	1	9
10										0	1

Вторая строка совпадает со второй строкой табл. 4.

$$a_{i\ j} = f_{i\ j} + a_{i-1,\ j-1} + a_{i-2,\ j-1}\,.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2		0	1	2	5	10	20	38	71	130	235
3			0	1	5	14	34	76	161	329	654
4				0	1	11	36	101	251	584	1294
5					0	1	26	97	300	809	2022
6						0	1	63	262	876	2531
7							0	1	161	724	2570
8								0	1	424	2025
9									0	1	1149
10										0	1

Здесь вторая строка совпадает со второй строкой табл. 5.

$$a_{i\ j} = f_{i\ j} + a_{i-1,\ j} + a_{i-2,\ j}\,,$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2		0	1	3	7	15	30	58	109	201	365
3			0	1	11	32	81	184	395	814	1629
4				0	1	48	160	450	1114	2579	5687
5					0	1	242	877	2628	6898	16842
6						0	1	1328	5071	15876	43476
7							0	1	7700	30475	98493
8								0	1	46352	188322
9									0	1	286816
10										0	1

$$a_{i\ j} = f_{i\ j} + a_{i-1,\ j-1} + a_{i-2,\ j-2}\,.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
2		0	1	2	5	10	20	38	71	130	235
3			0	1	4	12	29	66	141	291	583
4				0	1	7	25	71	182	432	976
5					0	1	12	50	162	460	1195
6						0	1	20	96	349	1087
7							0	1	33	180	724
8								0	1	54	331
9									0	1	88
10										0	1

Заключение.

1. Предложены формообразующие структуры числовых "золотых" матриц.

Они содержат в себе отдаленные следы генерации обычных чисел Фибоначчи:

- через суммы пар предшествующих элементов построчно;
- посредством сложения элементов из предшествующих одной или двух строк.

"Золотые" матрицы представляют идеальные структуры суммирующей рекурсии: построчно – по двухчленно-аддитивной схеме Фибоначчи плюс ещё что-то (заимствование) из предшествующих рядов, расположенных в верхних строках матрицы.

Таким образом, числа Фибоначчи, находящиеся в первой строке, пронизывают каждую из матриц.

Некоторые таблицы, так или иначе, описывались в литературе, остальные являются новыми, сохраняя единый подход к рекуррентному структурированию.

2. Отношение двух соседних членов, хоть и очень слабо, но всё-таки сходится построчно к аттрактору в виде золотого сечения.

Сходимость уменьшается по мере увеличения индекса строки i.

Ввиду чрезвычайно медленной сходимости к аттрактору, подобные структуры могут иметь место в организации ряда природных процессов, сильно растянутых во временном факторе. Некоторые из них могут продолжаться по аналогичной схеме и поныне, начиная с момента образования вселенных, так и не достигнув своего идеального (по ЗС) состояния.

3. Само по себе устремление строк матриц к аттрактору ЗС представляет уникальный результат в области золотого сечения.

Он означает, что к золотому сечению сходится не только разностный аналог привычного квадратного уравнения или его инвариант – обобщенное алгебраическое уравнение ЗС [4]. К ЗС могут стремиться и более сложные конструктивные образования в виде многократно сложно-структурированных числовых последовательностей.

А это поднимает теорию ЗС на совершенно новый качественный уровень познания и практической применимости.

Нечто подобное происходило с числом π.

Единожды начавшись с обычного вычисления длины окружности, эта математическая константа сегодня проникла в самые разные области науки или разделы математики.

Литература.

1. *Goonatilake S.* Toward a global science: mining civilizational knowledge. – Bloomington: Indiana University Press, 1998. – 318 p.

2. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 5-е изд. – М.: Наука, 1984. – 144 с.

3. *Кузьмин О.В.* Обобщения чисел Фибоначчи и Трибоначчи // Оптимизация, управление, интеллект. – 2000. – № 4. – С. 188–198.

4. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.