Ерохов И.В.

В ПОИСКАХ СМЫСЛА ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Введение. В работе [1] приведена наглядная трактовка следующего утверждения из второй книги «Начал» Евклида:

Первая форма связана с отношением и равенством площадей [2, с. 75]:
Предложение 2.11. Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.
/в нумерации 2.11 первое число означает 2-ю книгу "Начал", другое – 11-е предложение/

Анализируя данное положение и стараясь понять написанное буквально, в статье приходят к замечательной геометрической трактовке, приведенной на рис.1.

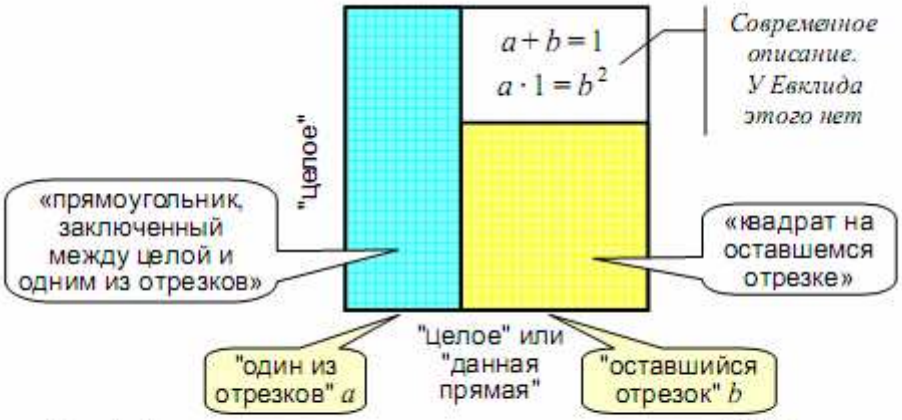

Рис. 1. Геометрическая интерпретация предложения 2.11 Евклида:
«данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке»

Копия иллюстрации, которая графическими средствами передает содержание ***Предложения*** 2.11, возвращает нас мысленно в те времена, когда звание «геометр» означало «землемер».

С позиций землемера. Из археологических данных и исторических фактов, которые известны нам только по научно-популярной литературе, мы достаточно хорошо представляем, какими инструментами располагали древние землемеры. В их распоряжении были шнуры (веревки) и вешки (колышки), которыми до сих пор отмечают на земле определенные точки «хода луча» теодолита. Кроме того, в их распоряжении был прибор, аналогичный современному «эталону» длины – сажени (2,13 м.). С помощью таких простых инструментов проводилось выделение земляных наделов «в натуре», сегодня это делается с применением более совершенной техники.

Прямой угол делянки древние землемеры формировали с помощью прямоугольного треугольника, у которого стороны были пропорциональны величинам 3, 4, 5. Треугольник создавался следующим образом: мерные отрезки отмечались на шнуре узлами, а концы шнура связывались. В узлы вставляли вешки и три человека растягивали на земле треугольник так, чтобы его стороны не провисали. После достижения такого положения вешками отмечали вершины треугольника. Эту задачу на построение можно повторить даже сегодня, поэтому есть уверенность, что мы правильно понимаем приемы землемеров далекого прошлого. Без сомнения, теорема Пифагора землемерам была известна.

Земельный надел выделяли «в натуре», прокладывая межу по направлению установленных вешек. Прямой угол можно было располагать на земле любым образом, следовательно, землеустроители тех времен были в состоянии формировать как прямоугольные, так и квадратные делянки. Более сложные линии выполнялись с помощью своеобразного «циркуля», который легко реализовывался с помощи шнура, у которого один конец закреплен. Окружность или дугу чертили на земле вешкой, закрепленной на свободном конце «веревочного» радиуса. Итак, учет земли (урожая) – важнейшая функция власти – был достаточно хорошо обеспечен инструментами, землемеры без работы не сидели.

Теперь давайте посмотрим на рис.1 глазами землемера времен Евклида. Допустим, что прямоугольник со сторонами b, (1- b) не интересен для сельскохозяйственного производства, а оставшуюся полезную площадь надо разделить поровну между двумя хозяевами. Для этой цели строились квадрат и прямоугольник, рис.1. Именно, случай деления оставшейся земли на «равновеликие» фигуры Евклид запечатлел в утверждении 2.11, доведя его до математического совершенства. В работе [1] подчеркивается, что великий геометр-математик не упоминал о неравенстве отрезков по длине, оставляя потомкам право изменять этот размер. Поэтому автор статьи не замедлил воспользоваться предложением, что видно из копии рис.2.

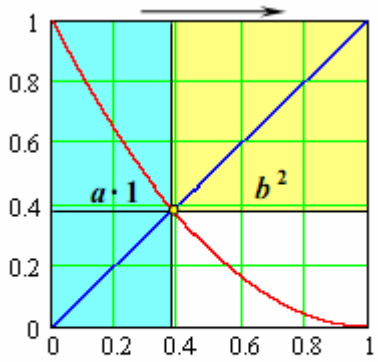

Рис. 2. Графическое решение: прямоугольник растет линейно, квадрат b^2 уменьшается "квадратично", по параболе

Графики, представленные на рис.2, выполнены в координатах, которые используются сегодня при выполнении номограмм. Возможно, что аналоги современной номограммы были в ходу у древних землемеров, что позволяло им разбивать произвольный квадрат на фигуры (прямоугольник и квадрат), с любым соотношением площадей. Действительно, сегодня легко составить таблицу, приведенную ниже:

Таблица 1.

$\frac{x^2}{1-x}$, относит. вел. площади	Длина отрезка x	$\frac{1-x}{x^2}$, относит. вел. площади	Длина отрезка x
1	0,61803	1	0,61803
1,1	0,63427	1,1	0,60172
1,2	0,64899	1,2	0,58679
1,3	0,66244	1,3	0,57306
1,4	0,67477	1,4	0,56037
1,5	0,68614	1,5	0,54858

Пусть в древности таких вычислений не делали, но, без сомнения, могли переносить длину отрезка x с «номограммы» в натуру. Допустим, что длину отрезка x представляли некоторые реальные физические объекты, например, стержни, посохи. С помощью древнего прибора, который и сегодня известен архитекторам, строителям, скульпторам, «сохраняемый размер» можно увеличить в заданное число раз. Даже традиционный измерительный прибор землеустроителя (сажень) можно реконструировать так, чтобы он превратился в «эталонный набор» отрезков разной длины. Для этого достаточно менять стержень, который фиксирует раствор этого своеобразного «циркуля». Недаром в русском языке сохранились другие названия мер длины: маховая сажень (1,76 м.), косая сажень (2,48 м.).

Может быть, великий геометр хорошо знал приемы древних землемеров и не собирался описывать их для потомков. Его занимала математическая суть случая особого деления квадрата. Алгоритм получения двух фигур «внутри» исходного квадрата он посчитал важным для геометрии. Это уже потом ученые связали случай построения равновеликих фигур с величиной замечательного числа – **«золотого сечения»**.

Таким представляется «**физический**» смысл предложения 2.11, помещенного Евклидом в свою книгу «Начал».

Математическая трактовка. Другое утверждение, которое имеет большое значение для исследователей «золотого сечения», процитируем по той же статье [1]:

Определение 3.6. Говорится, что прямая делится в *крайнем и среднем отношении*, если как целая к большему отрезку, так и больший отрезок меньшему [2, с. 173].

Определение, понятое буквально, позволяет записать следующую пропорцию (в обозначениях рис.1):

$$\frac{a+b}{b}=\frac{b}{a}. \qquad (1)$$

Любую пропорцию Евклид рассматривал как соотношение размеров отрезков, а не чисел, которыми могут быть представлены их длины.

Перейдем в выражении (1) к обозначениям рис.2. Тогда отрезок $(a+b)$ следует приравнять единице («целое»), отрезок b («оставшийся») – иксу, а другой отрезок («один из») – разности этих двух. После такой подстановки пропорция (1) примет знакомый вид:

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}, \qquad (2)$$

откуда следует уравнение

$$x^2+x-1=0 \qquad (3)$$

с замечательными значениями корней:

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \qquad (4)$$

Отметим, что простое разрешение пропорции (2) дает нам равенство:

$$x^2=1(1-x), \qquad (!)$$

которое «физически» трактуется как условие «равновеликих» квадрата и прямоугольника.

Итак, общая вершина квадрата и прямоугольника делит отрезок (0-1) на две части, рис.2:

$$x=0,618...;(1-x)=0,382... \qquad (5)$$

Длины отрезков представляются иррациональными числами, что на языке **геометрии** означает – несоизмеримыми отрезками. Однако, именно, соотношение их длин дает замечательное число Φ – золотое сечение:

$$\frac{0,618}{0,382}=1,6178...$$

Несоизмеримость величин была открыта еще пифагорейцами, адепты этой школы во всем хотели видеть число. Однако Евклид не сопоставлял с числом даже соотношение отрезков, а поэтому предложил алгоритм бесконечного деления их размеров [2, с.20]. Алгоритм Евклида дает возможность получать непрерывные дроби [3, 4], поэтому представление золотого сечения в виде непрерывной дроби выглядит совершенно естественным:

$$\Phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}\ . \qquad (6)$$

Отметим, что выражение (6) можно получить формально при делении (по алгоритму Евклида) двух соседних членов ряда Фибоначчи. Однако полученная таким образом дробь (6) медленно сходится к числу-пределу. **Технический пример**. Выражение (6) может быть получено и как результат описания реального физического объекта, лестничной схемы – такой структурой обладает достаточно распространенный в радиотехнике электрический фильтр [5]. Задача получения специфического представления одной из функций этой электрической цепи возникла как сугубо прикладная. При включении фильтра в любую схему инженеру необходимо знать его входное сопротивление. Немецкий электротехник W.Cauer предложил представление входного сопротивления фильтра в виде непрерывной дроби, получившей название формы Кауэра.

Алгоритм получения формы аналогичен алгоритму Евклида, в чем можно убедиться, например, статья [5] . Отметим только, что на каждом этапе деления реальных переменных (напряжения и тока) применяется один из законов Кирхгофа, что позволяет продолжить процедуру деления. Структура уравнений главных законов теории электрических цепей в данном случае очень похожа на структуру формулы для получения очередного члена ряда Фибоначчи. Конечно, в данном случае сходство формул обусловлено особенностями схемы соединений элементов лестничной схемы в электрическую цепь.

Итак, входное сопротивление лестничной схемы в виде непрерывной дроби имеет вид:

$$\underline{Z}_{\hat{a}\tilde{o}}=\underline{Z}_1+\cfrac{1}{\underline{Y}_2+\cfrac{1}{\underline{Z}_3+\cfrac{1}{\underline{Y}_4+...}}}\ , \qquad (7)$$

где $\underline{Z}_k,\underline{Y}_k$ - импеданс и адмитанс соответствующих ветвей схемы.

Допустим, что все параметры лестничной схемы численно равны:

$$\underline{Z}_1=\frac{1}{\underline{Y}_2}=\underline{Z}_3=\frac{1}{\underline{Y}_4}=...=1, \qquad (8)$$

тогда выражение (7) принимает вид (6):

$$\Phi^{(6)} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}} = 1{,}625 \quad . \qquad (9)$$

Индекс 6 в формуле (9) означает число ветвей лестничной схемы. Простая цепная дробь (9) является некоторым приближением к числу $\Phi = 1{,}618...$, известному в математике как ***золотое*** (***греческое) сечение***.

Выражение (7) описывает реальный физический объект, равенство параметров ветвей (8) является единственным, которое физически оправданно. Все это позволяет нам трактовать непрерывную дробь (9) как запись **структуры** схемной функции лестничной схемы – входного сопротивления.

Таким образом, число Φ можно трактовать как индекс (характеристическое число) **структуры** конкретной схемы.

Новое представление величины «золотого» сечения. Заметим, что «физическая» трактовка замечательного числа в теории электрических цепей и в задаче землеустройства весьма сходны. Там золотое сечение (точнее Φ^{-1}) соответствует факту равенства построенных фигур, т.е. служит символом особого деления исходного квадрата. А в теории электрических цепей число Φ является признаком структуры схемы особого вида. Интересно отметить, что как только структура (9) «наполняется» параметрами элементов лестничной схемы (7), ее сходимость значительно улучшается.

Этот факт был обнаружен при формальном преобразовании формулы (4), в которую было введено представление радикала в виде непрерывной дроби [6]:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + ...}}} \quad . \qquad (10)$$

Структура выражения (10) аналогична структуре (6), однако эта дробь проявляет значительно лучшую сходимость к пределу, иррациональному числу. Достаточно оставить всего несколько верхних этажей бесконечной дроби (10), чтобы после вычислений получить хорошее приближение к значению корня из пяти:

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + ...}}}, \quad . \qquad (11)$$

$$1{,}1180339 = 1{,}11805555$$

Как видно из (11), приближающая дробь, которой оставлены только три верхних этажа бесконечной дроби, дает вполне хорошее приближение результата. В левой части равенства (11) приведено число, полученное при вычислении $\frac{\sqrt{5}}{2}$ с помощью калькулятора, а в правой части – результат, полученный при сворачивании подходящей дроби.

Итак, подставляем в равенство (4) представление радикала в виде непрерывной дроби:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}=\frac{-1\pm 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}{2}. \qquad (12)$$

Только отрицательный корень уравнения (3) равен по модулю числу Φ, поэтому произведем некоторую коррекцию выражения (12) и разделим дробь на 2. В результате получим представление золотого сечения в виде дроби, отличной от (6):

$$\Phi=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{3}{2}+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\ldots}}}. \qquad (13)$$

В справедливости равенства (13) может убедиться каждый, кто «свернет» эту дробь до числа.

Легко заметить, что выражение (13) содержит только числа из ряда Фибоначчи. В работе [6] приведены выражения для численного значения золотого сечения, которые содержат непрерывные дроби с участием других членов этого ряда. Приведем только общие формулы (после проведения операции деления), где используются не числа, а символы членов ряда Фибоначчи:

$$\Phi=\frac{F_{2k}}{F_{2k-1}}+\cfrac{1}{(F_{2k}+F_{2k-2})F_{2k-1}+\cfrac{1}{\cfrac{(F_{2k}+F_{2k-2})}{F_{2k-1}}+\ldots}}, \qquad (14)$$

$$\Phi=\frac{F_{2k+1}}{F_{2k}}-\cfrac{1}{(F_{2k+1}+F_{2k-1})F_{2k}-\cfrac{1}{\cfrac{(F_{2k+1}+F_{2k-1})}{F_{2k}}-\ldots}}, \qquad (15)$$

Итак, представление величины золотого сечения (14), (15) состоит из двух слагаемых, первое из которых является некоторым приближением результата, а второе соответствует погрешности этого результата.

Известно, что значение величины, представленной бесконечной цепной дробью, можно узнать только с определенной точностью [3], [4]. Для этого дробь заменяют последовательностью приближающих дробей с возрастающим числом этажей. Значения ряда приближающих дробей стремятся к пределу, который никогда не достигается, так как ряд приближающих дробей бесконечен. Приближающие дроби характеризуются числом этажей, кроме того, очень важно четным или нечетным является это число.

Доказана теорема сходимости значений приближающих дробей к пределу [3]:

Значение сходящейся бесконечной дроби больше любой подходящей дроби четного порядка и меньше любой подходящей дроби нечетного порядка.

Таким образом, значения подходящих дробей четного порядка приближаются к пределу «снизу», а нечетного порядка – «сверху».

Приведем пример, в котором величина погрешности (второе слагаемое) ограничивается дробью с тремя верхними этажами:

$$\Phi=\frac{8}{5}+\frac{1}{55+\frac{1}{\frac{11}{5}}}=1,6+0,018032786=1,618032786 \quad , \ (16)$$

$$\Phi=\frac{13}{8}-\frac{1}{144-\frac{1}{\frac{18}{8}}}=1,625-0,00695944=1,6180341 \quad . \ (17)$$

Из выражений (16), (17) можно видеть, что результаты совпадают с точностью до шестого знака после запятой. Сходимость дробей (12), (13), а также (14), (15) значительно лучше сходимости дроби (6).

Заключение. Как следует из рассмотрения двух конкретных задач, численное значение Φ возникает здесь как признак особого равенства, либо особого вида структуры. Чтобы показать справедливость последнего утверждения, представим структуру лестничной схемы графом, у которого общий узел изображен правильно – одной точкой, рис.3. Обычно его рассекают на необходимое число частей, а потом соединяют между собой отрезками с нулевым сопротивлением.

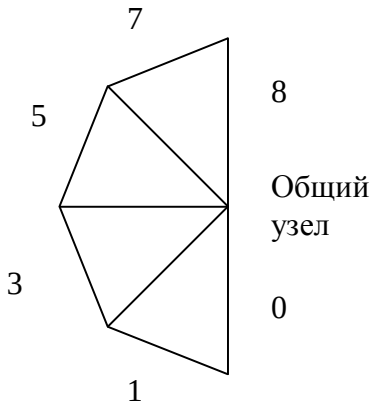

Рис.3. Нормальный вид структуры лестничной схемы.

Граф рис.3 представляет структуру лестничной схемы с единственным (как и положено) общим узлом. Внешние ветви (продольные) графа пронумерованы традиционно с помощью нечетных чисел (1-7), ветвям-радиусам (поперечным) – присвоены четные номера (0-8). Конечно, число ячеек лестничной схемы можно наращивать бесконечно, но даже при четырех звеньях видно, что рисунок обладает определенным, особым видом симметрии. Индексом такой симметрии и является число Φ, которое характеризует структуру бесконечной лестничной схемы. Заметим, что в случае бесконечного числа звеньев рис.3 становится многослойным, своеобразной проекцией «винтовой лестницы».

ЛИТЕРАТУРА

1. Василенко С.Л. «Золотой разговор» с Евклидом// «Академия Тринитаризма», М., Эл №77-6567, публ.15649, 12.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm .

2. Хрестоматия по истории математики. Математический анализ, Теория вероятностей./Пособие для студентов пед. ин-тов. под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1977. -224с.
3. Хинин А.Я. Цепные дроби: Изд. 4-е, стереотип. – М.: Наука, 1978. – 112с.
4. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. -312с.
5. Ерохов И.В. Получение структур схемных функций// «Академия Тринитаризма», М., Эл.№77-6567, публ.14700, 24.01.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321081.htm.
6. Василенко С.Л. Златые цепи// «Академия Тринитаризма». – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15557, 22.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/001c/00161546.htm.