С.Л. Василенко

Новый взгляд на систематику «Фибоначчи – золотое сечение»

ЗС и числа Фибоначчи –
родные братья, не иначе.

Если генномодифицированная соя влияет на уровень тестостерона у крыс[1] – самой "выживаемой популяции", так что там говорить об остальном живом.

Похоже, что и числа Фибоначчи, возникшие из незатейливой задачки о бессмертно-эфемерных кроликах, – больше безотносительная абстракция, чем реальность, не имеющая подтверждения на практике. Но может иметь место в отвлеченной теории чисел (целых) и отдельных приложениях в технических системах.

То есть, это типичная разновидность математической модели, которая в чистом виде не встречается из-за многочисленных влияний внешних воздействий и ограничивающих факторов. В то же время золотое сечение (ЗС), в основе которого лежит иррациональный корень квадратный из пяти, – идеальная конструкция, работающая в десятичном представлении с триллионами и более знаков после запятой.

Возможно, именно поэтому пока не обнаружено природных процессов, которые могли бы продемонстрировать реальную связь чисел Фибоначчи и ЗС.

Да её, скорее всего, и нет...

Это красивая теория в чистом виде, легко проверяемая средствами математики. И кроме математического начала (типа 1000-мерного пространства) в ней ничего больше нет.

Та же программа филлотаксиса в этом контексте – не есть безусловное доказательство, поскольку она практически сразу же "сбивается" после своего рождения.

Да и кролики – ушастые создания из задачи Фибоначчи, по понятным причинам, до сих пор не заполонили Землю...

Мы не будем повторять известные изящные закономерности чисел Фибоначчи и золотого сечения, надеясь, что они большей частью читателям знакомы или могут быть почерпаны из разных литературных источников.

Наша задача состоит в ином. А именно: в осмыслении и расстановке точек опоры в систематике отношений между двумя математическими конструкциями: золотым сечением и числовыми последовательностями Фибоначчи.

Золотое сечение: мысли о главном. Прообраз золотого сечения появился еще в античные времена. В "Началах" Евклид увязывал его главным образом с геометрическим построением правильного 5-угольника, а также Платоновых тел: икосаэдра и додекаэдра, имеющих возле каждой вершины соответственно по 5 3-угольных и 3 5-угольных граней.

Формообразующей подосновой здесь выступает число 5, которое в свою очередь воссоздается прямоугольным треугольником с соотношением катетов $1:2$, так как $1^2+2^2=5$. Именно поэтому данная фигура обычно берется в основу геометрических построений ЗС.

В алгебре ЗС тесно переплетается с гармонической пропорцией, у которой средние члены равны между собой, а последний член представляет собой разность между первым и средним, то есть $a:b = b:(a-b)$.

Разложение числа a на два слагаемых b и $a-b$ называют гармоническим делением или золотым сечением.

Полагая для определенности $a = 1$, приходим к квадратному уравнению $b^2 + b = 1$ с положительным корнем $\varphi = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0{,}618$.

---

[1] http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161613.htm.

Взаимообусловленные числа ЗС (1,618 0,618) – корни уравнений $x^2 \pm x = 1$ – являются воистину уникальными.

Они единственны в своем роде и обладают самопроизвольной обратимостью относительно основных арифметических операций (сложения и умножения), которые отражают многие природные процессы развития в их числовой интерпретации.

Конечно, есть и другие похожие константы, – те же корни квадратного уравнения общего вида (с коэффициентами, большими 1).

Но для демонстрирования своих обратимых свойств они требуют уже привлечения дополнительных чисел, отличных от единичной монады 1.

Насколько это существенный и определяющий момент в мироздании, однозначно сказать трудно. Можно только предполагать и строить гипотезы.

Однако данный факт, скорее всего, имеет главенствующее значение в интерпретации и физической реализации всего того, что нами принято включать в понятие "целого" – 1.

В этом абстрактно-модельном контексте число ЗС можно считать ключевой цементирующей константой, способной объединить вокруг себя большой круг фундаментальных сущностей Вселенных.

Алхимики XX века. За счет комбинирования набора коэффициентов и их численных значений любое алгебраическое уравнение второго порядка и выше содержит в себе частным случаем уравнение ЗС, как впрочем, и многие другие.

Исходя из этого, в погоне за звучными сенсациями, но вопреки общепринятой логике и здравому смыслу, некоторые авторы наделяли золотоносной терминологией довольно произвольные математические конструкции. В результате появились надуманные псевдообобщения типа «золотые *p*-сечения», «золотые *p*-пропорции» и др.

Понятно, что ничего общего с теорией ЗС подобные "клоны" не имеют, поскольку числовые константы не обобщаются в принципе.

В то же время практически любому алгебраическому уравнению можно сопоставить его адекватное отображение в виде разностного уравнения с порождающей рекуррентной (лат. *recurrentis* – возвратной) числовой последовательностью, соседние члены которой обычно сходятся к фиксированному значению – аттрактору.

Числа Фибоначчи: размышления о главном. Для определенности предлагается использовать простую классификацию [1]:

1. *Числа Фибоначчи* – классическая последовательность $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ с начальными условиями $(F_0, F_1) = (0,\ 1)$: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 …[2]

2. *Ряды Фибоначчи* – последовательности $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} = f_1 F_n + f_0 F_{n-1}$ с произвольными начальными условиями $(f_0,\ f_1)$, не равными одновременно нулю.

3. *Цепи Фибоначчи* – бесчисленное множество аддитивно-рекуррентных последовательностей в виде уравнения суммирующей $(m+1)$-членной *V*-рекурсии [2]

$$V_{n+2m} = \sum_{j=1}^{m} V_{n+2j-1} + V_n . \qquad (1)$$

Данная рекурсия порождается обобщенным уравнением золотого сечения $x^{2m} = \sum_{j=1}^{m} x^{2j-1} + 1$, которое для любых натуральных m имеет максимальный по модулю положительный корень $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

---

[2] Числовой ряд вырос из задачи с кроликами, которую Фибоначчи изложил в своей книге *Liber abacci* (1202), написанной более 800 лет назад.

4. *Обобщенные последовательности Фибоначчи* – все другие обобщения аддитивно-рекуррентного вида, которые в отличие от первых трёх не обладают явными признаками ЗС.

Уже, исходя из приведенной классификации, можно обоснованно утверждать, что с точки зрения золотого сечения сами по себе числа Фибоначчи F_n, вопреки сложившемуся мнению, особо не примечательны. Можно взять любые два числа (трансцендентные, иррациональные, комплексные) $(f_0,\ f_1)$ и убедиться, что начав с них, всегда получается сколь угодно близкое приближение к золотому сечению в виде отношения соседних членов.

Это очевидным образом следует из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} F_{n+k}/F_n = \Phi^k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+k}}{f_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{f_0F_{n+k-1} + f_1F_{n+k}}{f_0F_{n-1} + f_1F_n} = \left\| \times F_{n-1}^{-1} \right\| = \frac{f_0\Phi^k + f_1\Phi^{k+1}}{f_0 + f_1\Phi} = \Phi^k .$$

Кстати, использование мнимых чисел в качестве затравочных может приводить к вещественным элементам. Не так часто, но мнимое число в мнимой степени способно давать действительный результат.

Например, после возведения членов формулы Эйлера $e^{i\pi} = -1$ в комплексную степень i: $e^{-\pi} = (-1)^i$ и извлечения квадратного корня получаем $\sqrt{e^{-\pi}} = \sqrt{(-1)^i} = \sqrt{(-1)}^i = i^i \approx 0{,}208$.

Так что подоснова золотого сечения создается не числами Фибоначчи F_n, а исключительно двучленно-аддитивной рекурсией.

И ей не важно, что (какие числа) складывать. Результат рекурсии в соотношении последовательных членов всегда будет один и тот же – стремление в пределе к ЗС.

Первопричиной является рекуррентная процедура структурного генеза с условно-символьной формой:

«завтра = сегодня + вчера».

Причем "сегодня" и "вчера" имеют равный масштаб и равноценны, то есть берутся с одинаковыми весами или пропорциональными коэффициентами, равными 1.

Форма «завтра = сегодня + вчера» в своей аббревиатуре тождественно эквивалентна другой адекватно-знаковой записи «ЗСВ ≡ ЗС всегда».

Любое натуральное число N может стать членом подходящего ряда Фибоначчи f_n, а значит и "соучастником формирования пути следования к ЗС".

Для этого достаточно подобрать исходную пару $(f_0,\ f_1)$ начальных условий, в частности, реверсным методом идентификации рекуррентных рядов с использованием обратной рекурсии [3, 4].

Алгоритмическая процедура следует из закона существования и единственности рационального золотого сечения (РЗС) в целочисленных переменных [3], согласно которому любому натуральному числу N соответствует одно РЗС такое, что

$$N = \left\langle N\Phi^{-1} \right\rangle + \left\langle N\Phi^{-2} \right\rangle ,$$

где $\langle z \rangle$ – ближайшее целое к z, если $z > 0$.

В конце концов, само число N может стать одним из "затравочных" величин $(f_0,\ f_1)$.

Например, РЗС числа 60 дает числа 37 и 23. Характерно[3], что у человека 23 пары хромосом, в его руке 23 сустава, в латинском алфавите 23 буквы и т.д.

---

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/23_(number).

А вот цепи (1) по-своему и вовсе уникальны.

Они могут иметь сколь угодно много произвольных начальных условий (НУ) $(V_0, V_1, \dots, V_{2m-1})$.

Более того. При любых НУ (затравочных числах) все "многомерные" цепи сходятся к своему единственному аттрактору – числу Φ и его степеням: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{V_{n+k}}{V_n} = \Phi^k$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

В этом смысле изначальное алгебраическое уравнение $2m$-порядка действительно является обобщенным.

ЗС и числа Фибоначчи. – Даже умудренные опытом специалисты обыкновенно говорят, что золотое сечение порождается числами Фибоначчи.

В принципе, да. В известной мере.

Но по охвату общей ситуации это весьма слабое утверждение, которое скорее сужает и затуманивает проблематику, чем её раскрывает.

Прежде всего, здесь следует выделить два совершенно разных и принципиальных момента:

1. С точки зрения математики, ЗС и числа Фибоначчи – две большие разницы!
   Это абсолютно разные математические структуры.
2. ЗС порождается не числами Фибоначчи, а закономерностью их формирования в виде двухчленно-аддитивной рекурсии!

Иначе говоря, *золотое сечение генетически обусловлено процедурой* получения членов числового ряда и не имеет прямого отношения к самим числам Фибоначчи, представленным последовательностью F_n.

Таким образом, известная «кроличья сага» (по Фибоначчи) – это изначально искусственная, выхолощенная и до предела идеализированная задача.

Однако у неё есть неизменно существенные плюсы:

- порождение самой простой аддитивной рекурсии, – менее двух слагаемых при суммировании просто не бывает;
- использование специфически примитивных и одновременно универсальных начальных условий (0, 1), порождающих через их сумму число 1, – то есть начало синтезируется единицей, как в натуральном ряде.

Исходная пара (0, 0) недееспособна, – в смысле образования числового ряда.

Пара (1, 0) уже после первого суммирования приводит к (0, 1). Поэтому пара начальных условий (0, 1) – элементарнейшая в области неотрицательных целых чисел.

Благодаря комплексу таких, очевидно простых, отправных положений и образуется отличная математическая модель.

Не случайно насчитываются сотни самых разных аналитических зависимостей, которые устанавливают связь между числами Фибоначчи F_n.

Кстати о … кроликах.

Кролики – не только ценный мех, но и 2–3 кг легкоусвояемого диетического мяса.

Слова данного эпиграфа взяты из одной юмористической интермедии.

Вообще-то они вполне естественны и отражают суть-подоснову кролиководства.

Но что характерно, чтобы приблизиться к ЗС, в математической задаче Фибоначчи животные не гибнут. Они живее всех живых.

Тем удивительнее читать её вольные интерпретации, будто «Закономерным является тот факт, что каждая пара кроликов порождает ещё две пары на протяжении жизни, а затем погибает» [5].

На самом деле всё не так, и оригинальный авторский текст восьмисотлетней давности весьма близок к гимну о кроличьем рае: «Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения» [6, с. 8].

То есть новорожденная пара в течение месяца вырастает (созревает) и затем каждый месяц приносит приплод в виде пары себе подобных.

Отдадим должное незаурядному феномену ученого Фибоначчи. Ибо «сконструировать пример, вообще говоря, сложнее, чем доказать существование» [7, с. 131]. Тем не менее, с позиций истинных реалий в увязке с ЗС мы не можем довольствоваться, мягко говоря, несообразной кроличьей утопией с неограниченной продолжительностью жизнью всех пар.

Ранее уже отмечались [8] некоторые издержки данной задачи. В частности, зоологические анормальности и высокая степень идеализации, существенно оторванная от практических реалий. Например, допущение бессмертия ушастых созданий.

ЗС по числам Фибоначчи – это вечная жизнь. В прямом и переносном смыслах.

Модель роста Фибоначчи – это гиперболический закон.

В природе подобного нет, разве что только на первоначальной стадии развития, или слабо выражено.

Далее вступают в силу разного род ограничения или лимитирующие факторы.

Среди главных из них можно выделить фиксированную продолжительность биологической жизни, ограниченность потребляемых ресурсов и др.

Так, если в стандартной задаче о кроликах принять верхний порог времени их существования на уровне, положим, четырёх поколений, то итерационная модель предстанет в виде уравнения обобщенной трёхчленной последовательности Фибоначчи

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \Longrightarrow \qquad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-4}$$

или

$$u_{n+4} = u_{n+3} + u_{n+2} - u_n . \qquad (2)$$

Здесь вычитаемый элемент как раз и отражает момент выбывания данного поколения.

Алгебраический аналог имеет вид $x^4 = x^3 + x^2 - 1$ или $x^r\left(x^2 - x - 1\right) + 1 = 0$, $r = 2$.

Легко убедиться, что один из его корней равен 1.

Однако наибольший по модулю корень уравнения, а именно к нему по теореме Бернулли стремится отношение соседних членов последовательности, равен

$$\lambda_2 = \frac{a}{6} + \frac{2}{a} \approx 1{,}325, \quad \text{где} \quad a = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{69}} .$$

Это более-менее реальное «кроличье сечение» (рис. 1), если так можно выразиться.

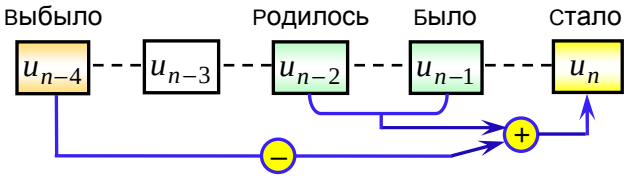

Рис. 1. Условная схема формирования "кроличьего сечения": $r = 2$

Понятно, что тут заложена совершенно иная систематика, нежели золотое сечение в своем единственно классическом проявлении.

Так, соседние числа Фибоначчи F_n, F_{n+1} взаимно просты [6, с. 45], то есть не имеют общих делителей, а соседние члены f_n, f_{n+1} какого-либо ряда Фибоначчи содержат только те общие делители, что и затравочные числа f_0, f_1 [1].

Обобщенная последовательность (2) уже имеет совершенно иные структурно образующие характеристики.

В частности, мы видим (табл. 1), у соседних чисел 27 и 36 есть общие делители: 3 и 9.

Таблица 1

Начальные значения фибоначчиевых последовательностей

Обобщенная последовательность $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-4}$	0	0	0	1	1	2	3	4	6	8	11	15	20	27	36
Числа Фибоначчи $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$	–	–	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Примечательно, что в данной таблице $36 = 6^2$ и $144 = 12^2$.

Причем 144 – единственный квадрат среди чисел Фибоначчи F_n.

Более того, 144 – минимальное натуральное число, пятая степень которого может быть представлена в виде суммы четырёх пятых степеней других натуральных чисел:

$$144^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5.$$

Кроме того, существует интересная реверсная (зеркальная) закономерность:

$$12^2 = 144 \quad \text{и} \quad 441 = 21^2.$$

Но это так, к слову...

Некоторые обобщения. Итак, в стандартной задаче каждая новорожденная пара кроликов становится зрелой уже через месяц и затем через месяц регулярно дает жизнь новой паре кроликов.

Так что к концу *n*-го месяца будет F_n пар, из них F_{n-1} зрелых.

Одно из обобщений "ушастой задачи" выполнил проф. А.Стахов, перейдя к расширенной модели в виде алгебраического уравнения

$$x^p = x^{p-1} + 1. \qquad (3)$$

Оно означает, что молодые кролики начинают рожать через p месяцев после рождения. По сути, исходная задача расширилась на свой биологический аналог с фиксированным и априори задаваемым периодом половой зрелости.

Однако, будучи очарованным золотым сечением, автор не преминул терминологически позолотить многочисленные решения уравнения (3) для всевозможных натуральных значений *p*. Так, обобщение задачи неправомерно повлекло за собой псевдообобщение константы золотого сечения.

В условиях больших временных фреймов числа Фибоначчи дают нам не столько количество живых кроликов, сколько их теоретически возможную численность, образующуюся от одной пары.

Нечто подобное соотносилось бы с гипотетическим количеством людей на земле, если они были бы все живы, начиная с Адама и Евы. – Причем не как дряхлых персонажей, а вполне жизнеутверждающих и способных к дальнейшей репродуктивности рода.

Рекуррентная форма (2) дополнительно отражает иное свойство – процесс выбывания кроликов на определенной стадии своего развития.

В общем случае уравнение, отражающее процессы естественного или искусственного выбывания (тленности, бренности) из идеальной схемы Фибоначчи, представимо в виде

$$x^r\left(x^2-x-1\right)+1=0\,. \qquad (4)$$

Его частные аналитические решения имеют вид:

$r = 2$: $\quad x^2\left(x^2-x-1\right)+1=0\,, \quad \lambda_2=\dfrac{a}{6}+\dfrac{2}{a}\approx 1{,}325, \quad a=\sqrt[3]{108+12\sqrt{69}}\,;$

$r = 3$: $\quad x^3\left(x^2-x-1\right)+1=0\,, \quad \lambda_3=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b}{2}+\dfrac{2}{b}+1\right)\approx 1{,}466\,, \quad b=\sqrt[3]{116+12\sqrt{93}}\,.$

Остальные решения находятся численными методами (рис. 2):

$$\lambda_r=\arg_x\left\{x^r\left(x^2-x-1\right)+1=0\right\}.$$

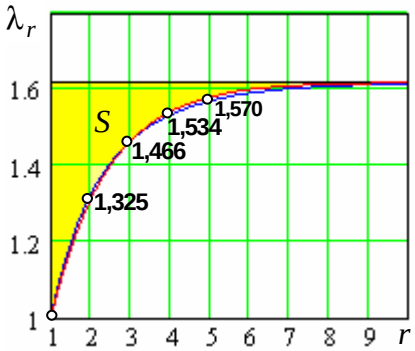

Рис. 2. Кривая "кроличьих сечений"

С увеличением "параметра (периода жизни)" s задача всё более идеализируется, а максимальный по модулю корень уравнения (4) стремится к числу золотого сечения

$$\lim_{r\to\infty}\lambda_r=\Phi\,.$$

Сама кривая "кроличьих сечений" очень точно описывается аппроксимирующей формулой

$$\hat{\lambda}_r=1+\Phi^{-1}\left(1-e^{-0{,}7(r-1)}\right)\,.$$

Площадь, ограниченная графиком λ_r и линией ЗС, равна

$$S=\int_1^{\infty}(\Phi-\lambda_r)dr\approx 0{,}91625\,.$$

Нельзя не обратить внимания на бросающийся в глаза факт: что значение S состоит из последовательности трёх квадратов 3^2, 4^2, 5^2. – Хотя разумеется, это обычное совпадение, а в остальном, – ничем особо не примечательное число.

Таким образом, рассматриваемая задача о кроликах с ограниченным жизненным циклом, определяемым параметром r, имеет решение, отличное от идеального значения Φ.

Более того, если период жизни конечен, то задача принципиально выходит за «площадку золотоносности», не имея с ней в количественном смысле ничего общего.

И всякие «золотые сечения» или «золотые пропорции» превращаются в обычный блеф.

Есть только одно уникальное и неповторимое ЗС, вытекающее, в частности, из несбыточной модели Фибоначчи о вечной райской жизни его ушастых подопечных с нескончаемой потенцией и плодовитостью.

Выводы.

1. С точки зрения золотого сечения "обожествлять" нужно не числа Фибоначчи F_n, но аддитивно-двухчленную процедуру, которая при любых начальных условиях, не равных одновременно нулю, приводит к аттрактору в виде числа золотого сечения $\Phi=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

2. Любое натуральное число является элементом некоторого ряда Фибоначчи f_n, имеющего своим аттрактором золотую константу Φ.

3. "Золотые цепи" (Василенко) – уникальное обобщение формы представления золотого сечения в виде предельного аттрактора $(m+1)$-членной рекурсии $V_{n+2m} = \sum_{j=1}^{m} V_{n+2j-1} + V_n$ с произвольными начальными условиями $(V_0, V_1, \dots, V_{2m-1})$.

Например, можно выбрать 10^{10} исходных чисел-единиц или членов натурального ряда, и рекурсивная "золотая цепь" в пределе даст золотоносное отношение соседних элементов.

4. Золотое сечение в задаче Фибоначчи о кроликах соответствует идеализированному случаю вечной жизни с неограниченным репродуктивным возрастом.

В этом контексте ЗС означает бессмертие, и потому недостижимо.

Литература.

1. *Василенко С.Л.* "Золотые ряды" Фибоначчи с произвольными начальными условиями // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15295, 19.05.2009 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322067.htm.

2. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения. – Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.

3. *Василенко С.Л.* Основы теории рационального золотого сечения в целочисленных переменных // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15274 от 08.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322057.htm.

4. *Василенко С.Л.* Идентификация рекуррентных рядов // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15487, 25.08.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161531.htm.

5. *Числа Фибоначчи* // Википедия. 23.11.2010. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=29620293.

6. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 5-е изд. – М.: Наука, 1984. – 144 с.

7. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? – 3-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2001. – 568 с.

8. *Василенко С.Л.* Кролики Фибоначчи на Великой китайской стене // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16102, 08.10.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161710.htm.

© ВаСиЛенко, 2010