С.Л. Василенко

Кролики в год кролика
или вечная жизнь по золотому сечению

«*Сеющий в плоть свою от плоти пожнет тление, а сеющий в дух от духа пожнет жизнь вечную*» (Гал.6:7-8)

В математике давно "прописались" числа, носящие имя Фибоначчи, – элементы рекуррентной последовательности (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 ...), в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих, начиная с исходной пары (0, 1).

Эти числа были хорошо известны ещё в Южной Азии [1, с. 126], в частности, древней Индии, где они применялись в метрических науках за много веков до того, как впервые появились в Европе с известной задачей о размножении кроликов.

Так что "ушастая тема" была придумана математиком Фибоначчи уже на готовом числовом материале из Азии, скорее всего почерпанном из уст "купеческого информационного агентства", более других приобщенного к таинствам натурального счёта.

Хотя в смысле жизненности биологической популяции кроликов задача получилась, мягко говоря, несообразной.

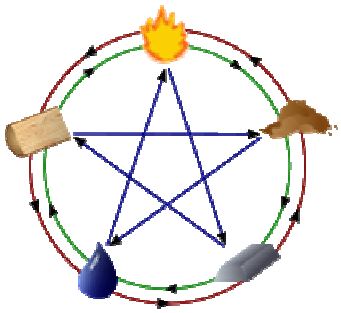
Кролики до своего репродуктивного возраста слишком уж быстро не растут. Потомство у них всегда больше двух. Длинноухие животные вечно не живут и т.п.

Но тем впечатлительнее вычислительные аспекты задачи, переводящие более-менее реальные вещи в абстрактно-отвлеченную математическую плоскость.

Мы уже обращались к данной тематике [2]. Так, если условно рассаживать животных, например, по схеме: кролик–анфас – 1 и кролик–профиль (вид с боку) – 2, то можно выстраивать разнообразные двоичные последовательности, наподобие костяшек обычного домино. Примечательно, но представление натуральных чисел путем различных вариантов суммирующей сборки из 1 и 2 (положений кроликов) описывается числами Фибоначчи.

Соответственно отношение вариантов аддитивной сборки двух соседних натуральных чисел в виде последовательности единиц и двоек стремится к числу золотого сечения (ЗС).

Продолжим начатую тему, но уже больше в зодиакальной кроличьей интерпретации. Так сказать, отдавая дань древнему восточному численнику[1].



Китайский лунный календарь исчисляется с 2637 г. до нашей эры и основан на точных астрономических наблюдениях долготы Солнца и фаз Луны. Начинается в январе–феврале в день второго новолуния после зимнего солнцестояния.

Каждый год проходит под знаком одного из 12 животных (послушников Будды) и 5 стихий, каждой из которых присущ свой цвет: Металл-0-1 – белый, Вода-2-3 – синий или черный, Дерево-4-5 – зелёный, Огонь-6-7 – красный, Земля-8-9 – желтый.

Полный цикл такого календаря составляет 60 лет. 2011 год начнется 2 февраля и станет 28-м годом 78-го цикла.

Числа стихий соответствуют последней цифре номера исчисляемого года.

Новолуние совпадает с моментом, когда Луна полностью "темная", а не появляется полумесяцем, как в мусульманском и еврейском календарях.

Дата новолуния – первый день нового месяца.

---

[1] Китайский гороскоп // Википедия. – 02.01.2011. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=30673487.

Один из 12. В третьем тысячелетии 2011 г. – первый год кролика, да ещё и белого.

Более того, это единственный уникальный год в истории человечества, который начинается символическим размножением пары (2) кроликов по числам Фибоначчи 0 1 1 …

Можно сказать, 2011 год символизирует феерическую математическую конструкцию:

2 кролика по схеме Фибоначчи (0, 1, 1 ...) = 2011 г.

Об этом стоит поговорить чуть подробнее. Исходя из того, что кролики являются одним из 12 знаков Зодиака[2] в китайском календаре.

Вообще 12 стало символом восточного календаря вовсе не случайно.

Оказывается, числа 12 и 24 играют центральную роль и в математике благодаря целой серии многих дивных "совпадений", которые только сегодня начинают постигаться учеными в полной мере [3].

Феномен 24 частично исследован в работе [4]. Рассмотрим несколько детальнее отдельные удивительные свойства числа 12.

Двенадцатеричная система счисления – одна из наиболее удобных систем: основание не слишком велико и одновременно имеет большое число делителей (2, 3, 4, 6), в то время как 10 имеет только два основных делителя: 2 и 5.

Она возникла в древнем Шумере, предположительно исходя из количества фаланг пальцев на руке при подсчёте их большим пальцем той же руки. Фаланги пальцев использовались как простейшие счёты вместо загибания пальцев, принятого в Европе [5].

Высока вероятность того, что если бы человек вводил систему счислению сегодня, то наверняка "победила" бы 12-ричная система. – В ней можно считать не только двойками, но также тройками, четверками и шестерками.

Именно поэтому 12 – первое избыточное число n (сумма положительных делителей /отличных от n/ которого превышает n: 1+2+3+4+6 = 16 > 12). А вот у 10 только два нетривиальных делителя: два и пять.

Дж.Н.Манси доказал (1913), что наименьший магический квадрат из последовательных нечетных простых чисел должен иметь порядок 12.

Контактное число τ_n – наибольшее число непересекающихся и одинакового радиуса сфер в R^n, которые одновременно касаются еще одной сферы того же радиуса[3].

В обычном евклидовом пространстве $\tau_3 = 12$.

В теории музыки – 2·12 тональности, в греческом алфавите – 2·12 буквы, частота смены кадров в кинематографе – 2·12 кадра в секунду.

12 – наименьшее избыточное число (12, 18, 20, 24…) – натуральное n, сумма положительных делителей (отличных от n) которого превышает n.

12 – периметр классического египетского треугольника со сторонами $3:4:5$ $(3+4+5=12)$.

Существует ровно 12 типов многогранников с 12 ребрами.

Октава делится на 12 полутонов, в том числе 7 нот и 5 диезов. То есть 12 не делиться без остатка на 5 и 7, но сумма 5 + 7 = 12.

Единственным нетривиальным (не равным 0 или 1) квадратом среди чисел-кроликов Фибоначчи является 12-е число, равное $144 = 12^2$.

Так что кролик в 12-элементном множестве зодиакальных животных не случаен.

---

[2] Зодиак (зодиакальный круг) – пояс на небесной сфере, который простирается на 9° в обе стороны от солнечной эклиптики и по которому проходят видимые пути солнца, луны и планет. Со времён древнего Вавилона, Зодиак принято делить на 12 равных частей из 30° дуг.

[3] Другое определение: *контактное ч.* – наибольшее число точек, которые можно расположить на единичной сфере S^{n-1} в R^n так, чтобы угловое расстояние между любыми двумя из них было $\geq 60^\circ$.

Отправные предпосылки. Решение исходной задачи Фибоначчи (в его формулировке) описывается рекуррентным уравнением $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ с эквивалентно-характеристическим алгебраическим уравнением $x^2 = x + 1$.

В качестве единицы измерения выступают пары кроликов f_n в дискретные моменты времени n – месяцы.

Здесь важны два начальных момента:

– взрослая пара кроликов ежемесячно приносит одну пару приплода, – слагаемое f_{n-1}.

– новорожденная пара месяц взрослеет, и ещё через месяц также рождает пару кроликов, то есть даёт потомство через два месяца, – слагаемое f_{n-2}.

В итоге популяция кроликов в замкнутом изолированном пространстве описывается замечательной двучленно-аддитивной рекурсией $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, которая легла в основу теории разностных (возвратных) уравнений [6] вместе с арифметической прогрессией и др.

Более того, своим решением она оказалась связанной с замечательной математической константой – числом золотого сечения (ЗС) $\Phi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2 \approx 1{,}618$ – положительным корнем квадратного уравнения $x^2 = x + 1$. При этом $\phi = \left(\sqrt{5}-1\right)/2 = \Phi^{-1} \approx 0{,}618$.

Структурно данная математическая форма отличается минимально возможной простотой в классе аддитивных конструкций, имея принципиальные отличительные особенности в правой формообразующей части [4]:

– два слагаемых как наименьшая совокупность, – меньше просто не бывает;

– два рядом стоящих дискретных момента времени с минимальными запаздываниями;

– два целочисленных единичных коэффициента.

Другими словами, налицо три пары "минимальных возможностей".

Разбор полётов. Простой анализ несложной задачи позволяет сделать несколько замечаний общего характера.

a) Количество рождаемых кроликов может быть больше одной пары, поэтому коэффициенты у слагаемых не обязательно равны единице.

b) Период созревания, непременно равный одному месяцу в исходной постановке, также может быть изменён в сторону увеличения. А это значит, что индекс второго слагаемого уменьшается: $f_{n-2} \Rightarrow f_{n-k}$, $k \geq 1$.

c) Взрослая пара, например, может делать перерывы между соседними окролами. Так сказать отдыхать с зарядкой сил, и приносить приплод только один раз в два или три месяца. Тогда первое слагаемое, конечно, изменится: $f_{n-1} \Rightarrow f_{n-r}$, где $r = 2, 3, \ldots$

Естественно, что на эту величину в данном случае должен быть скорректирован и индекс для молодой пары, которая со временем становится взрослой.

d) Незамысловатая по форме модель Фибоначчи уводит нас в бесконечность не только во времени, но и относительно моделируемой переменной. Напрашивается аллегория, если б так и было, то давно уже кролики заполнили всю Вселенную.

На самом деле подобное не происходит, поскольку в реальных условиях еще работает система ограничений и лимитирующих факторов.

В частности, кролики не вечны, поэтому в модели можно учесть процесс их естественного или принудительного выбывания. Пространство становится разомкнутым.

Математически это означает добавление третьего слагаемого, но с отрицательным знаком, и индексом, соответствующим времени жизни s взрослой пары <особей>:

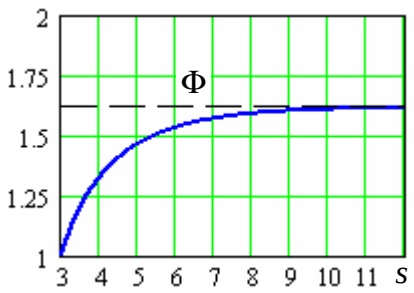


Рис.1. Вечная жизнь по ЗС,
$x^s = x^{s-1} + x^{s-2} - 1,\ s \to \infty$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} - f_{n-s}\,. \qquad (1)$$

Понятно, что при $s = 2$ у нас нет никакого расширенного воспроизводства, и всё разведение сводится к одной обновляемой паре.

Если $s \to \infty$, возвращаемся к исходной модели. Так сказать, вечной жизни по ЗС.

Алгебраически ограничение жизни приводит к уравнению (рис. 1)

$$x^s = x^{s-1} + x^{s-2} - 1.$$

Естественным образом улетучивается и золотое сечение.

Квадратное уравнение. Далее рассмотрим квадратное уравнение общего вида.

Оно расширяет задачу о кроликах в направлении количества потомства:

$$f_n = mf_{n-1} + qf_{n-2}, \qquad x^2 = mx + q\,. \qquad (2)$$

Соотношения (2) означают, что каждая взрослая семья дает ежемесячно m пар приплода, а молодая семья – сначала q пар, а потом, уже став взрослой, переходит на m пар. – Эдакий, "первый блин комом".

При $m = q$ получаем первоначальную схему Фибоначчи, только с условием рождения не одной, а m пар кроликов, что в целом ближе к реальной жизни.

Следовательно, иные условия порождают другое решение.

Что же мы тогда обобщаем?

Не трудно понять очевидное, что здесь расширяется сама задача (о кроликах), а не её первоначальное числовое решение в виде ЗС.

В результате получаются обобщенные последовательности Фибоначчи, уже не имеющие ничего общего с золотым сечением, но обладающие собственными аттракторами в виде предела отношения между соседними членами числового ряда.

Итак, физический смысл (в кроличьей трактовке) сводится к тому, что коэффициенты дают нам приплод (в парах), а временные задержки – периоды между очередными окролами! Для молодых такой период равен продолжительности взросления и вынашивания потомства.

Мы обобщаем задачу (о ЗС), а не её конкретный результат в виде ЗС!

В итоге получается не обобщенное золотое сечение, а обобщение задачи о ЗС.

В переводе на геометрическую интерпретацию получаем обобщенное деление единичного отрезка в соотношении, удовлетворяющем пропорции, вытекающей из их квадратного уравнения (рис. 2) в виде сопоставления частей линейного отрезка.

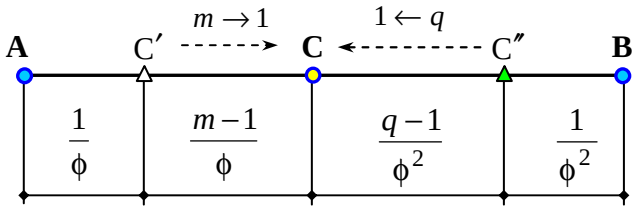


Рис. 2. Деление отрезка AB "квадратичным" сечением: $m \ge 1,\ q \ge 1$

В общем случае $\boldsymbol{m \ge 1,\ q \ge 1}$ имеем (рис. 3)

$$\phi = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}/m} = \frac{\mathrm{AC}/m}{\mathrm{CB}/q} = \frac{\mathrm{AC}'}{\mathrm{C}''\mathrm{B}} \qquad \text{или} \qquad \phi = \frac{\mathrm{AC}+\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}/m} = m + \frac{1}{\frac{\mathrm{AC}/m}{\mathrm{CB}}} = m + \frac{q}{\phi}.$$

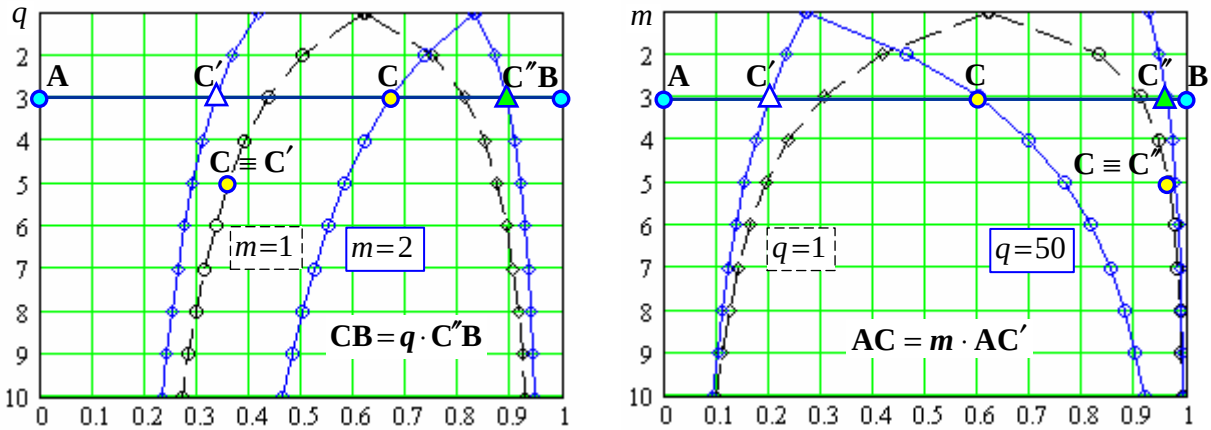


Рис. 3. Иллюстрация обобщенных mq-"квадратичных" сечений

Отрезок $\mathrm{C}'\mathrm{C}'' = \frac{m-1}{\phi} + \frac{q-1}{\phi^2}$ при $m, q \to 1$ "стягивается" в точку C, вырождаясь в золотое сечение с числом $\Phi = \phi^{-1}$.

Таким образом, параметр q "отвечает" за пропорциональное уменьшение меньшей ($\mathrm{CB} \to \mathrm{C}''\mathrm{B} = \mathrm{CB}/q$) или соответствующее увеличение большей части целого, а параметр m – за уменьшение его большей части ($\mathrm{AC} \to \mathrm{AC}' = \mathrm{AC}/m$) или увеличение меньшей.

Возвращаясь к кроликам, можно провести паралель между их эволюцией и соотношением частей целого орезка. Так, "отвечая" за пропорциональное уменьшение меньшей части или увеличение большей части целого, параметр q олицетворяет развитие за счёт молодой части популяции (её взросления).

Числа Падована. Это рекуррентный ряд $p_n = p_{n-2} + p_{n-3}$, $(p_0, p_1, p_2) = (0, 0, 1)$ – прообраза Фибоначчи, только с запаздыванием на один шаг (A000931[4]). По отношению к кроликам можно интерпретировать как месячный отдых между очередными рождениями потомства, или увеличение периода вынашивания на один месяц.

Алгебраическое характеристическое уравнение имеет вид $x^3 = x + 1$. Его действительное решение известно как пластиковая константа, равная $P = \frac{\sqrt[3]{9-\sqrt{69}} + \sqrt[3]{9+\sqrt{69}}}{\sqrt[3]{18}} = \frac{c}{6} + \frac{2}{c} \approx 1{,}3247$, где $c = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{69}}$ или в виде бесконечно вложенного радикала $P = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \ldots}}}$.

К этому числу стремится отношение соседних членов ряда $P = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n}$.

Вид рекурсии может быть изменен к форме ближайших элементов p_{n+1} и p_n: с характеристическим уравнением $x^5 = x^4 + 1$.

[4] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://www.research.att.com/~njas/sequences.

Действительно:

$$p_n = p_{n-2} + p_{n-3} = (p_{n-4} + p_{n-5}) + p_{n-3} = (p_{n-3} + p_{n-4}) + p_{n-5} = p_{n-1} + p_{n-5}.$$

Или в алгебраической форме:

$$x^3 = x+1, \quad x^4 = x^2 + x \quad \Rightarrow \quad x^5 = x^3 + x^2 = x+1+x^2 = (x^2+x)+1 = x^4+1.$$

С переходом на кроликов здесь возможна ещё одна интерпретация.

Новая рекурсия означает, что молодое поколение проходит более длительный период полового созревания.

Теперь первое потомство у молодой пары появляется не через два месяца, как в классической задаче Фибоначчи, а только через пять месяцев после своего рождения (4 – на взросление плюс 1 – на вынашивание).

С новой считалочкой: «Раз, да, три, четыре, пять», – кролику пора гулять.

Обобщенные *p*-сечения. Здесь мы, по сути, расширяем предыдущую задачу на произвольную натуральную степень:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-p}, \qquad x^p = x^{p-1} + 1. \tag{3}$$

Впервые эта рекуррентная форма представлена математиком Д.Пойа как "уравнение в *конечных разностях*" [7, с. 114, с. 393], о чем подробно описано в статье [8].

Её решения, ради амбициозного привлечения внимания к некоторым разработкам "золотой" тематики, иногда ошибочно называют «обобщенными золотыми сечениями» (?).

Однако подобная терминология в корне неправильна, поскольку математические константы не обобщаются.

Золотое сечение уникально и единственно. Хотя сама кроличья задача обобщается.

И бакалавр философии М.Гарднер (1914–2010), которого пытаются представить [9] в роли адвоката (якобы он единожды назвал процедуру получения последовательностей *m*-боначчи обобщением Ф), здесь не может быть выразителем авторитетного мнения. Ибо в его вольном изложении это не научная терминология, а свободно-художественный образный стиль изложения. Да и знаменит он совершенно другим, а именно как выдающийся популяризатор увлекательнейших математических головоломок и развлечений, новелл и загадок, ребусов, фокусов, комиксов и т.п.

Достижение репродуктивного возраста по (3) теперь вариабельно: новорожденные кролики даю первое потомство через p месяцев: $p-1$ на взросление и 1 – на вынашивание.

В общем случае алгебраическое уравнение (3) не имеет аналитического решения и его положительный корень (аттрактор последовательности) определяется численными методами.

Аналогично (1) в модели (3) можно учесть процесс естественного или принудительного выбывания старых кроликов за счет введения дополнительного отрицательного слагаемого.

***X*-фактор актуализации бесконечности.** Числа Фибоначчи образуют потенциально бесконечную последовательность в том смысле, что она может быть неограниченно увеличена. Подобно тому, как в геометрии Евклида постулируется не бесконечность длины прямой линии, а всего лишь то, что прямая может быть непрерывно продолжена.

Вся бесконечная прямая "генерирует" актуальную бесконечность.

Велико желание как-то зафиксировать разумно-приемлемый размер числового ряда. И здесь на помощь могут прийти соотношения больших и малых физических величин [10].

Оказывается, разные осмысленные комбинации многих атомных и космологических констант дают удивительно одинаковый безразмерный масштаб порядка 10^{40}.

На основании этого английский физик-теоретик Поль Дирак сформулировал (1937) «гипотезу больших чисел»[5], согласно которой чрезвычайно большие числа (например, отношение констант электромагнитного и гравитационного взаимодействий двух частиц), возникающие в теории, должны быть связаны с возрастом Вселенной, выражаемым также огромным числом.

Поскольку числа Фибоначчи начинаются с двух единиц, то есть смысл провести намеченную условную линию на уровне 40-значных чисел:

F_{190} = 2281217241465037496128651402858212007295;

F_{191} = 3691087032412706639440686994833808526209;

F_{192} = 5972304273877744135569338397692020533504;

F_{193} = 9663391306290450775010025392525829059713.

Примечательно, что здесь 191, 193 – простые числа-близнецы (пара простых чисел, отличающихся на 2), а величина $192 = 2^6 \cdot 3$.

Отношение F_{192}/F_{191} обеспечивает 80 точных значащих цифр золотого сечения.

Правда, сами числа Фибоначчи в этом диапазоне не являются простыми.

Да и вообще это довольно большая редкость: соответствующие индексы приведены в последовательности A001605. При этом выполняется замечательное свойство: если число Фибоначчи простое, то и его индекс (порядковый номер) – тоже простое число.

Известны следующие близнецовые пары Фибоначчи, у которых индексы каждой пары отличаются на 2, а соответствующие числа Фибоначчи – оба простые (A073340):

(5, 7) – (11, 13) – (431, 433) – (569, 571).

В последней паре числа Фибоначчи имеют 119 цифр.

Вместо заключения. Итак, продемонстрировано несколько несложных обобщений задачи о кроликах Фибоначчи, и на кроличьем языке описано физическое содержание соответствующих параметров разностных уравнений: коэффициентов, величин запаздывания, алгебраических знаков.

Решение в виде строгого значения ЗС получается в одном-единственном случае, описываемым самым простым "единичным" квадратным трёхчленом $x^2 - x - 1$.

Введение дополнительных слагаемых, учитывающих старение-умирание взрослых особей, приводят к решениям, отличным от ЗС. Причем эта разница в сторону уменьшения тем больше, чем меньше продолжительность жизни.

В идеале, так сказать вечной жизни, мы приходим к безупречному решению в виде ЗС.

То есть де-факто имеем дважды приближённую модель.

С одной стороны, ЗС образуется при устремлении числа итераций к бесконечности.

С другой стороны, продолжительность жизни ушастых персонажей также должна быть сколь угодно большой.

Так что получаем некое нежизненное ЗС в вечной жизни.

Возможно, поэтому в китайской литературе *кролик обычно изображается толкущим в ступе эликсир бессмертия*.

Не случайно большие системы, достигая идеального структурирования согласно ЗС, расположены к саморазрушению, поскольку ничего не остаётся на системные связи.

Достигнув совершенства, объект рассыпается.

Именно поэтому идеал недостижим. Подобное действо стало подвластно лишь одному Богу. После чего он выбыл из того, что мы привычно понимаем под реальным временем.

---

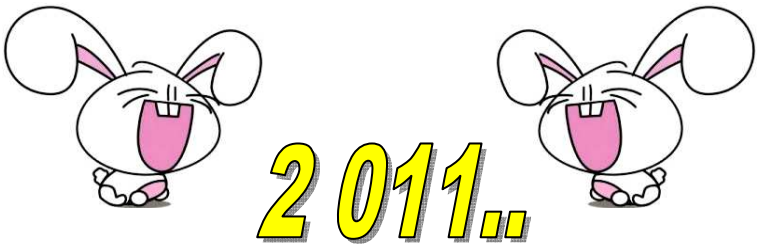
[5] Дирак, Поль Адриен Морис // Википедия. – 06.11.2010. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=29159335.

А вечная жизнь самоидентифицируется путем передачи эстафеты-информации по цепочке схожих объектов. – «Всё живое – от живого» (принцип Реди).

При этом смерть, как элемент реальной жизни, фактически выпадает из контекста вечной жизни. То есть жизнь исключает смерть из поля своей предикации. И если жизнь – вечность, то смерть – время или константа преходящего значения (В.Вернадский).

«Да будет так» (Иер. 28:6) ...

Литература:

1. *Goonatilake S*. Toward a global science: mining civilizational knowledge. – Bloomington: Indiana University Press, 1998. – 318 p.
2. *Василенко С.Л.* Кролики Фибоначчи на Великой китайской стене // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16102, 08.10.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161710.htm.
3. 24 (number). From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/24_(number).
4. *Василенко С.Л.* Периодические структуры на циферблате Фибоначчи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15998, 14.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161676.htm.
5. *Двенадцатеричное* устройство мира. – http://ustierechi.ucoz.ru/publ/14-1-0-327.
6. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.
7. *Пойа Д.* Математическое открытие: Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 452 с.
8. *Василенко С.Л.* В поисках золотника // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15629, 03.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161569.htm.
9. *Мартыненко Г.Я.* Математика гармонии: Новейшее время – XX век, 1900–1985 гг. // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16262, 03.01.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321107.htm.
10. *Сухонос С.И.* Структура пустоты. Часть II. Масштабные парадоксы законов природы // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16263, 03.01.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0209/004a/02091037.htm.

© ВаСиЛенко, 2011