С.Л. Василенко

# Гиперболические метаморфозы аддитивно-рекуррентных последовательностей

## *Иронии судьбы...*

"*Человек способен сделать путь великим, но великим человека делает путь*" (Конфуций).

Год назад в довольно необычной форме был отмечен 20-летний юбилей одного из числовых методов [1].

Самобытный диалог с читателем, непринужденная атмосфера с «приглашением чисел в гости», бережное отношение к существующим наработкам, развитие самого метода с его отправлением в длительное плавание по жизни, – все это присутствовало и оставило свой неповторимый поэтическо-душевный след.

Как знать, возможно, это еще один из пока единичных прототипов будущих доверительных разговоров о математике, которая, по словам Г.Лейбница, «есть поэзия гармонии, вычислившая себя, но не умеющая высказаться в образах для души».

Предметом данного исследования является тема, которая тоже тянет на 20-летнюю дату и восходит к докладам Академии наук Украины [2, 3], связанным с так называемыми гиперболическими функциями Фибоначчи–Люка (ГФЛ) [4]. – С незначительными интерпретациями они многократно пересказываются и в наши дни, например [5, 6].

По правде говоря, как будет показано ниже, здесь особо похвастаться нечем.

И речь можно вести, разве что о доброй памяти их юности, чем реальном развитии.

Хотя следует сразу оговориться, что именно ГФЛ подтолкнули нас к осмыслению данной проблематики.

Единственным для нас условием было выйти из "золотого зазеркалья", убрать мешающие шоры и посмотреть свежим взглядом на необычайно широкое гармоничное поле Фибоначчи в его современном представлении.

А оно в настоящее врем столь просторно, что на его безбрежном фоне ГФЛ – гаснущая искорка, которой в силу наследственных генов, к сожалению, не было дано зажечься ярким светом красивой и полезной теории.

Но все по порядку...

## *Перипетии судьбы...*

"*Вся наша судьба – перепутье*" (В.Гюго)

"*И всюду страсти роковые.*
*И от судеб защиты нет*" (А.Пушкин).

Исходя из аксиомы о параллельных, в евклидовой геометрии через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая её.

В геометрии Лобачевского таких прямых несколько (по крайней мере, две).

Но это вовсе не означает, что эти прямые параллельны между собой.

Истина состоит в том, что параллельные не пересекаются даже у Лобачевского [7].

К чему мы привели данный пример? – Он означает, что есть базовые положения, которые обыкновенно не ломают даже при построении новой более "продвинутой" теории.

Нечто фундаментальное и незыблемое. Хотя и бывают исключения.

Так, исследуя свойства единичной гиперболы, В.Риккати ввел (1757) соотношения, определяющие гиперболический синус и косинус, придумал для них обозначения sh, ch и установил базовое тождество $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

Функции имеют восхитительные разложения в ряд Тейлора ("чёт–нечет"):

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Наряду с указанными свойствами в теории гиперболических функций непреложным постулирующим правилом является нормировка на 2, за счет чего достигается базовое равенство Эйлера:

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x.$$

Данная форма – непреклонное условие параметризации, которое примерно означает то же самое, что в школьной арифметике $2 \times 2 = 4$.

А как же функции ГФЛ? – Здесь не всё так складно. Можно сказать, даже наоборот.

В работе [2] гиперболические функции синуса–косинуса вводятся[1] классически, с заменой основания $e$ на число золотого сечения $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$:

$$\operatorname{sh}_\Phi x = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch}_\Phi x = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{2}, \tag{1}$$

что в целом отвечает самым требовательным положениям математической логики и геометрическому смыслу изоморфных переходов от окружности к гиперболе.

Хотя в таком виде они напрямую не сводятся (без поправочных коэффициентов) к функции Фибоначчи $F(x) = \left|\Phi^x - (-\Phi)^{-x}\right| / \sqrt{5}$ с начальными условиями $\{F(0), F(1)\} = \{0,\ 1\}$.

В работе [3] наоборот функции вводятся ортодоксально

$$F_{\mathrm{s}}(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}, \quad F_{\mathrm{c}}(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}, \tag{2}$$

и называются гиперболическими, скорее вопреки, чем согласно установленным правилам.

В результате математические образования-конструкции получают связь с числами Фибоначчи (собственно таковыми они являются по определению ввиду обычной замены буквенных обозначений), но полностью теряют все известные свойства и тождества общепринятых гиперболических функций.

У нас нет и тени сомнения, что в своих исследованиях авторы хотели продемонстрировать свои наработки в наиболее выгодном свете с далеко идущей перспективой, однако, и это часто бывает, "получилось как всегда" (В.Черномырдин).

В том-то и дело, что вслед за стремлением к внешнему сходству с классическими формулами произошла фактическая потеря внутреннего содержания и возможность экстраполяции на более сложные аддитивно-рекуррентные последовательности.

И это рано или поздно должно было проявиться.

Анализируя смысл формул (1)–(2), мы невольно попадаем в заколдованный круг.

Функции (1) логически правильные, но не работают без перенормировки (умножения на коэффициент $2/\sqrt{5}$). Функции (2), казалось напротив, приспособлены к последовательностям Фибоначчи (попросту, из них же и вытекают, а де-факто ими же и

---

[1] Иногда говорят об "*открытии*" (?) подобных функций. Хотя весьма легковесно считать открытием подстановку в гиперболические формулы вместо числа $e$ любое другое число, хотя бы известное $\pi$.

являются), но совершенно не адаптированы к классическим гиперболическим функциям в их истинном понимании: физическом, алгебраическом и геометрическом.

Еще нобелевский лауреат академик П.Капица несколько иносказательно говорил: «Печально, когда теория совпадает с экспериментом. Это уже не открытие, а закрытие».

В нашем случае, не успев родиться, соотношения (2) с точностью до любого знака после запятой идеально повторили давно известные в математике элементы теории, под названием огибающих линий.

В этой связи весьма любопытны диаметрально противоположные и эмоционально окрашенные математические сравнения убеленных сединой профессоров: «проф. Арансон недавно в телефонном разговоре выразил восторг по поводу коэффициента $\sqrt{5}$ в знаменателе гиперболических функций Фибоначчи» [8]; «"криминальный" корень $\sqrt{5}$ вводит многих исследователей в псевдонаучное заблуждение» [9].

Чтобы там ни было, но корень $\sqrt{5}$, элементарно необходимый в числах Фибоначчи, становится рудиментом в гиперболических функциях. – Как бы, не взаимодействует активно с настоящим временем, но продолжает в нём присутствовать в виде памяти прошлого.

## *<Огибающие> линии судьбы…*

"*Судьба не приносит нам ни зла, ни добра,*
*она поставляет лишь сырую материю*
*того и другого*" (М.Монтель)

Огибающие линии в математике известны давно. А их переименование или наделение в частных случаях новыми терминологическими эпитетами сути не меняет.

Позволим себе в этой связи отвлеченно-образное сравнение.

> Допустим, первый раз в жизни мы увидели на дороге ослика. Ласково называем его лошадкой. Садимся и едем. Вроде все нормально. Но право же, ослик так и остался осликом, даже ишаком не стал, не говоря уже о лошадке. И нам невдомек, оказывается, есть целая "ослиная теория", где все уже давно прописано, и замечательный ослик так же, как и не менее достопримечательные "ушастые" числа Фибоначчи, давным-давно "получили прописку" в истории развития науки. Но мы этого можем не знать. Нам знакома только "лошадиная терминология" (как у А.Чехова с фамилией "Овсов").
>
> Так рождается альтернативная теория про ослика, только уже на лошадином языке.

В подобных случаях ученые говорят, что происходит метаморфоза[2] как преобразование, изменение внешнего облика, включая стиль бросающегося в глаза яркого броского названия.

Мысль о введении ГФЛ, так или иначе, связана с формальным переходом-расширением дискретной трактовки ряда Фибоначчи на его непрерывное отображение.

Во всей истории математики наиболее свободно и эффективно работал как с непрерывным, так и с дискретным описанием немецкий ученый Г.Лейбниц[3] – создатель комбинаторики и дифференциально-интегрального исчисления.

Он получил (1673) первый ряд для числа π: $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$, ввел (1692) общее понятие огибающей однопараметрического семейства кривых и вывел её уравнение и др.

Кривая $\gamma$ называется огибающей семейства кривых $\gamma_\alpha$, зависящих от параметра $\alpha$, если в каждой своей точке она касается хотя бы одной из кривых семейства [10, с. 520; 11, с. 609–613] и каждым своим отрезком касается бесконечного множества этих кривых [12, 13].

Другие синонимы: *образующая*, *результирующая*.

---

[2] МЕТАМОРФОЗА (греч. *metamorphosis*: мета- и *morphe* вид, форма) – изменение, перемена, преобразование, превращение, принятие иного образа.

[3] Г.Лейбниц – первое гражданское лицо в истории Германии, которому воздвигнут памятник.

Огибающие кривые показывают общее развитие явления или задают коридор ограничительного поведения соподчиненных с ними функций.

Это как бы надсистема, в которой развиваются исследуемые процессы.

Экстраполяция-прогнозирование по образующим занимает одно из первых мест в общей практике прогнозных разработок с применением графоаналитического анализа эволюции параметров технических объектов или систем [14].

В математике к огибающим кривым обычно прибегают в тех случаях, когда хотят проследить общие тенденции изменения каких-либо характеристик.

Например, известны огибающие кривые звуковых сигналов, тонально-модулированных высокочастотных колебаний, волновых или корреляционных функций сигнала и др.

В частности, огибающая высокочастотного колебания обычно строится по характерным точкам сигнала, например, по локальным экстремумам: нижняя – по точкам минимума, верхняя – по точкам максимума.

Отсюда возникает альтернативное определение:

*огибающая кривая* (огива) [envelope (enveloping) curve] – кривая (поверхность), которая в каждой своей точке касается одной из кривых (поверхностей) заданного семейства, не имея при этом ни с одной из них общей дуги (области); при этом все кривые семейства находятся по одну сторону от огибающей линии [15].

В экономике таковой является линия, сформированная рядом краткосрочных кривых средних издержек и отражающая изменение издержек предприятия в долгосрочном измерении при разных технологических процессах.

Во многих случаях образующая находится аналитически [16].

Необходимые и достаточные условия в виде теорем можно найти в работе [17].

1) Пусть требуется найти огибающую линию семейства окружностей $(x-d)^2+y^2-R^2=0$, зависящих от параметра $d$.

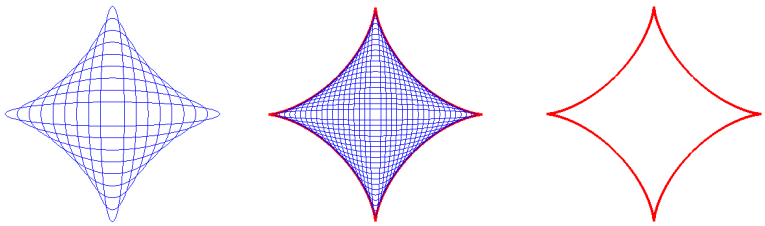
Дифференцируя данное уравнение по $d$, получаем $2(x-d)=0$.

Исключая $d$ из этих двух соотношений, получим уравнение $y^2-R^2=0$, или $y=\pm R$.

2) Найти образующую семейства эллипсов[4] $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(1-a)^2}=1$ при $0<a<1$.

Продифференцируем данное уравнение по $a$: $\frac{x^2}{a^3}-\frac{y^2}{(1-a)^3}=0$.

Огибающая кривая получается исключением параметра $a$ из системы двух уравнений. Выражая из второго равенства $a=\frac{x^{2/3}}{x^{2/3}+y^{2/3}}$ (с учетом ограничения $0<a<1$) и подставляя в первое, получаем уравнение $x^{2/3}+y^{2/3}=1$, которое описывает кривую – *астроиду*.



А теперь попытаемся выяснить, *как появляются огибающие линии в последовательностях Фибоначчи*? – Всё достаточно просто.

---

[4] Интерактивная информационно-консультационная среда. – http://www.pmpu.ru/vf4/dets/discrim/envelope.

Рассмотрим, например, непрерывный аналог аналитической функции, воспроизводящей в дискретные моменты $t$ числа Люка[5], с использованием тождества $\cos(\pi t) = (-1)^t$:

$$L(t) = \Phi^t + (-1)^t \Phi^{-t} = \Phi^t + \cos(\pi t)\Phi^{-t}.$$

С переходом на непрерывный аналог "по времени" $t$ функция $L(t)$ принадлежит уже области комплексных чисел и только в отдельных точках (при целочисленных значениях $t$) принимает вещественные значения.

Косинус произвольного аргумента не превышает единицы, поэтому реальная часть данной функции заключена между двух кривых $\Phi^t \pm \Phi^{-t}$.

Это и есть огибающие линии, поскольку семейство параметрических функций $F(t, a, \varphi) = \Phi^t + \cos(at + \varphi)\Phi^{-t}$ заключено между этими кривыми при любом значении амплитуды $a$ или фазового сдвига $\varphi$ (рис. 1), сжимаясь и разжимаясь как гармонь.

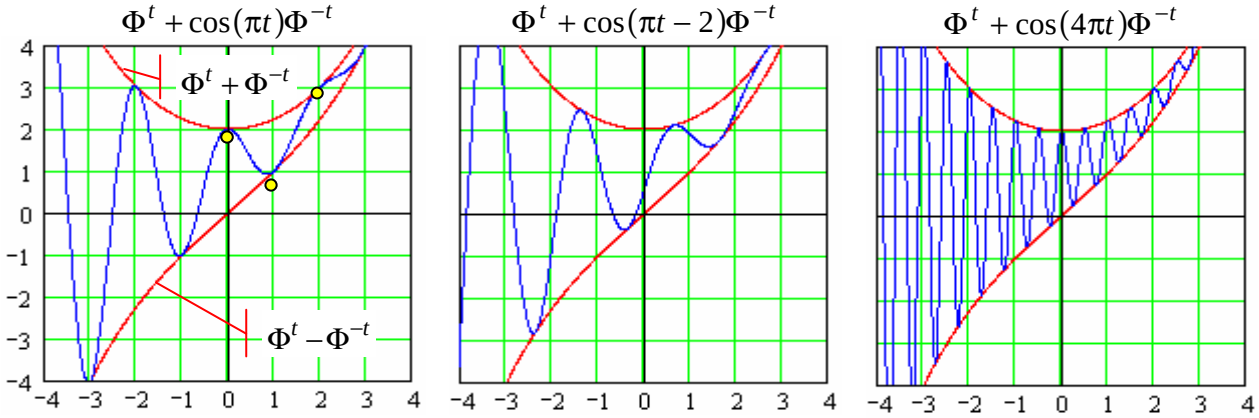



Рис. 1. Огибающие линии к кривым семейства функций,
основанных на модификациях непрерывной функции Люка

Как видно из графиков, непрерывная функция Люка характеризует колебательный режим с переменной амплитудой, которая в свою очередь описывается (моделируется) верхней и нижней непрерывными образующими.

Огибающая кривая или линия (*envelope*) касается искомой (исходной) функции, не имея с ней общих дуг или областей. При этом вся кривая Люка находится по одну сторону от верхней (по максимумам) и нижней (по минимумам) образующей.

Колебательная форма относится не только к последовательностям Фибоначчи, но и вообще к подходящим несократимым дробям, образуемым в процессе представления вещественного числа рациональным приближением в виде цепной дроби (конечной, если оно рационально; периодической, когда оно является квадратичной иррациональностью; бесконечной – для иррационального числа).

В таком случае каждая подходящая дробь с *нечетным* (четным) номером *больше* (меньше) соседних дробей – предыдущей и последующей [18].

Это вытекает из того, что числители $a_n$ и знаменатели $b_n$ подходящих несократимых дробей, определяемые по рекуррентным формулам Эйлера, являются возрастающими последовательностями и связаны соотношением $\dfrac{b_{n-1}}{b_n} - \dfrac{a_{n-1}}{a_n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{a_n b_n}$.

---

[5] Числа Люка – рекуррентная последовательность Фибоначчи с начальными условиями (2, 1).

## *Фортуна судьбы…*

"*Фортуна не только слепа,*
*но и любимцев своих ослепляет*" (В.Гюго)

Разработчикам ГФЛ хорошо известны наши работы [19–22] хотя бы потому, что на них не единожды ссылались. Тем не менее, они демонстративно от них дистанцировались, оставив среди авторов ГФЛ только О.Боднара, А.Стахова, И.Ткаченко и Б.Розина, проведя своеобразный собственный водораздел: «Все остальные работы в этой области, как говорится, "от лукавого". Других оригинальных работ в этой области... не существует» [23].

Ну что ж? – Остается вспомнить слова А.Чехова: «Никто не знает настоящей правды».

Можно провести даже образное сравнение с идиомой[6] "выплеснуть ребенка", поскольку наша первая статья [19] в области гиперболизации по сравнению с упомянутыми ранее работами действительно совсем юная и насчитывает совсем-то ничего – около двух лет.

Всё это означает, что нас по большому счету ничто не связывает с ГФЛ, и мы свободны от их противоречий. Тем самым освобождается русло для плавного и свободного течения мысли, когда не нужно выпутываться из предшествующих ошибок, а на новой или хорошо забытой старой основе закладывать фундамент и выстраивать единую строгую теорию для любых аддитивно-рекуррентных последовательностей (типа чисел Фибоначчи).

Без оглядки на издержки своей первой и не совсем удачной пробы. А она была такова, что наша работа [19] тогда, по сути, оказалась незавершенной, хотя и с обширным приложением [20], поскольку на то время не был найден достойный путь продолжения.

И как теперь представляется, не случайно, так как невольно попали в «тупик гиперболического лабиринта», искусственно и невольно созданного упомянутыми авторами, из которого дальнейшее построение теории оказалось бесперспективным.

Остается поблагодарить разработчиков ГФЛ за своеобразное к нам внимание, что в конечном итоге позволило выйти на приемлемые решения, о чем и пойдет уже более подробно дальнейшее повествование.

Так или иначе, но фортуною судьбы нам не нашлось места в озвученном квартете, где, как известно по И.Крылову, основную часть времени часто тратят на внешнюю атрибутику[7].

В этом есть свой добрый знак... А также волей судьбы оказавшийся «случай – псевдоним Бога, когда он не хочет подписаться своим собственным именем» (А.Франс).

## *Баловни судьбы…*

*Баловать ребенка – все равно, что*
*бросить его* (русская пословица).

Если б не было ГФЛ, то их надо было все равно выдумать. Благодаря ним малоизвестный доселе египетский популяризатор математических этюдов М.Газале стал в "золотоносной среде" весьма известным и часто цитируемым автором.

Рейтинг ссылок на него здесь, хотя и сугубо специфический и односторонний, но, по-видимому, один из самых высоких.

В целом его увлекательная работа [24] действительно небезынтересна любителям математических головоломок и развлечений. Но он наверняка и сам бы весьма удивился, узнав, что "золотосеченцы" на него ссылаются больше чем кто-либо. Одновременно они преподносят всем собственное мнение, что якобы «выведенная формула[8] задает бесконечное количество новых (?) рекуррентных последовательностей, подобных числам Фибоначчи».

---

[6] Идиома «выплеснуть ребенка вместе с водой» (англ. *throw the baby out with the bathwater*) = выбросить целое, когда непригодна только часть.

[7] «Кричит Осёл, – мы, верно, уж поладим, коль рядом сядем» (И.Крылов, Квартет).

[8] Речь идет про обобщение формулы Бине для частного случая квадратного уравнения $x^2 = px + 1$.

Во-первых, теория рекуррентных рядов и линейных разностных (возвратных) уравнений в математике давно известна и описана, в частности, А.Гельфондом [25].

Сама по себе формула здесь ничего отдельно не задает, а является альтернативным описанием ряда в явном или аналитическом виде. Но именно потому и только этим она интересна, хотя сами ряды спокойно генерируются по рекуррентным соотношениям.

Во-вторых, следует заметить, что широко разрекламированную формулу М.Газале таки не вывел. Да, она достоверна, но не исключено, что получена им эмпирически или даже воспроизведена с иного источника, а самого вывода (доказательства) он даже не знает, и предлагает это вместо него проделать читателям, не давая конкретных посылов.

Тем не мене, исследователи ГФЛ ухватились за нее как за соломинку.

Подключили метод "формально-ксероксной" подстановки.

Формулу продублировали, но уже под функции ГФЛ. – Всё!

А что за этим стоит? Какая физика процесса? Каковы перспективы? Дальнейшие посылы к обобщению? – Ни эти, ни похожие вопросы никто не ставил.

Да и многие вещи упомянутого автора выглядят, мягко говоря, алогично.

a) По его словам, ключевой термин употребляется «в своем оригинальном значении, определенном еще Героном Александрийским», то есть «Гномон[9] есть фигура, которая будучи добавлена к иной фигуре, образует новую фигуру, подобную исходной» [24, с. 17].

Хотя потом гномонами называются почему-то уже и числа [24, с. 33].

b) С пропорциями вообще путаница. «Если к длинной стороне "божественного" прямоугольника добавить квадратный гномон, то полученный при этом прямоугольник также будет божественным. Иными словами, $\frac{длина}{ширина} = \frac{длина + ширина}{ширина}$» [24, с. 127].

В пропорции $a : b = c : d$ различают крайние ($a$, $d$) и средние члены ($b$, $c$), причем равенство двух средних $b = c$ соответствует гармонической пропорции.

Автор буквально кружит в двух (даже не трех) соснах, необъяснимо как выуживая некорректные понятия крайнего и среднего отношения (?).

c) Он также использует крайне надуманные формулировки типа «египетского *прямоугольника*» [24, с. 133] со сторонами 1 и $\sqrt{\Phi}$. Ибо в науке давным-давно известен египетский треугольник – прямоугольный треугольник с соотношением сторон (3:4:5) или то же самое, что египетский прямоугольник со сторонами 3 и 4 и диагональю 5.

Эти целые числа удовлетворяют уравнению: $a^2 + b^2 = c^2$.

Примечательно, что сумма указанных чисел (3+4+5=12) с древних времен использовалась как единица кратности при построении прямых углов с помощью веревки, размеченной узлами на 3/12 и 7/12 её длины. Фигура применялась в архитектуре средних веков для построения схем пропорциональности [26].

d) Автор приводит сведения (в приложении) об уравнении в конечных разностях второго порядка с двумя коэффициентами [24, с. 194–198].

И в то же время, в нарушение логики собственного изложения, адекватную аналитическую формулу для последовательности Фибоначчи представляет только с одним неединичным коэффициентом. Подобные неувязки можно продолжать и дальше.

В целом же создается впечатление механистического набора фрагментарных и слабо систематизированных сведений по излагаемому предмету.

Благодаря широкому развитию компьютеризации похожие компиляции учебного характера с претензией на монографический статут сегодня вошло в моду, часто затмевая собой действительно качественные исследования оригинально-новаторского характера.

---

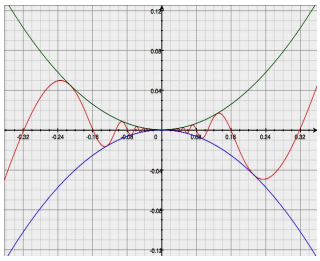
[9] Гномон (гр. *gnomon*) – древнейший астрономический инструмент.

## *Судьба-индейка…*

*Люди склонны винить судьбу, богов и все, что угодно, но только не самих себя*" (Платон).

"*Судьба не принимает оправданий*" (З.Фрейд)

В математическом анализе известна теорема про двух милиционеров (http://ru.wikipedia.org/wiki/): о существовании предела у функции, которая "зажата" между двумя другими функциями, имеющими одинаковый предел (см. рисунок).



Формулируется следующим образом:

если функция $y = f(x)$ такая, что $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$ для всех $x$ в некоторой окрестности точки $a$, причем функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют одинаковый предел при $x \to a$, то существует предел функции $y = f(x)$ при $x \to a$, равный этому же значению, то есть

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = A \;\Rightarrow\; \lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Похожая сходимость наблюдается и для непрерывных функций Фибоначчи, только в бесконечности. И здесь даже не важно, как функция называется. Часто даже не принципиально, как она определяется. Главное её назначение – это применимость, полезность и возможность саморазвития в случае необходимости.

Собственно ГФЛ – это обычная перезапись аналитического решения с заменой переменной либо модификация записи. Или как говорят: "Те же шары, только в профиль".

Функции (1) и (2) равны между собой с точность до постоянного сомножителя 2/√5.

Приставка Люка – терминологическое дублирование, поскольку речь идет все о той же последовательности Фибоначчи, только с иными "затравочными числами" (2, 1).

Ну, и что? – В принципе могут быть любые (не равные одновременно нулю) начальные условия, что согласуется с англоязычной MathWorld-энциклопедией [4].

Но главное состоит в ином.

Функции перестают работать уже для квадратного уравнения общего вида $x^2 = px + q$ и его разностного аналога 2-го порядка $x_{n+2} = px_{n+1} + qx_{n+0}$, не говоря уже о более сложных аддитивно-рекуррентных конструкциях.

Конечно, так не должно быть.

Идея, если она верная, может и должна предполагать перманентное развитие и совершенствование. Само по себе расширение не обязательно осуществляется, но такая возможность подразумевается, и логически вытекает из сути идеи.

Невозможность дальнейшего совершенствования ГФЛ – это результат их формалистического введения, когда внешняя похожесть на обычные гиперболические функции превалировала над логикой, и фактически сыграла злую шутку для последующего развития теории. Так или иначе, но от подобной интерпретации приходится отказываться, возвращаться на круги своя, и начинать всё сначала.

Что же это за функции? – Оказывается всё очень просто. На языке математики – это вещественные огибающие к комплексно-непрерывной функции Фибоначчи.

Запишем известную формулу Муавра–Бине для чисел Фибоначчи, $n$ = 0, 1, 2 ...

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}} = \frac{\lambda_2^n - \lambda_1^n}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Чем примечательна данная формула? – В ней наглядно проявляется структура записи с использованием корней $\lambda_1, \lambda_2$ квадратного уравнения $x^2 = x + 1$.

Именно это её главное достоинство, позволяющее далее проводить необходимые обобщения по мере усложнения исходных алгебраических уравнений.

Переход к иным тождественным записям, наподобие (1)–(2), теряет эту важную преемственность с корнями и уводит нас в область, из которой совершенно не просматривается дальнейший путь организации общих умозаключений. Образно говоря, гиперболическая функция Фибоначчи заводит в гиперболический тупик.

Мы перешли к видоизмененной записи частного (2), но потеряли общность.

С точки зрения развития теории это путь в никуда.

Ведь должна ж оставаться преемственность. Но функция (1) не стандартизуется, а в (2) – теряется связь с "полем Фибоначчи".

Значит, обе функции в своей основе имеют серьезные дефекты.

Остается только удивляться, сколько людей за 20 лет было введено в заблуждение и неверное представление в контексте развития общей теории Фибоначчи.

Хотя, возможно, по разным причинам на эти функции просто не обращали внимания.

Они оставались теоретически и практически не востребованными, а потому и не попадали в поле зрения научного анализа.

В то же время феномен Фибоначчи – это мощный аддитивно-рекурсивный аппарат, содержащий в своем арсенале добрую половину всех алгебраических уравнений, где золотое сечение выступает, хотя и важным, но всего лишь маленьким винтиком (частным случаем).

### *Предсказания судьбы…*

"*Судьба ничего не дает*
*в вечную собственность*" (Сенека)

Итак, функции ГФЛ перестают работать уже для квадратного уравнения общего вида.

Но задача непрерывного представления аддитивно-рекуррентных последовательностей спокойно решается и в этом случае. Только нужно выйти из завороженного круга (1) – (2).

**1)** Так, наше обобщение формулы Муавра–Бине для непрерывного отображения, отвечающего квадратному уравнению $x^2 = px + q$, имеет вид [21]:

$$F(t) = pF(t-1) + qF(t-2) = \frac{\lambda^t - (-q)^t \lambda^{-t}}{p'},$$

где $\lambda = \dfrac{p + p'}{2}$ – положительный корень квадратного уравнения, $p' = \sqrt{p^2 + 4q}$.

Тогда, непрерывные огибающие функции воссоздаются по универсальной паре формул:

$$\left.\begin{matrix} A(t) \\ B(t) \end{matrix}\right\rangle = \frac{\lambda^t \pm q^t \lambda^{-t}}{p'}.$$

С учетом двух начальных условий ("затравочных чисел") $(f_0, f_1)$ непрерывная обобщенная функция Фибоначчи $f(t)$ и её две образующие $a(t)$, $b(t)$ принимают вид:

$$f(t) = f_1 F(t) - f_0 F(t-1);$$

$$\begin{cases} a(t) = f_1 A(t) - f_0 B(t-1); \\ b(t) = f_1 B(t) - f_0 A(t-1). \end{cases}$$

**2)** *Второй вариант* исходит из положения, что для данного множества рядов двух варьируемых коэффициентов $p, q$ слишком много.

Разделим квадратный трёхчлен на $q$ и сделаем замену переменных $y=\frac{x}{\sqrt{q}}$, $m=\frac{p}{\sqrt{q}}$.

В результате получим уравнение $y^2=my+1$ только с одним коэффициентом $m$, который в общем случае не равен 1.

Положительный корень определяется соотношением $\lambda_y=\left(m+\sqrt{m^2+4}\right)/2$.

Числовые значения последовательности вычисляются по рекуррентной формуле $y_t=my_{t-1}+y_{t-2}$ или аналитически $y_t=\frac{\lambda_y^t-\left(-\lambda_y\right)^{-t}}{\sqrt{m^2+4}}$.

Но изложенный подход имеет один недостаток. В общем случае последовательности $y_t$ – нецелочисленные. Если же $q=n^2$ и $p=0(\mathrm{mod}\,n)$, то $m$ – целое, и рекуррентные ряды $y_t$ являются целочисленными.

Например, $q=4$, $p$ – четное; $q=9$, $p$ делится нацело на $3$ и т.п.

Последовательность $y_t$ сходится к своему аттрактору $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{y_{t+1}}{y_t}=\lambda_y$.

Соответственно $\lambda_x=\lambda_y\sqrt{q}$.

## *Лабиринты судьбы…*

"*Судьба – путь от неведомого к неведомому*" (Платон)

Чем хороши различные обобщенные последовательности Фибоначчи, так это общей идеологией образования числовых рядов по универсальной аддитивно-рекуррентной схеме.

Начиная с простого суммирования двух предшествующих элементов, эта теория давно перешагнула рубеж квадратного уравнения с единичными коэффициентами.

Так, числа трибоначчи, придуманные математиком Марком Фейнбергом, расширяют последовательности Фибоначчи в сторону 3-членной аддитивно-линейной рекурсии

$$Z_n=Z_{n-1}+Z_{n-2}+Z_{n-3},\qquad (Z_0,Z_1,Z_2)=(0,0,1)$$

Она имеет свою, только ей присущую асимптотику

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Z_{n+2}}{Z_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{Z_{n-1}+Z_n+Z_{n+1}}{Z_{n+1}}=\frac{1}{3}(a_++a_-+1)\approx 1{,}839,$$

которая связана с действительным корнем характеристического уравнения $x^3=x^2+x+1$ или уравнением $m$-боначчи $x+x^{-m}=2$ при $m=3$.

Любой член ряда трибоначчи можно определить путем округления (до ближайшего целого) числа, определяемого аналитическим выражением [27]

$$Z_n\approx\frac{3b}{b^2-2b+4}\left(\frac{a_++a_-+1}{3}\right)^{n-1},$$

где $a_\pm=\sqrt[3]{19\pm3\sqrt{33}}$, $b=\sqrt[3]{586+102\sqrt{33}}$; для округления используется оператор round(·).

Строго аналитическое соотношение, аналогичное формуле Муавра–Бине для чисел Фибоначчи, продемонстрировано в работе [28] и приводит к следующему результату ($m=3$):

$$Z(t)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda_j^t}{\prod\limits_{i=1,\, i\neq j}^{m}(\lambda_j-\lambda_i)}=\frac{\lambda_1^t}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}+\frac{\lambda_2^t}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}+\frac{\lambda_3^t}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}, \quad (3)$$

где $Z(t)$ – значения числового ряда;

$\lambda_i,\ i=\overline{1,m}$ – в общем случае комплексные корни исходного алгебраического уравнения $m$-го порядка.

Этим самым устраняется парадокс, когда де-факто гиперболические признаки (через свойства геометрической прогрессии) налицо, но описать с помощью ГФЛ мы их не можем.

Само по себе аналитическое (явное) представление (3) для $m>4$ имеет вспомогательное значение. Его особенность состоит в необходимости знания всех корней.

Современные ЭВМ вычисляют корни быстро и с большой точностью. И всё же явный вид, так или иначе, является приближенным вследствие численного определения корней.

Вместе с тем эта форма имеет одно несомненное преимущество: можно говорить о непрерывном описании функции Фибоначчи при замене дискретного аргумента (в числовых последовательностях) – на непрерывный аналог.

Иначе говоря, нас интересует не столько внешний вид (удобоваримость) этой формулы, сколько возможность с помощью неё построить непрерывную функцию от непрерывного аргумента $t$. Разностный аналог не позволяет выполнить такую операцию.

Формула (3) соответствует начальным условиям $(Z_0, Z_1, ..., Z_{m-1})=(0, 0, ..., 1)$.

Но при соответствующем дополнении она расширяется и на любой набор таких "затравочных чисел".

Пусть $Z_n=Z_{n-1}+Z_{n-2}+Z_{n-3}$ – числа трибоначчи со стандартными начальными условиями $(Z_0, Z_1, Z_2)=(0, 0, 1)$.

Тогда произвольная аддитивно-рекуррентная последовательность 3-го порядка $z_n=a_2z_{n-1}+a_1z_{n-2}+a_0z_{n-3}$ с любыми начальными условиями $(z_0, z_1, z_2)$, не равными одновременно нулю, взаимосвязана с величинами $Z_n$ следующей аналитической зависимостью:

$$z_n=z_2Z_n+(z_1a_1+z_0a_0)Z_{n-1}+z_1a_0Z_{n-2}.$$

Весьма интересная комбинаторно-суммирующая формула вытекает из работы [29]:

$$z_{n+2}=\sum_{s=0}^{\lceil n/2\rceil}\sum_{r=0}^{\lceil n/3\rceil}C_{n-s-2r}^{\,s+r}\,C_{s+r}^{\,r}\,a_0^r\,a_1^s\,a_2^{n-2s-3r},$$

где $C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из $n$ по $k$, равное биномиальному коэффициенту.

Разностному уравнению $z_{n+3}=a_2z_{n+2}+a_1z_{n+1}+a_0z_n$ соответствует алгебраическое характеристическое уравнение $\lambda^3=a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$.

Если все корни $\lambda_i$ характеристического уравнения различны, то решение разностного уравнения получается в виде суммы [30] $z_n=\sum_{i=1}^{m}c_i\lambda_i^n$.

Константы $c_i$ определяются с помощью начальных условий $z_{i-1}$ из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + \quad c_2 + \ldots + \quad c_m = z_0 \ , \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_m c_m = z_1 \ , \\ \lambda_1^2 c_1 + \lambda_2^2 c_2 + \ldots + \lambda_m^2 c_m = z_2 \ , \\ \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \end{cases}$$

которая имеет единственное решение, т.к. её определитель (Вандермонда) отличен от нуля.

Для порядка уравнения $m = 3$ константы равны:

$$c_1 = \frac{\lambda_2\lambda_3 z_0 - (\lambda_2 + \lambda_3)z_1 + z_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}, \quad c_2 = \frac{\lambda_1\lambda_3 z_0 - (\lambda_1 + \lambda_3)z_1 + z_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)}, \quad c_3 = \frac{\lambda_1\lambda_2 z_0 - (\lambda_1 + \lambda_2)z_1 + z_2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}.$$

Таким образом, обобщенная функция трибоначчи для непрерывного времени $t$ равна

$$z(t) = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + c_3\lambda_3^t \tag{4}$$

и зависит от исходного набора $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ трёх исходных коэффициентов $a_{i-1}$, влияющих на значение корней $\lambda_i$, и трёх начальных условий $z_{i-1}$, от которых зависят константы $c_i$.

Разберем теперь вопрос построения огибающих линий.

Пусть начальные условия – вещественные числа.

Корни $\lambda_i$ характеристического уравнения $\lambda^3 = a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ – все действительные либо только один $\lambda_3$ вещественный и пара $(\lambda_1, \lambda_2)$ – комплексно-сопряженные.

Во втором случае величины $\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2, (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)$ – вещественные, значит, и константа $c_3$ – действительное число.

Следовательно, мнимость-действительность корней $\lambda_i$ и констант $c_i$ идентична.

Огибающие кривые в нашем случае формируются по экстремумам функции $z(t)$: нижняя – по точкам локального минимума, верхняя – по точкам локального максимума.

А это означает, что в общем случае следует оперировать модулями величин $\left|c_i\lambda_i^t\right|$ с определенным чередованием знаков (плюс–минус) перед ними.

Соответствующие огибающие линии определены нами соотношением:

$$z_k'(t) = \sum_{i=1}^{3} S_k(\lambda_i)\cdot\left|c_i\lambda_i^t\right|, \tag{5}$$

где параметр $k = \pm 1$ – идентифицирует соответственно две образующие;

$|x|$ – модуль $x$; $S_k(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ k, & x < 0 \ \text{ или } \ |\mathrm{Im}(x)| > 0. \end{cases}$

То есть знаковая функция $S_k(\lambda_i)$ равна 1, если корень $\lambda_i$ – действительный положительный, и равна $k$, если корень $\lambda_i$ – мнимый или действительный отрицательный.

Если все корни действительные, то имеет значение и знаки у констант $c_i$:

$$z_k''(t) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{sgn}(c_i) S_k(\lambda_i)\cdot\left|c_i\lambda_i^t\right|, \tag{6}$$

где $\mathrm{sgn}(x) = \{-1, \ x < 0; \quad 0, \ x = 0; \quad 1, \ x > 0\}$ – кусочно-постоянная функция знака ("сигнум").

Для функции Фибоначчи её значения в дискретных точках совпадают со значениями функций – огибающих кривых (рис. 2).

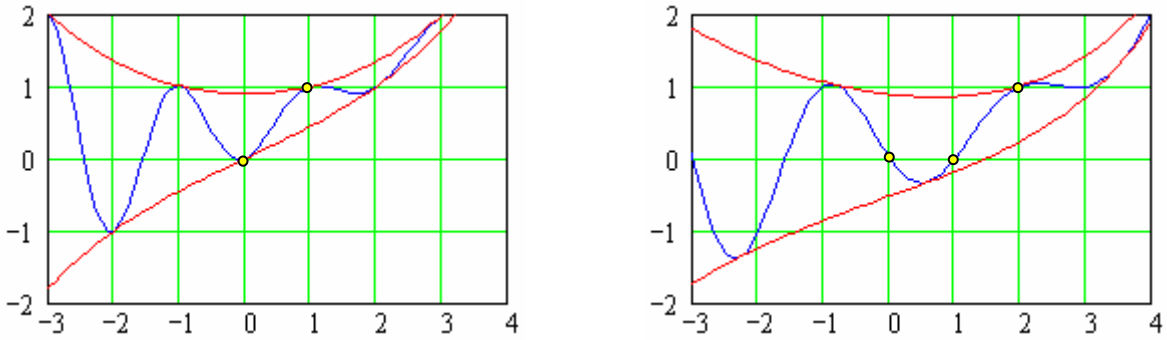


Рис. 2. Непрерывные функции Фибоначчи (слева) и трибоначчи (справа) вблизи начала координат со своими огибающими кривыми

Для функции трибоначчи картинно совершенно иная.

Каждая из огибающих линий, по сути, живет самостоятельной жизнью, но одновременно они представляют единое целое.

Наглядно видно (рис. 2 – рис. 3), что точки касания обеих образующих теперь уже не находятся в дискретных точках независимой переменной (аргумента) $t$.

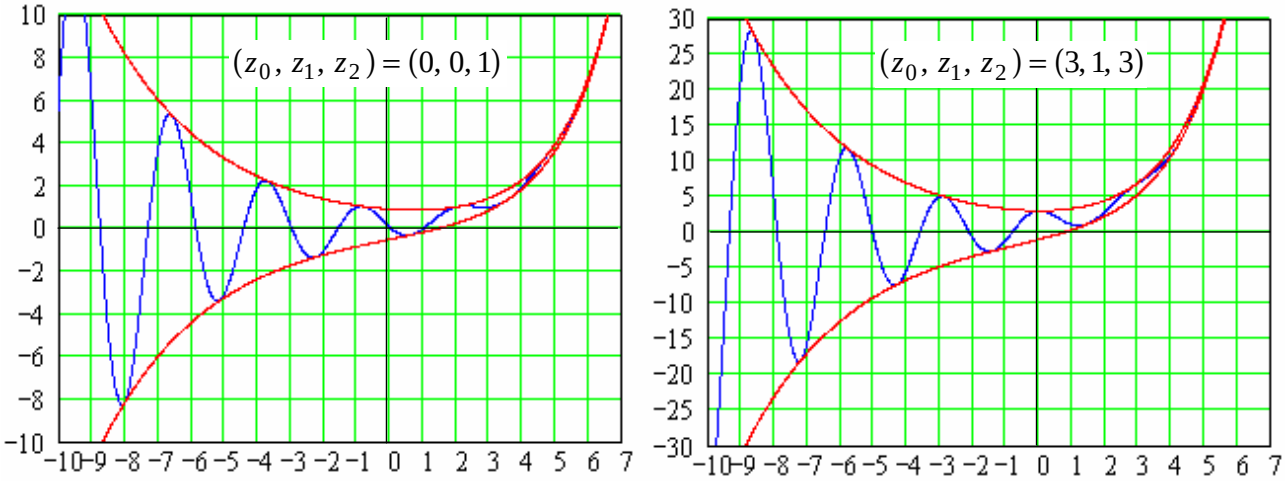



Рис. 3. Непрерывные функции трибоначчи с двумя огибающими кривыми для разностного уравнения $z_{t+3} = z_{t+2} + z_{t+1} + z_t$ и его алгебраического аналога $x^3 = x^2 + x + 1$

Нижняя огибающая вообще не проходит через начало координат и пересекает ось абсцисс в довольно произвольной (даже нецелочисленной) точке.

Обе огибающие ассиметричны относительно осей.

На рис. 4 представлены разнообразные примеры непрерывных аналогов для аддитивно-рекуррентных последовательностей 3-го порядка с двумя огибающими в зависимости от исходных данных $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ в виде коэффициентов $a_i$ и трёх начальных условий $z_i$.

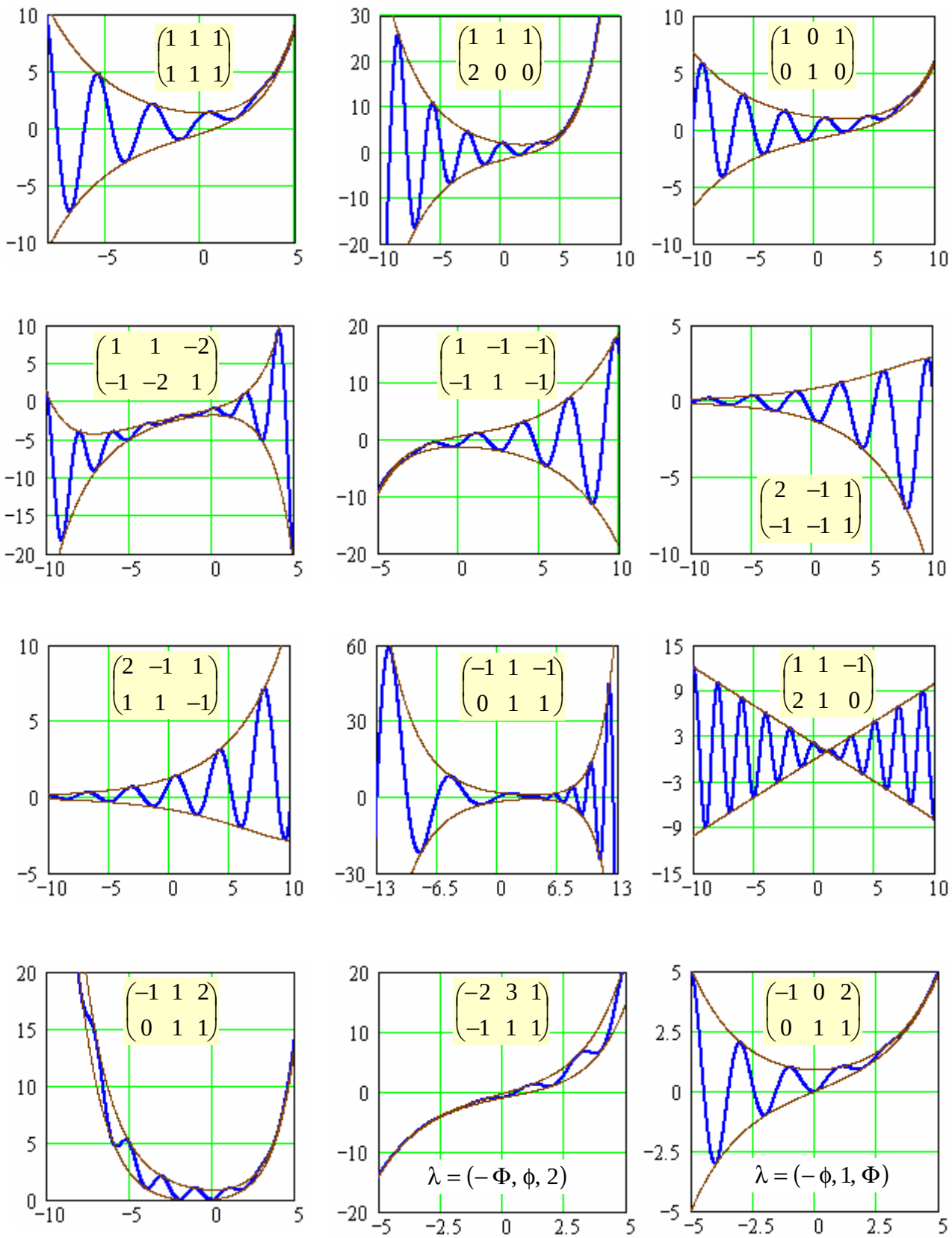



Рис. 4. Непрерывные аналоги
аддитивно-рекуррентных последовательностей третьего порядка с двумя огибающими

Анализ кривых показывает: гиперболическими функциями здесь и близко "не пахнет".

Это свидетельствует о том, что подход ГФЛ уже при простом переходе на кубические уравнения "захлёбывается", не оставляя малейшей надежды на свою реанимацию.

В таком случае следует одно: признать его крайнюю ограниченность и двигаться дальше на основе привычной апробированной математики с хорошо разработанной теорией огибающих кривых и асимптот.

Поэтому терминологически правильно говорить о непрерывных <обобщенных> функциях Фибоначчи со своими огибающими линиями (Василенко).

Приведем некоторые примеры нахождения образующих по формулам (5)–(6):

**1)** $$z_k(t) = k \cdot \left|c_1\lambda_1^t\right| + k \cdot \left|c_2\lambda_2^t\right| + k \cdot \left|c_3\lambda_3^t\right|,$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} -0.466 \\ 1.233 + 0.793i \\ 1.233 - 0.793i \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0.194 \\ 0.403 - 0.061i \\ 0.403 + 0.061i \end{pmatrix}$$

**2)** $$z_k(t) = k \cdot \left|c_1\lambda_1^t\right| + k \cdot \left|c_2\lambda_2^t\right| + 1 \cdot \left|c_3\lambda_3^t\right|,$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} -1.233 - 0.793i \\ -1.233 + 0.793i \\ 0.466 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -0.299 - 0.304i \\ -0.299 + 0.304i \\ 1.598 \end{pmatrix}$$

**3)** $$z_k(t) = k \cdot \left|c_1\lambda_1^t\right| - 1 \cdot \left|c_2\lambda_2^t\right| + 1 \cdot \left|c_3\lambda_3^t\right|,$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} -1.247 \\ 0.445 \\ 1.802 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -0.242 \\ -0.194 \\ 0.436 \end{pmatrix}$$

**4)** $$z_k(t) = k \cdot \left|c_1\lambda_1^t\right| + 1 \cdot \left|c_2\lambda_2^t\right| + 1 \cdot \left|c_3\lambda_3^t\right|,$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} -1.247 \\ 0.445 \\ 1.802 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -0.086 \\ 0.785 \\ 0.301 \end{pmatrix}$$

**5)** $$z_k(t) = k \cdot \left|c_1\lambda_1^t\right| + 1 \cdot \left|c_2\lambda_2^t\right| - 1 \cdot \left|c_3\lambda_3^t\right|,$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} -1.247 \\ 0.445 \\ 1.802 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0.155 \\ 0.979 \\ -0.134 \end{pmatrix}$$

**6)** $$z_k(t) = k \cdot \left|c_1\lambda_1^t\right| - k \cdot \left|c_2\lambda_2^t\right| + 1 \cdot \left|c_3\lambda_3^t\right|,$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} -1.618 \\ -1 \\ 0.618 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0.553 \\ -1 \\ 1.447 \end{pmatrix}$$

**7)** $$z_k(t) = -k \cdot \left|c_1\lambda_1^t\right| + k \cdot \left|c_2\lambda_2^t\right| + 1 \cdot \left|c_3\lambda_3^t\right|,$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{pmatrix} -1.618 \\ -1 \\ 0.618 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -0.447 \\ 1 \\ 0.447 \end{pmatrix}$$

Отметим также одну особенность, связанную с возможным пересечением двух огибающих линий так, что колебательная функция продолжает оставаться в пределах их коридора (рис. 5). Образующие пересекаются или могут касаться друг друга примерно как в вышеупомянутой теореме о милиционерах.

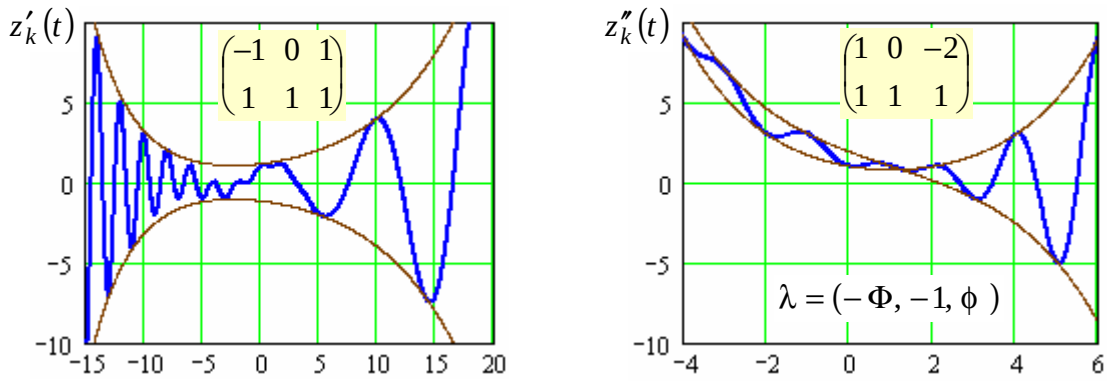



Рис. 5. Два примера огибающих для разных исходных данных

В этом плане показателен также пример (рис. 6) альтернативного прохождения огибающих кривых по формулам (5) и (6) со следующими параметрами:

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda = \begin{pmatrix} -3.214 \\ -0.461 \\ 0.675 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -0.029 \\ 0.694 \\ 0.335 \end{pmatrix}$$

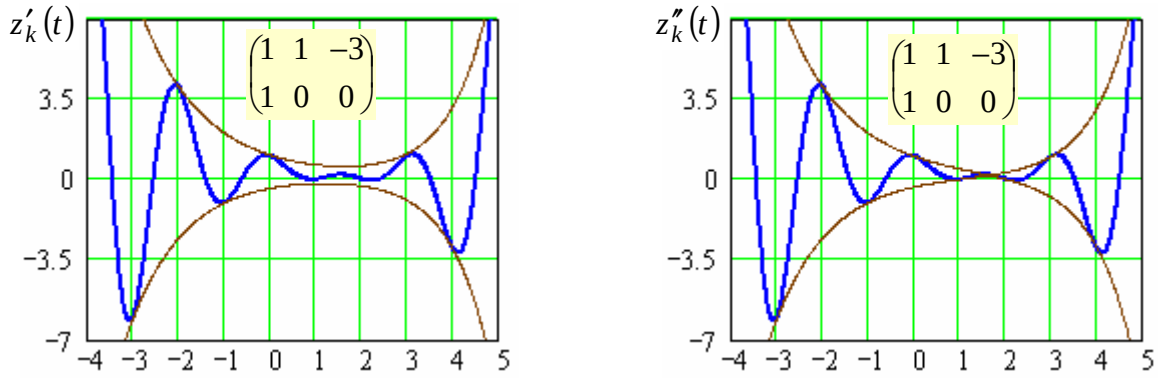



Рис. 6. Два примера прохождения огибающих для одинаковых начальных условий

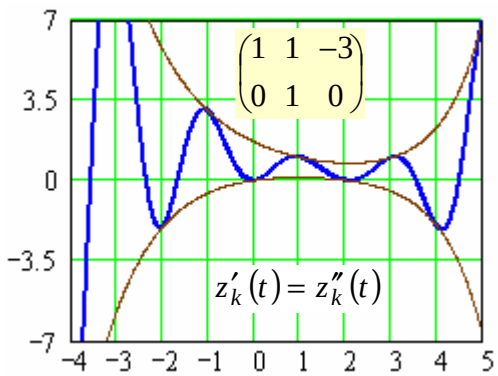



Рис. 7. Огибающие линии для измененных исходных данных

Но уже при незначительном изменении начальных условий обе формулы (5)–(6) дают одинаковый результат (рис. 7)

$$z_k(t) = -k \cdot \left|c_1\lambda_1^t\right| - k \cdot \left|c_2\lambda_2^t\right| + 1 \cdot \left|c_3\lambda_3^t\right|$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} -3.214 \\ -0.461 \\ 0.675 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -0.02 \\ -0.812 \\ 0.832 \end{pmatrix}$$

Это еще одно свидетельство не в пользу ГФЛ.

Данные функции изначально дают трафаретный результат и совершенно не приспособлены к обобщению и изменению в исходных данных.

***Две судьбы…***

*И божество, и вдохновенье, и жизнь,*
*и слезы и любовь* (А.Пушкин)

Оба ученых искренне верили и продолжают верить в свои функции.

Взаимный переход функций (1)−(2) – это не просто формальные множители. Это еще и обеспечение возможности физического измерения систем в выбранных единицах:

– в работе [2] они нормальные (в образах гиперболических функций), безразмерные, но не дают физически-измеряемых приложений;

– в статье [3], наоборот, дают физическую интерпретацию (измеримость), но начисто теряют математическую гиперболичность (симметрию, пересечение функций с осями координат) и возможность дальнейшей формализации.

Свойства числовых последовательностей Фибоначчи по определению легко обобщаются для аддитивных систем практически любого вида и степени усложнения.

В ГФЛ имеем налицо нарушение этого свойства, в том числе, из-за элементарных противоречий с единицами измерения.

В результате, уже при расширении ГФЛ на квадратное уравнение общего вида $x^2 = px + q$ мы наталкиваемся на принципиально непреодолимые препятствия. А значит, их теоретическая база имеет слабую подоснову, если не сказать, вообще об её отсутствии.

Функции введены излишне формально:

- ✓ без каких-либо требований (веяний) времени;
- ✓ чисто по внешним признакам пресловутой похожести на классические гиперболические функции;
- ✓ с искажением картины в интерпретации физического смысла;
- ✓ с нарушением правил нормировки.

Сами по себе ГФЛ не представляют ценности.

Это примерно, то же самое, если уже известное (явное) обозначить функцией и объявить о её новизне.

Данные искусственные математические образования не имеют под собой ни строгой научной теории, ни каких-либо элементов развития или обобщения.

А потому, вопреки громким заявлениям, революции в этом плане не будет: ни научной, ни золотой, ни тем более одновременно "научно-золотой".

Так, что мы свою ошибочность в ранних исследованиях не только признали, но и предложили альтернативное решение, которое выводит нас на новые рубежи познания.

Остается пожелать то же самое и другим авторам, дабы двигаться дальше вместе по пути созидания и обоснования математических основ (начал) гармонии.

«Хвататься за соломинку» здесь не желательно. – Следует думать более глобально, благо математика это позволяет делать с карандашом в руке.

И как говорил Леонардо да Винчи: «Критикуй мнение, а не автора».

В этой связи позволим себе напомнить некоторые ставшие уже классическими истины.

«Заблуждения неизбежны в науке, но заблуждения не есть лженаука» [31].

«Сам метод науки – это метод проб и ошибок. Ошибки – её неотъемлемая часть» [32].

Псевдонаука явно не отвечает такому критерию как *критичность*: «"Ученый может ошибаться, но лжеученый настаивает на своих ошибках", – это определение академика П.Капицы... Насколько низка планка критичности, настолько высоки амбиции. Волькенштейн вообще вывел "формулу псевдонауки": «Степень лженаучности определяется произведением двух сомножителей: степени невежества и уровня претензий» [33].

ГФЛ имеют отдаленное отношение к теории гиперболических функций, и название в данном случае используется только для их аутентичности с первоисточниками с целью лучшей идентификации предмета исследований.

В целом о ГФЛ можно сказать следующее:

– они не являются самостоятельным математическим объектом, и есть огибающие линии к непрерывным функциям Фибоначчи, которые характеризуются квадратным уравнением $x^2 = px + 1$;

– не отвечают элементарным требованиям к гиперболическим функциям и не имеют адекватного и четкого гиперболического представления;

– принципиально (в силу непреодолимых обстоятельств математического характера) не расширяются уже для квадратного уравнения общего вида $x^2 = px + q$;

– принципиально (из-за практически непреодолимых причин математического содержания) не расширяются для уравнений третьего порядка и выше, в частности довольно простых алгебраических уравнений $x^3 = x^2 + x + 1$ (трибоначчи), $x^3 = x^2 + 1$ (Пойа) и др.

Таким образом, являясь изначально синонимом-озвучиванием известных в математике "образующих", по своей сути и форме они теряют с этими кривыми всякую органическую связь уже при небольшом усложнении разностных уравнений – прямых прообразов последовательностей Фибоначчи.

В целом наиболее рационально признать ГФЛ ошибочными выкладками и перейти на традиционно-апробированное математическое описание семейства непрерывных функций с их огибающими линиями.

Тем более, пока полностью нерешенным остается получение аналитического вида огибающих для алгебраического уравнения общего вида $n$-го порядка.

Данная задача представляет теоретический и практический интерес и может быть рекомендована профессиональным математикам для решения и научного обоснования.

Следует также заметить, что последовательности Фибоначчи в области положительных чисел по своей сути имеют гиперболические свойства, а точнее свойства геометрических прогрессий, однако, это не связано с их представлением гиперболическими функциями.

А в самой ближайшей перспективе можно говорить о четком математическом представлении «Метода огибающих для исследования последовательностей Фибоначчи».

Представления ГФЛ (1)–(2), к сожалению, не развивают данное направление, а загоняют его в гиперболический лабиринт.

Введенные на формально-математическом уровне (без привязки к решению конкретных задач), ГФЛ не отвечают минимально-необходимому набору основных математических требований и имеют неустранимые противоречия:

1. Косинус в его привычном представлении для нулевого аргумента отличен от 1.

В то же время аксиоматическое определение гиперболических функций [34] подразумевает обязательное выполнение условия $\operatorname{ch} 0 = 1$.

2. Не выполняется ни одно из привычных тригонометрических тождеств. Буквально все классические формулы меняются, причем отдельно под числа Фибоначчи, затем под числа Люка и так далее под каждую новую пару начальных условий.

3. Все функции также различны для разных начальных условий, то есть для каждой пары "затравочных чисел" формируется свой набор и геометрия функций.

4. При изменении начальных условий происходит полная трансформация функций ГФЛ с нарушением их симметрии и основных базовых свойств (четности – нечетности, точек пересечения с осями координат и др.).

5. Для случая $q > 1$ (свободный член квадратного уравнения) ГФЛ вообще не работают, равно как и для разностных уравнений, выше второго порядка.

### *Колесо судьбы...*

*На одном колесе не уедешь* (русская поговорка)

"*Колесо судьбы коварно, поворот любой возможен*" (Хусрави)

Итак, ГФЛ в их первозданном виде – удел исторического архива.

Да и что хотели от тривиальной перезаписи функциональных обозначений, которые ничем не подкрепляются: ни алгеброй, ни геометрией. А вместо "$e$" в формуле Эйлера формально может быть поставлено любое число, хоть "$\pi$".

ГФЛ сменяются двумя огибающими кривыми, в коридоре которых изменяется непрерывная обобщенная функция Фибоначчи.

В большинстве случаев (с правильным подбором коэффициентов) она воспроизводит колебательный процесс приближения к аттрактору – максимальному по модулю корню алгебраического характеристического уравнения.

Вид функции Фибоначчи зависит от порядка $m$ и коэффициентов уравнения, а также начальных условий в $m$ дискретные моменты времени.

Можно ли говорить, что исследования по ГФЛ проведены напрасно? – Конечно, нет.

В математике ничего не бывает бесполезного.

Даже исходя из положения, что отрицательный результат – тоже результат.

Ну, а потом здесь просматривается один любопытный итог.

Получается, что в смысле гиперболичности уравнение $x^2 = px + 1$ является границей симметричности относительно начала координат. То есть не исключено, что это упрощенное представление некоторой межи, когда законы физики в той же ньютоновой механике не имеют адекватного теоретического развития в обратном течении времени.

В этой связи вспоминаются слова великого Гильберта [35].

При исследовании математических проблем специализация играет более важную роль, чем обобщение. Возможно, что в большинстве случаев, когда мы напрасно ищем ответа на вопрос, причина нашей неудачи заключается в том, что еще не полностью решены более простые и легкие проблемы, чем данная. Тогда все дело заключается в том, чтобы найти эти более легкие проблемы и осуществить их решение наиболее совершенными средствами, при помощи понятий, поддающихся обобщению. Это правило является одним из самых мощных рычагов для преодоления математических трудностей. В большинстве случаев этот рычаг и приводят в действие, подчас бессознательно.

Кроме того, анализ двух- и трехчленных аддитивных рекурсий наводит на размышления относительно неоднозначности толкования и построения общей теории в понятиях триады[10] в диалектике:

- тройка как совокупность целого и двух составных его частей, условно «белого – черного», с выходом на задачу золотого сечения отрезка;
- тройка как состояние целого, состоящего из трех частей, условно «белого – серого – черного», с выходом на пропорции в треугольнике, вурфы и т.п.

Есть наука, а есть наукообразие.

Как бы витиевато не назывались, но по своей природе ГФЛ ближе ко второму.

Дальнейшие исследования по затронутой теме целесообразно сосредоточить на получении аналитического решения огибающих (образующих) для обобщенных непрерывных функций Фибоначчи, соответствующих характеристическому алгебраическому уравнению общего вида $m$-го порядка, с произвольными начальными условиями.

---

[10] Троичность, трёхступенчатость, характеризующая в философии Гегеля (1770–1831) всё тоже диалектическое развитие по схеме: тезис, антитезис, синтез.

**Литература:**


1. *Василенко С.Л., Корнеев А.А.* Матричный метод числового структурирования или "нырок с глубоким погружением" ... 20 лет спустя // Числонавтика. – 27.10.2009. – http://www.numbernautics.ru/content/view/579/30/.

2. *Боднар О.Я.* Геометрия филлотаксиса // Доклады Академии наук УССР. – 1992. – № 9. – С. 9–15.

3. *Стахов А.П., Ткаченко И.С.* Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи // Доклады Академии наук Украины, 1993. – Т. 208, № 7. – С. 9–14.

4. *Weisstein E.W.* Fibonacci Hyperbolic Functions / From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/FibonacciHyperbolicFunctions.html.

5. *Стахов А.П.* Гиперболические функции Фибоначчи и Люка: история и приложения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14429, 31.05.2007. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321057.htm.

6. *Стахов А.П.* Роль гиперболических функций Фибоначчи и Люка в развитии современной науки и «современной теории чисел Фибоначчи» (к обоснованию «Математики Гармонии») // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15334, 10.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321113.htm.

7. *Успенский В.А.* Апология математики, или о математике как части духовной культуры // Новый Мир. – 2007. – № 11–12.

8. *Стахов А.П.* Отклик на книгу С.А. Ясинского «Основы динамических аналогий в исследовательской деятельности» // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15611, 23.10.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/007a/02321010.htm.

9. *Ярош В.С.* О смысле цифры "7" и золотом ладе А. Корнеева // Числонавтика. – 26.10.2009. – http://www.numbernautics.ru/content/view/578/38/.

10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1974. – 832 с.

11. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учеб. для вузов. – 7-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 648 с. / Учебник удостоен государственной премии СССР за 1980 г.

12. *Огибающая* // Википедия. Обновление: 02.01.2009. http://ru.wikipedia.org/?oldid=12868423.

13. *Залгаллер В.А.* Теория огибающих. – М.: Наука, 1975. – 104 с.

14. *Эйрес Р.* Прогнозирование на основе огибающих кривых // Сб. науч. ст. "Научно-техническое прогнозирование для промышленности и правительственных учреждений". – М.: Прогресс, 1972. – 270 с.

15. *Лопатников Л.И.* Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Дело, 2003. – 520 с. – http://slovari.yandex.ru/dict/lopatnikov.

16. *Болтянский В.Г.* Огибающая. – М.: Физматгиз, 1961. – 77 с.

17. *Беляева Т.Б., Залгаллер В.А.* Об изложении теории огибающих (методическая заметка). – Успехи математ. наук. – 1963. – Т. 18, вып. 5(113). – С. 147–149. – http://mi.mathnet.ru/umn6413.

18. *Бескин Н.М.* Бесконечные цепные дроби // Квант. – 1970. – № 8. – С. 10–20 http://kvant.mirror1.mccme.ru/1970/08/beskonechnye_cepnye_drobi.htm .

19. *Василенко С.Л.* Гиперболические функции "золотого" сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14931, 05.12.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321092.htm.

20. *Василенко С.Л.* "Золотые" гиперболические миры // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15103 от 17.02.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321094.htm.

21. *Василенко С.Л.* Аналитика "золотых" пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.

22. *Василенко С.Л.* Гиперболические лабиринты на пути к гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15513, 06.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161539.htm.

23. *Стахов А.П.* Какой тип "золотых" гиперболических функций использует Природа в ботаническом явлении филлотаксиса? // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15476, 16.08.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321148.htm.

24. *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов: Пер. с англ. – М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 272 с. / Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 /.

25. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.

26. *Строительный словарь*. – http://www.edudic.ru/str/80.

27. *Generalizations* of Fibonacci numbers // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Generalizations_of_Fibonacci_numbers#Tribonacci_numbers.

28. *Василенко С.Л.* О бедном квадрате замолвите слово... // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15675, 28.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161586.htm.

29. *Кузьмин О.В.* Обобщения чисел Фибоначчи и Трибоначчи // Оптимизация, управление, интеллект. – 2000. – № 4. – С. 188–198.

30. *Утешев А.Ю.* Разностное уравнение и рекуррентная последовательность. – http://pmpu.ru/vf4/recurr.

31. *Мигдал А.Б.* Отличима ли истина ото лжи // Наука и жизнь. – 1982. – № 1. – С. 60–67. – http://www.skeptik.net/pseudo/migdal1.htm.

32. *Абелев Г.И.* Об истоках псевдонауки // Здравый смысл. – 2002. – № 1. – С. 8–9.

33. *Павлов Д.О.* Псевдонаука и соционика // Школа гуманитарной соционики. – 2006. – http://socionics.kiev.ua/articles/methodology/pseudo/.

34. *Вольперт А.Я.* Аксиоматическое определение гиперболических функций // Функциональный анализ и теория функций / Учен. зап. Казан. гос. ун-та. – Т. 129, № 3. – Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1969. – С. 65–75. – www.mathnet.ru/uzku31.

35. *Гильберт Д.* Математические проблемы / Доклад на II Международном Конгрессе математиков (Париж, 1900). – http://edu-sergeev.narod.ru/facts/Gilbert.htm.

© ВаСиЛенко, 2010

*Китайский символ счастливого случая (судьбы)*