С.Л. Василенко

Гармония самогенерирующихся чисел

В свое время Г.Харди писал [1]: «Есть только четыре числа, исключая единицу, которые равны сумме кубов своих цифр: **153** = $1^3+5^3+3^3$, **370** = $3^3+7^3+0^3$, **371** = $3^3+7^3+1^3$ и **407** = $4^3+0^3+7^3$. Это необычный факт, очень удобный для головоломных разделов в газетах и для развлечения любителей, но в нем нет ничего, что бы привлекало к нему математиков. Доказательства не трудны и не интересны – лишь немного утомительны. Теоремы не являются серьезными ... и не содержат каких-либо серьезных обобщений».

В значительной мере великий математик, конечно, прав.

Хотя формальное расширение его умозаключений ставит под некоторое сомнение полезность вообще теории чисел, изучающей целые числа и сходные объекты [2–4]. Поскольку всё ставится в зависимость от того, насколько та или иная задача интересна для профи-математика, когда система доказательств попросту превращается в некий соревновательный процесс.

То есть бывают любопытные интригующие фокусы (задачки с числами) и не очень.

При таком подходе высшая арифметика по большому счету может интерпретироваться набором занимательных манипуляций, различающихся лишь уровнем сложности.

Да, и чисел в природе нет.

В лучшем случае мы можем наблюдать некоторые свойства, приписываемые нами этим числам, как плод собственного воображения.

«Свойственное человеческому сознанию стремление цепляться за "конкретное" – воплощаемое в ряде натуральных чисел – обусловливает ту медленность, с которой протекала неизбежная эволюция. Логически безупречная арифметическая система может быть сконструирована не иначе, как в отвлечении от действительности» [5, с. 81].

Не будем далее развивать эти достаточно спорные рассуждения, оставив их будущим дискуссиям. Как бы там ни было, но целые числа продолжают завораживать человека своей непредсказуемостью и неопознанностью феерических кульбитов, неожиданными свойствами и гармонией.

Часть из них обусловлена удивительными способностями самообразования или самоопределения чисел через собственные, составляющие их цифры (знаки).

Главная такая особенность заключается в самой записи чисел в тех или иных позиционных системах счисления на основе ограниченного набора цифр.

Кроме того, существует целый пласт разнообразных преобразований над цифрами исходного числа, приводящих опять к этому же числу.

Самовлюблённое число [6, с. 163–175] или совершенный цифровой инвариант (*pluperfect digital invariant*) либо число Армстронга (A005188[1]) – натуральное число, которое в принятой системе счисления равно сумме своих цифр, возведённых в степень, равную количеству его цифр [7, 8].

Примеры:

$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$; $1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$;

$54748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5$; $548834 = 5^6 + 4^6 + 8^6 + 8^6 + 3^6 + 4^6$;

$1741725 = 1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7$;

$24678050 = 2^8 + 4^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8 + 0^8 +5^8 + 0^8$;

$146511208 = 1^9 + 4^9 + 6^9 + 5^9 + 1^9 + 1^9 + 2^9 + 0^9 + 8^9$;

$4679307774 = 4^{10} + 6^{10} + 7^{10} + 9^{10} + 3^{10} + 0^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 7^{10} + 4^{10}$.

[1] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://oeis.org/.

Это конечная последовательность.

Её последний элемент равен 115132219018763992565095597973971522401 и соответствует 39-й степени (39 цифрам).

В десятичной системе счисления данные числа могут существовать только с количеством цифр, не более $k \le 60$, так как $k{\cdot}9^k < 10^{k-1}$ при $k > 60$ [9]:

$60{\cdot}9^{60}$ = 107820617994865872624790789770576302383888537652271066384060;

$61{\cdot}9^{61}$ = 986558654653022734516835726400773166812580119518280257414149.

Если же степень не привязывать жестко к количеству цифр числа, то последовательность становится необозримо длинной (http://oeis.org/A023052/a023052.txt, http://oeis.org/A023052/b023052.txt).

Подобные числа в других базах называются также числами Мюнхгаузена [10], и для разных оснований $2 \le c \le 10$ отражены в A166623.

Самовлюблённые числа в переводе с английского (*narcissistic* numbers) онтологически увязаны с цветком нарцисса.

Нарцисс (сын речного бога) согласно греческой мифологии во время охоты увидел в реке своё отражение и влюбился в него. Он не смог с ним расстаться и умер от голода и/или страдания. Когда пришли за его телом, его уже не было, а на том месте, где оно должно было быть, вырос цветок нарцисс [11].

С тех пор имя Нарцисса стало нарицательным, символизируя гордость и самовлюблённость.

Иногда термином "самовлюблённые числа" называют любой тип чисел, которые равны некоторому выражению от их собственных цифр.

В частности, таковыми могут быть: совершенные и дружественные числа, числа Фридмана, числа Брауна ($4!+1=5^2$, $5!+1=11^2$, $7!+1=71^2$), счастливые билеты и т.п.

На наш взгляд, для такого широкого множества чисел более подходящим является принятие следующего определения.

Определение. *Самогенерирующееся* (*самоопределяющееся*) *число* – число, равное результату арифметических манипуляций со всеми его цифрами или группами цифр.

Рассмотрим свойства некоторых k-значных чисел $n = \overline{p_k \dots p_1} = \sum 10^{j-1} p_j$ в десятичной системе счисления. Суммирование осуществляется по индексу $j = \overline{1, k}$, соответствующему порядковому номеру цифры в исследуемом числе.

Так, самовлюбленные числа (числа Армстронга) удовлетворяют условию

$$\sum p_j^k = n.$$

1. Сумма возрастающих степеней цифр числа n (A032799):

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 89, 135, 175, 518, 598, 1306, 1676, 2427, 2646798, 12157692622039623539

$$\sum p_j^{k+1-j} = n.$$

Пример: $2646798 = 2^1+6^2+4^3+6^4+7^5+9^6+8^7$.

2. Сумма убывающих степеней цифр числа n в виде $\sum p_j^j = n$ характерна только для тривиального случая однозначных чисел. В то же время образуется подборка самогенерирующихся чисел с весовыми коэффициентами λ вида $\lambda \sum p_j^j = n$ (табл. 1).

Таблица 1

Самогенерирующиеся числа в виде суммы убывающих степеней цифр с весовыми коэффициентами λ

λ = 2		3	4	5	6	7	8	9
18	8234	24	12	20	414	1638	336	135
48	8240	7308	164	155	49914	4795	5000	243
50	8386	7344	476			17171	5336	2682
762	8498	7416	500			17374	63048	
8210		7434	512				63360	
8224			6776					

Кроме того, по убывающим степеням генерируется произведение $1715 = 1^4 \cdot 7^3 \cdot 1^2 \cdot 5^1$.
А подмножество чисел (90, 4618, 4628, 7088, 7898) удовлетворяет соотношению

$$\sum \left(p_j^{k+1-j} + p_j^{j} \right) = n .$$

3. Произведение <u>суммы цифр</u> числа n и <u>суммы квадратов</u> его цифр (A115518):
1, 133, 315, 803, 1148, 1547, 2196

$$\sum p_j \cdot \sum p_j^2 = n .$$

Пример: $315 = (3+1+5) \cdot (3^2+1^2+5^2)$.

Данная последовательность конечна.

Действительно, любое натуральное число n содержит не более $\lg n + 1$ цифр, каждая из которых в десятичной системе не больше 9. Это приводит к неравенству

$$\sum p_j \cdot \sum p_j^2 \le 9(\lg n + 1) \cdot 9^2 (\lg n + 1) = 9^3 (\lg n + 1)^2 .$$

С другой стороны, для всех $n \ge 20582$ имеем $9^3(\lg n + 1)^2 < n$.

Поэтому все члены последовательности должны быть меньше этой верхней границы.

Простой компьютерный поиск показывает, что все условия перечислены, и числовой ряд определён верно.

4. Произведение <u>суммы цифр</u> числа n и <u>суммы кубов</u> его цифр (A130680):
1215, 3700, 11680, 13608, 87949

$$\sum p_j \cdot \sum p_j^3 = n .$$

Пример: $1215 = (1+2+1+5) \cdot (1^3+2^3+1^3+5^3)$.

Данная последовательность также конечна, что легко проверяется, поскольку для всех $n \ge 271595$ имеем $9^4 (\lg n + 1)^2 < n$.

5. Произведение <u>суммы цифр</u> числа n и <u>суммы возрастающих степеней</u> его цифр:
81, 5344, 5724, 13060, 44172

$$\sum p_j \sum p_j^{k+1-j} = n .$$

Пример: $5724 = (5+7+2+4) \cdot (5^1+7^2+2^3+4^4)$.

6. Произведение суммы цифр числа n и суммы убывающих степеней его цифр:
135, 243, 41789, 108368, 366768, 554393

$$\sum p_j \sum p_j^j = n .$$

Пример: 243 = $(2+4+3)\cdot(2^3+4^2+3^1)$.

7. Сумма кубов цифр числа n (A046197):
0, 1, **153, 370, 371, 407**

$$\sum p_j^3 = n .$$

Жирным шрифтом выделены самовлюбленные числа (степень равна количеству цифр).

8. Сумма четвертых степеней цифр числа n (A052455):
0, 1, **1634, 8208, 9474**

$$\sum p_j^4 = n .$$

9. Сумма пятых степеней цифр числа n (A052464):
0, 1, 4150, 4151, **54748**, **92727**, **93084**, 194979

$$\sum p_j^5 = n .$$

Данное условие проверяется только до $n \le 389140$, поскольку для больших значений n всегда выполняется неравенство $9^5(\lg n+1) < n$.

Примечательно, что 4150 и 4151 – единственные числа удовлетворяющие условию

$$\sum p_j^{k+1} = n .$$

10. Сумма седьмых степеней цифр числа n (A124068):
0, 1, 1741725, 4210818, 9800817, 9926315, 14459929

$$\sum p_j^7 = n .$$

При $n \ge 41205041$ имеем $9^7(\lg n+1) < n$.

11. Сумма восьмых степеней цифр числа n (A124069):
0, 1, 24678050, 24678051, 88593477

$$\sum p_j^8 = n .$$

При $n \ge 413979401$ имеем $9^8(\lg n+1) < n$.

Более высокие степени отражены, например, в работе [9].

12. Сумма вторых, третьих и четвертых степеней цифр числа n:
3274, 8357, 9036

$$\sum p_j^2 + \sum p_j^3 + \sum p_j^4 = n .$$

13. Сумма третьих, четвертых и пятых степеней цифр числа n:

82558

$$\sum p_j^3 + \sum p_j^4 + \sum p_j^5 = n.$$

14. Сумма третьих и четвертых степеней цифр числа n:

3174, 5756

$$\sum p_j^3 + \sum p_j^4 = n.$$

Других чисел нет, так как для всех $n \geq 41000$ имеем $(9^3 + 9^4)(\lg n + 1) < n$.

15. Сумма первых и третьих степеней цифр числа n:

12, 30, 666, 870, 960, 1998

$$\sum p_j^1 + \sum p_j^3 = n.$$

Пример: $666 = (6^1+6^1+6^1) + (6^3+6^3+6^3)$.

16. Сумма первых и четвертых степеней цифр числа n:

7816

$$\sum p_j^1 + \sum p_j^4 = n.$$

17. Куб суммы цифр числа n (A061209) или числа Дьюдени[2] [12]

1, 512, 4913, 5832, 17576, 19683

$$\left(\sum p_j\right)^3 = n.$$

Проверка данного условия не выходит за пределы $n \geq 178019 \Rightarrow [9(\lg n + 1)]^3 < n$.

18. Четвертая степень суммы цифр числа n:

2401, 234256, 390625, 1679616

$$\left(\sum p_j\right)^4 = n.$$

Возможные значения чисел-претендентов здесь не превышают 35 млн:

$$n \geq 34955598 \Rightarrow [9(\lg n + 1)]^4 < n.$$

Обобщение чисел Дьюдени на различные степени суммы цифр можно найти в [13]. Например, число 547210^{25662} содержит 147253 цифр, сумма которых равна 547210. Возможны также модификации с чередованием знаков, в частности,

$$759375 = (7-5+9-3+7)^5.$$

[2] Генри Эрнест Дьюдени (1857–1930) – величайший английский изобретатель сотен первоклассных головоломок. Трудно в наше время найти хоть одну книгу по занимательной математике, в которой (часто без указания авторства) не нашлось бы нескольких блестящих математических задач, рожденных его неисчерпаемой фантазией (Мартин Гарднер).

Последовательность (A023106) содержит в порядке возрастания числа, равные некоторой подходящей степени суммы его цифр $\left(\sum p_j\right)^m = n$:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 81 (9^2), 512 (8^3), 2401 (7^4), 4913 (17^3), 5832 (18^3), 17576 (26^3), 19683 (27^3), 234256 (22^4), 390625 (25^4), 614656 (28^4), 1679616 (36^4), 17210368 (28^5), 34012224 (18^6), 52521875 (35^5), 60466176 (36^5), 205962976 (46^5), 612220032 (18^7), 8303765625 (45^6), ...

Из них только для чисел (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 81, 512, 2401) степень m равна количеству цифр k.

19. Произведение суммы цифр числа n на их произведение (A038369)

0, 1, 135, 144

$$\sum p_j \cdot \prod p_j = n.$$

Пример: 144 = (1+4+4)·(1·4·4) = 9·16.

20. В работе [14] можно найти и другие интересные примеры внутренней гармонии самогенерирующихся чисел.

Степенной реверс (цифры слева–направо, степени справа–налево):

$48625 = 4^5+8^2+6^6+2^8+5^4$;

$397612 = 3^2+9^1+7^6+6^7+1^9+2^3$.

Самоидентичная степень (степень равна цифре):

$3435 = 3^3+4^4+3^3+5^5$;

$438579088 = 4^4+3^3+8^8+5^5+7^7+9^9+0^0+8^8+8^8$.

Степень с постоянной базой:

$595968 = 4^5+4^9+4^5+4^9+4^6+4^8$;

$3909511 = 5^3+5^9+5^0+5^9+5^5+5^1+5^1$;

$13177388 = 7^1+7^3+7^1+7^7+7^7+7^3+7^8+7^8$;

$52135640 = 19^5+19^2+19^1+19^3+19^5+19^6+19^4+19^0$.

"Факторианты", равные сумме факториалов их цифр (A014080): 1, 2, 145, 40585

145 = 1! + 4! + 5!

40585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!

"Мозаика Дьюдени":

$2592 = 2^5 \cdot 9^2$; $\quad 3\,4425 = 3^4 \cdot 425$; $\quad 31\,2325 = 31^2 \cdot 325$.

Возможны также варианты с чередованием знака, например, $666 = 1^6 - 2^6 + 3^6$.

21. Числа с $2 \cdot N$ цифрами, которые равны сумме квадратов их N-значных половин /нули вначале допускаются только во второй половине/ (A055616):

1233, 8833, 990100, 94122353, 1765038125, 2584043776, 7416043776, 8235038125, 9901009901, 116788321168, 123288328768, 876712328768, 883212321168, 999900010000, 13793103448276, 15348303604525

Пример: $116788\,321168 = 116788^2 + 321168^2$.

22. Числа с $3 \cdot N$ цифрами, которые равны сумме кубов их N-значных частей (A056733)

153, 370, 371, 407, 165033, 221859, 336700, 336701, 340067, 341067, 407000, 407001, 444664, 487215, 982827, 983221, 166500333, 296584415, 333667000, 333667001, 334000667, 710656413, 828538472

Пример: 1666666 5000000 3333333 = $1666666^3 + 5000000^3 + 3333333^3$.

23. В определенной мере с данными суммами квадратов и кубов корреспондируются числа, которые разбиваются (сцепляются) $n = x \mid y$ так, что $x^2 - y^2$ делится на n (A162701): 147, 528, 729, 1617, 8019, 13467, 71289, 91091, 130896, 310497, 350268, 970299, 1010100, 1016127, 1034187, 1140399, 1190475, 1216512, 1300624, 1334667, 1360167, 1416767, 1484847, 1530900, ...

Примеры:

$$147 = 14 \mid 7 \to 14^2 - 7^2 = 1 \cdot 147.$$
$$\underline{528} = 52 \mid 8 \to 52^2 - 8^2 = 5 \cdot \underline{528}.$$
$$729 = 72 \mid 9 \to 72^2 - 9^2 = 7 \cdot 729.$$

24. Но больше отвечают введенному понятию самогенерации ч*и*сла, которые разбиваются $n = x \mid y$ так, что $y^2 - x^2$ равно n (A162700): 48, 3468, 10101, 16128, 34188, 140400, 190476, 216513, 300625, 334668, 416768, 484848, 530901, 2341548, 2661653, 16604400, 33346668, 59809776, 101010101, 3333466668, 4848484848, 4989086476, 18516137328, 30534177388, 56734244853,

Примеры:

56734 244853 = $56734 \mid 244853 \to 244853^2 - 56734^2$ = 56734244853;

49890 86476 = $49890 \mid 86476 \to 86476^2 - 49890^2$ = 4989086476;

3334 6668 = $6668^2 - 3334^2$.

25. Представляют интерес автоморфные числа, десятичная запись квадрата которых оканчивается самим числом. Начало им дают два простых квадрата $5^2 = 25$ и $6^2 = 36$.

Например,

$\underline{6046992680891830197061490109937833490419136188999442576576769103890995893380022607743740081787109376}^2$ =

= 3656612048275936374766293750976368502596933376625301009826950660612189918140221658511273131183457641$\underline{60469}$ $\underline{9268089183019706149010993783349041913618899944257657676910389099589338002260774374008178710937 6}$.

Примечательно, что по мере увеличения чисел младшие разряды сохраняются, а после обнуления старших разрядов оставшиеся числа по-прежнему являются автоморфными:

$$376^2 = 141\underline{376},\ 109376^2 = 11963\underline{109376},\ 7109376^2 = 5054322\underline{7109376}, \ldots$$
$$625^2 = 390\underline{625},\ 90625^2 = 8212\underline{890625}... $$

26. Встречаются взаимообратные экзотические пары:

$$3869 = 62^2 + 05^2 \leftrightarrow 6205 = 38^2 + 69^2;$$
$$5965 = 77^2 + 06^2 \leftrightarrow 7706 = 59^2 + 65^2.$$

Здесь каждое число пары равно сумме квадратов двух половинок другого числа.

Аналогично для трёх кубов:

$$1^3 + 3^3 + 6^3 = 244 \leftrightarrow 2^3 + 4^3 + 4^3 = 136.$$

27. Существуют также единственные числа, равные сумме отдельных степеней их цифр:

степени 1–3: **336** = $(3^1+3^1+6^1) + (3^2+3^2+6^2) + (3^3+3^3+6^3)$;

степени 2–5: **96704** = $(9^2+6^2+7^2+0^2+4^2) + (9^3+6^3+7^3+0^3+4^3) + (9^4+6^4+7^4+0^4+4^4) + (9^5+6^5+7^5+0^5+4^5)$.

28. **Счастливые числа**, если итерационный процесс суммирования квадратов цифр приводит к единице. Первое такое счастливое число, естественно, равно 1.

Следующее число – 7, которое приводится к единице за 5 итераций.

$$7 \to 49 \to 97 \to 130 \to 10 \to 1$$
$$44 \to 32 \to 13 \to 10 \to 1$$
$$379 \to 139 \to 91 \to 82 \to 68 \to 100 \to 1$$

469 → 133 → 19 → 82 → 68 → 100 → 1
899 → 226 → 44 → 32 → 13 → 10 → 1
78999 → 356 → 70 → 49 → 97 → 130 → 10 → 1

Понятно, что числа с одинаковым составом цифр в этом контексте эквивалентны.

Поэтому при анализе имеет смысл ограничиться рассмотрением только чисел с неубывающим порядком цифр, то есть $n = \overline{p_k ... p_1} = \sum 10^{j-1} p_j$, где $p_s \leq p_r$, $s > r$.

29. А вот для вторых, третьих и больших степеней цифр представляют интерес аналогичные итерационные циклы, например:

k = 1-значные числа:
s = 2: 4 – 16 – 37 – 58 – 89 – 145 – 42 – 20 – 4

k = 2-значные числа:
s = 2: 16 – 37 – 58 – 89 – 145 – 42 – 20 – 4 – 16
s = 3: 55 – 250 – 133 – 55

k = 3-начные числа:
s = 2: 145 – 42 – 20 – 4 – 16 – 37 – 58 – 89 – 145
s = 3: 133 – 55 – 250 – 133   160 – 217 – 352 – 160
136 – 244 – 136   919 – 1459 – 919

k = 4-значные числа:
s = 3: 1459 – 919 – 1459
s = 4: 1138 – 4179 – 9219 – 13139 – 6725 – 4338 – 4514 – 1138
2178 – 6514 – 2178

k = 5-значные числа:
s = 4: 13139 – 6725 – 4338 – 4514 – 1138 – 4179 – 9219 – 13139
s = 5: 12950 – 62207 – 24647 – 26663 – 23603 – 8294 – 92873 – 108899 – 183635 – 44156 – 12950
18107 – 49577 – 96812 – 99626 – 133682 – 41063 – 9044 – 61097 – 83633 – 41273 – 18107
33649 – 68335 – 44155 – 8299 – 150898 – 127711 – 33649
10933 – 59536 – 73318 – 50062 – 10933
89883 – 157596 – 89883
s = 6: 63804 – 313625 – 63804
93531 – 548525 – 313179 – 650550 – 93531

k = 6-значные числа:
s = 5: 108899, 127711, 133682, 150898, 157596, 183635 (см. k = 5)
s = 6:
239459 – 1083396 – 841700 – 383890 – 1057187 – 513069 – 594452 – 570947 – 786460 – 477201 – 239459
313179 – 650550 – 93531 – 548525 – 313179
282595 – 824963 – 845130 – 282595
313625 – 63804 – 313625

Выводы:

1. Предложен обобщенный класс самогенерирующихся целых чисел, равных результату арифметических манипуляций со всеми его цифрами или группами цифр.
2. В рамках данной классификации кратко рассмотрены известные и малоизученные подмножества натуральных чисел в проявлении их различных гармоничных свойств.

Литература.

1. *Hardy G.H.* A Mathematician's Apology. – Cambridge University Press, 1940. – 153 p.
2. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. – М.: Наука, 1972. – 510 с.
3. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – 180 с.
4. *Кох Х.* Алгебраическая теория чисел / Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики. Фундамент. направления». – ВИНИТИ, 1990. – Т. 62. – 301 с.
5. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? – 3-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2001. – 568 с.
6. *Madachy J.S.* Mathematics on Vacation. – Thomas Nelson & Sons Ltd., 1966.
7. *Числа Армстронга* // Википедия. 04.12.2010. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=29913867.
8. *Narcissistic number* // Wikipedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Narcissistic_number.
9. *Weisstein E.W.* Narcissistic Number // From MathWorld. A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/NarcissisticNumber.html.
10. *Daan van Berkel*. On a curious property of 3435. – November 18, 2009. – http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0911/0911.3038v2.pdf.
11. *Кун Н.* Легенды и мифы древней Греции. – СПб.: Паритет, 2009. – 448 с. – http://magister.msk.ru/library/philos/kunn_001.htm.
12. *Dudeney H.E.* 536 Puzzles & Curious Problems. – Souvenir Press, London, 1968. – p. 36.
13. *Steffen A.Jakob*. Generalized Dudeney Numbers. – http://www.jakob.at/steffen/dudeney.html.
14. *Harvey H.* Narcissistic Numbers. – http://web.archive.org/web/20091027123639/http://www.geocities.com/~harveyh/narciss.htm.