Д.С.Клещев

О природе аксиоматических противоречий в математике

Альфред Тарский в терминах математики доказал невыразимость всеобъемлющей истины, а именно то, что универсального арифметического множества не существует, поскольку всегда найдется как минимум два класса утверждений Q и Mn, по разному ведущих себя по отношению к некоторому утверждению n.[1] В самом деле, поскольку все возможные утверждения или истинны, или ложны, то задача на выражение универсального представления истины ведет к появлению двух множеств: класса Q, о котором мы можем сказать – «*все утверждения данного класса истинны*», и класса Mn, о котором мы можем сказать – «*истинно то, что все утверждения данного класса ложны*». Попытка применения представлений одного из этих классов к другому ведет к логическим противоречиям, ибо об одном и том же утверждении нельзя сказать, что «*данное утверждение истинно*» и, вместе с тем, «*истинно то, что данное утверждение ложно*».

Тем не менее, после появления в XIX веке теории бесконечных множеств Г.Кантора в математическом аппарате появилось определение, претендующее на выражение универсального представления истины, – это определение актуальной, то есть завершенной бесконечности, применительно к которому, как оказалось, можно сказать – «*утверждение о бесконечности истинно*» и, вместе с тем, «*истинно, что данное утверждение ложно, ибо эта бесконечность завершена*». Г.Кантор настолько сильно уверовал в универсальность этого определения, что выдвинул гипотезу континуума, согласно которой множество действительных чисел должно выражаться через понятие актуальной бесконечности. Однако впоследствии К.Гедель и П.Коэн получили результаты, согласно которым в рамках общепринятого математического канона невозможно ни доказать, ни опровергнуть идею непрерывности и упорядочения числовой прямой, невозможно также ни подтвердить, ни опровергнуть гипотезу Д.Гильберта о непротиворечивости аксиом арифметики.

Таким образом, достижения современной математики пошатнули веру в способности человеческого разума и математической науки давать вполне определенный ответ на любую поставленную задачу. На смену убеждениям Д.Гильберта о том, что для математики не существует тезиса "*Ignoramus et ignorabimus*" (с лат. «*Мы не знаем и никогда не узнаем*»),[2] пришло сомнение в том, что математическая истина, пускай даже невыразимая в конечном наборе утверждений, вообще говоря, существует. Пожалуй, точнее всего фатализм и замешательство, связанное с доказательствами Геделя-Коэна, выразил сам П.Коэн: «*Такова наша судьба – жить, сомневаясь; преследовать цель, в абсолютности которой мы не уверены; короче говоря, понимать, что наша единственная "истинная" наука имеет все ту же смертную, возможно,* [*всего лишь*] *опытную природу*».[3]

Если в начале XX века большинство ученых придерживались того мнения, что природа математики состоит в отражении объективно существующей истины, интуитивно понятной и лишенной противоречий, то к концу XX века в научной среде возобладало суждение о субъективной природе математики, отражающей лишь только ограниченные способности человеческого разума к установлению причинно-следственных связей. Неслучайно М.Клайн, посвятивший этому драматическому кризису в философском осмыслении математики книгу «Математика. Утрата определенности», оканчивает ее агностицизмом Альфреда Н. Уайтхэда,

---

[1] Успенский В. Теорема К.Геделя о неполноте. М.,1982. С.51
[2] Проблемы Гильберта / Под ред. П.С.Александрова. М., 1969. С.22
[3] Cohen P. Comments on the foundations of set theory. Proc. Sym. Pure Math. 13:1 (1971), 9–15. (Перевод с англ. Ю.И.Манина)

согласно которому *занятие математикой есть лишь безумие человеческого духа, ниспосланное богами*.[4] Хотя, как показывает история математики, следует говорить не о безумии, но об эволюции человеческого духа.

Подобно тому, как в природе объективная реальность влияет на появление и развитие живых существ, а их развитие, в свою очередь, видоизменяет объективную реальность, так и совершенствование разума не только зависит от уже сложившихся теорий и состояния цивилизации, но активно воздействует на них, подготавливая почву для исправления ошибок, допущенных в более ранних состояниях. Впрочем иногда, крайне редко, у весьма распространенного и богатого класса теорий может обнаружиться такая фатальная уязвимость, исправление которой невозможно в силу необратимости неких общих признаков, приводящих всю эволюционную ветвь данного класса в тупик. Тогда вызревает необходимость пересмотра всей генетики, сиречь аксиоматики, этой ветви и сравнения ее с другими, более архаичными, культурами для последующей смены парадигмальных установок.

Переход от одной преобладающей парадигмы к другой, более непротиворечивой и полной, всегда связан с поиском альтернативных путей развития, часто – с возвратом к агностицизму, нигилизму, а иногда – к сознательному распространению деструктивных теорий, отвергающих понятие истины и претендующих на звание некой «*новой парадигмы*». Но эти подходы не объясняют главного – глубинных причин кризиса «*ветхой парадигмы*» и гностической деградации соответствующей ветви теорий. Принято считать, что в процессе эволюции науку потрясли три кризиса в основаниях математики: древнегреческий, вызванный открытием иррациональных чисел; новоевропейский, вызванный применением бесконечно малых величин; современный, вызванный открытием парадоксов актуальной бесконечности и выявлением математических антиномий. Но не трудно заметить, что все эти кризисы имеют общие корни, поэтому их можно рассматривать как разные этапы одного системного кризиса оснований математики, длящегося вот уже более двух тысяч лет.

На взаимосвязь парадоксов актуальной бесконечности с открытием древнегреческими математиками иррациональных чисел пророчески указал уже сам создатель теории бесконечных множеств Г.Кантор: «*Можно безусловно сказать: трансфинитные числа стоят или падают вместе с конечными иррациональными числами. По своему внутреннему существу они подобны друг другу, ибо как те, так и другие суть определенно отграниченные образования или модификации (ἀφωρισμένα) актуально бесконечного*».[5] Итак, если существует некая общая генетическая уязвимость математического канона, то мы должны усмотреть ее на самом древнем этапе системного кризиса математики, вызванном открытием иррациональных чисел.

Как известно, Д.Гильберт стремился получить позитивное доказательство непротиворечивости аксиом арифметики, однако другой великий математик А.Пуанкаре придерживался иных взглядов, вполне допуская наличие фундаментальных противоречий в системе арифметических аксиом. В качестве подтверждения мысли о возможном негативном разрешении второй проблемы Д.Гильберта он приводил существование в математике скрытых аксиом, которые не учтены в современных руководствах по математике.[6] В частности, такую систему скрытых аксиом мы находим в «*наилучшем классическом примере рассуждения от противного*»,[7] которым не перестают восхищаться многие профессиональные математики, которое столько раз переписывалось из одного учебника в другой, что никто никогда не пытался подвергнуть его критическому анализу. Речь идет

[4] Клайн М. Математика. Утрата определенности / Перев. Ю.А.Данилова, под ред. И.М.Яглома. М., 1984. С.407
[5] Кантор Г. Труды по теории множеств. М., 1985. С.284
[6] Пуанкаре А. О науке. М., 1983. С.36
[7] Бурбаки Н. Теория множеств / Под ред. В.А.Успенского. М., 1965. С.300

о древнем доказательстве несоизмеримости стороны и диагонали квадрата, утверждающем иррациональность $\sqrt{2}$:

«*Допустим, что диагональ квадрата AC и его сторона AB соизмеримы, то есть их отношение равно отношению двух целых чисел:* $AC / AB = m / n$. *(1)*

Предполагается, что числа m и n не являются оба четными, иначе дробь можно было бы сократить на два. Из (1) следует, что $AC^2 / AB^2 = m^2 / n^2$. *Но по теореме Пифагора* $AC^2 = 2AB^2$; *следовательно,* $m^2 = 2n^2$. *(2)*

Значит, m^2 *– четно. Из учения о четных и нечетных числах следует, что в этом случае и m – четно (так как произведение двух нечетных чисел нечетно). Но тогда n – нечетно. Поскольку m – четно, то* $m = 2t$. *Подставляя в (2), получим* $4t^2 = 2n^2$, *или* $n^2 = 2t^2$, *то есть* n^2 *– четно, следовательно, и n должно быть четным, что приводит к противоречию*».[8]

Возникает вопрос: каким образом нашим достопочтенным ученым из поколение в поколение удается доказывать, что единица, она же число *n* в пересказанном выше доказательстве, она же сторона квадрата *AB* – «*четное число*», доказывающих совершенно откровенную нелепицу, будто десятичная дробь $\sqrt{2}$, она же число *m*, она же диагональ квадрата *AC*, – тоже «*четное число*», то есть число, при делении которого на *2* должно получиться целое число?! Разве числа $1/2$ и $\sqrt{2}/2$ являются целыми числами? Разрешение этой выдающейся загадки школы пифагорейцев состоит в применении античными математиками аксиомы неделимости единицы и аксиомы четно-нечетности единицы, благодаря которым в древности удавалось не замечать очевидную абсурдность данного доказательства. Признавая корректность этого «*классического примера рассуждения от противного*», мы не только признаем иррациональность $\sqrt{2}$, но и получаем противоречивую систему аксиом арифметики, где единица выступает и четным, и нечетным числом, где единица признается неделимым числом и, вместе с тем, числом, образующим бесконечное множество дробей.

Отбросив аксиому неделимости единицы и аксиому четно-нечетности единицы, легко установить вполне закономерное арифметическое тождество, записав вместо числа *t*, принятого в пифагорейском доказательстве за целое, десятичную дробь $\sqrt{2}/2$. Тогда мы совершенно достоверно покажем, что числа *m* и *n* в теореме не являются четными, так как тождество $n^2 = 2t^2$ запишется в виде $1^2=2(\sqrt{2}/2)^2$. Но из установления достаточно тривиального факта противоречивости общепризнанной системы аксиом арифметики и всего математического канона – от создания теории несоизмеримых отрезков до теории бесконечных множеств – следуют отнюдь не тривиальные выводы. Впрочем, об этих отнюдь не тривиальных выводах интуитивно догадывался в XIX веке Л.Кронекер, возражавший против теории иррациональных чисел и убеждавший своих современников в том, что «*скоро арифметика покажет настоящие точные пути анализу и убедит в неверности всех тех умозаключений, с которыми работает современный, так называемый анализ*».[9]

Прежде всего, это вывод о том, что $\sqrt{2}$ можно представить отношением двух целых чисел m / n, так же, как множество других арифметических корней, признанных в канонической арифметике иррациональными. Так, использование брауэрева разбиения квадратов на элементы одинаковой размерности, позволяет строить по основанию «*иррациональных*» диагоналей фигуры, конгруэнтные обычным ортогональным квадратам.[10] При сопоставлении свойств этих фигур с конкретными арифметическими приближениями, обнаруживается их полное совпадение с предположением о периодичности десятичных значений всех корней, несводимых к целым числам.

---

[8] История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А.П.Юшкевича. М., 1970. С.7

[9] Гильберт Д. Основания геометрии / Под. ред. А.В.Васильева. Петроград, 1923. С.XXIV

[10] Клещев Д. Возвращение Орфея. Гармония и дисгармония современной математики // Философия и культура. №5, 2009. С.21-43

Например, для √*2* в соответствии с правилами перевода десятичных дробей в обыкновенные отношение целых чисел *m* / *n* выражается тождеством:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{(1414\_707\_ - 1414\_)^2}{999\_000\_^2} = \frac{199\_700000\_1000\_}{99\_800\_1000000\_} = 2{,}00\_1,$$

где интервал *2,00_1*, симметричный некоторому приближению непрерывной дроби *1,99(9)*, служит базисом для сколь угодно близкого приближения периодической десятичной дроби *1,414_ 707_707_(707_)²* к целому числу *2*, что является прямым следствием из теоремы Л.Брауэра о невозможности топологического перехода из пространств разной размерности и подтверждает его представление о вещественном числе как «*бесконечной последовательности частичных интервалов все возрастающих порядков, каждый из которых заключается внутри ему предшествующего*».[11]

Подтверждение теоремы Л.Брауэра в рамках неканонической арифметики означает принципиальную возможность разрешения противоречия в системе аксиом измерения, состоящего в совместном применении аксиомы Евдокса-Архимеда, утверждающей незавершенный характер бесконечности, и аксиомы Г.Кантора о двух стягивающихся в общую точку отрезках, утверждающей завершенный характер бесконечности.[12] Так как не существует топологического перехода из пространств разной размерности, то в конструктивной математике аксиома Г.Кантора и понятие актуальной бесконечности исключаются как некорректные допущения.

В соответствии со второй теоремой К.Геделя о неполноте разрешение второй проблемы Д.Гильберта, связанное с обнаружением противоречий системы аксиом канонической арифметики и построение более полной неканонической концепции влечет за собой возможность решения проблемы непрерывности (первая проблема Д.Гильберта) только в терминах теорий, родственных брауэровской концепции континуума.

Обнаружение противоречий в системе аксиом канонической арифметики и брауэрово представление о континууме, состоящем из перекрывающих друг друга полностью или частично интервалов, дают решение проблемы разделения арифметического числа и геометрической величины, которую А.Френкель считал самой главной проблемой в основаниях математики.[13] Потому что данная проблема, поставленная еще Аристотелем, уходит корнями к той же пифагорейской аксиоме неделимости единицы, ибо «*для числа имеется предел в направлении к наименьшему, а в направлении к большему оно всегда превосходит любое множество, для величин же наоборот: в направлении к меньшему оно превосходит все своей малостью, а в направлении к большему бесконечной величины не бывает. Причина та, что единица неделима*».[14]

Наконец, в соответствии с доказательством П.Коэна о независимости аксиомы выбора Э.Цермело (и его гипотезы о возможности упорядочения любого бесконечного множества) от системы стандартных аксиом Цермело-Френкеля, неканоническая арифметика открывает возможность упорядочения самых разных типов бесконечных множеств. Так, если в канонической арифметике порядок выступает неким частным случаем хаоса бесконечных последовательностей, то в неканонической арифметике, упорядочивающей «*иррациональности*», хаос становится всего лишь частным случаем порядка.

И это лишь некоторые из «*неразрешимых*» проблем математики, которые находят разрешение в рамках неканонической арифметики. Конечно, многие важные для канонической математики результаты при этом утратят прежнюю ценность, как, например, найденное А.Гельфондом решение

[11] Вейль Г. О философии математики / Перев. А.П.Юшкевича. Москва-Ленинград, 1934. С.79
[12] Стахов А. Введение в алгоритмическую теорию измерения. М., 1977. С.26
[13] Виленкин Н. В поисках бесконечности. М.,1983.С.12
[14] Аристотель. Сочинения в четырех томах / Под ред. И.Д.Рожанского. М., 1981, Т.III. С.120

седьмой проблемы Д.Гильберта, которое даже в системе аксиом канонической арифметики не является универсальным, так как существуют такие «*иррациональные*» числа *a* и *b*, что a^b – рационально: $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ *=2.* Поэтому можно сказать, что, выбирая между канонической и неканонической арифметикой, нам приходится выбирать между утратой определенности и утратой неопределенности. Однако сама возможность этого свободного выбора означает то, что скрытая, интуитивно понятная истина, позволяющая разрешать любые антиномии, все-таки существует, и в этом, по- видимому, и состоит вся невыразимая сущность математической науки.