С.Л. Василенко

Золотые триномы

Гляди в оба, зри в три
Русская поговорка

Перекличка городов. Нам всегда небезынтересно просматривать работы проф. А. Мартыненко (Санкт-Петербург), связанные с описанием различных математических форм в их связи с золотой пропорцией и числами Фибоначчи.

Активная деятельность в музыкальной сфере помогает ему по-особому видеть разнообразные грани числовой гармонии, наполненные простым, доходчивым и часто оригинальным содержанием.

Хотя собственные доказательства выявляемых закономерностей ему удавались нечасто.

И вот он пригласил в соавторы д.ф.-м.н. профессора кафедры прикладной математики СПбЭУ Ю.Григорьева [1].

Тема алгебраических уравнений с фибоначчиевыми коэффициентами фактически получила второе дыхание. Посвежела. Значительно повысился уровень обоснованности. Выкристаллизовались теоретические линии.

Но, к сожалению, ключевые положения остались недоказанными и научно пока могут квалифицироваться лишь как гипотезы.

Доказательство одной теоремы не приводится ввиду якобы громоздкости двойной индукции по двум индексам, доказательство другой – де-факто таковым не является, поскольку осуществлено простым перебором лишь ограниченного набора трехчленов, но никак не в общем виде.

Одним словом, пока гипотезы... Хотя, как будет показано ниже, вполне справедливые.

Да этого и следовало ожидать, поскольку все закономерности получены путем последовательной серии манипуляций из разряда простой модификации обычного квадратного уравнения вида $x^2 - x - 1 = 0$.

Можно было и не уделять особого внимания данному аспекту. – Доктора наук сами достойно и квалифицировано разберутся со своими задачами.

Но нам видится связь их работы с собственным изложением концепции обобщенного уравнения золотой пропорции [2].

И там и там максимальным по модулю корнем алгебраического уравнения является число золотой пропорции, хотя сам характеристический полином отличен от квадратного трехчлена с единичными коэффициентами.

Есть замечание и к терминологии, когда треугольная форма-таблица, содержащая многочлены, именуется золотым треугольником, в то время как этот термин уже давно имеет свое содержание в геометрии. Да и в географии у него дурная слава, связанная с производством и торговлей наркотиков.

С нашей точки зрения, пока он еще не стал тиражироваться и вносить путаницу в уже апробированные определения, можно предложить более корректное его название, например, *треугольник золотых триномов*[1] или просто *золотые триномы*.

Это полностью соответствует содержательной стороне вопроса и не содержит противоречивых нестыковок с геометрическими представлениями.

Целью настоящей работы является математическое обоснование золотых триномов, исследование их сходимости и увязка с обобщенным уравнением золотой пропорции.

---

[1] ТРИНОМ – тоже, что и трехчлен – сумма или разность трех алгебраических выражений, называемых одночленами. – http://www.edudic.ru/efr/119838/.

Математическое обоснование. Сначала докажем две теоремы.

Теорема 1. Для любой тройки целых индексов k, n, $j<n$ числа Фибоначчи удовлетворяют тождеству $F_{k+j}F_{k+n-j}-F_kF_{k+n}=(-1)^kF_jF_{n-j}$.

Доказательство.

Прежде чем доказывать, обратим внимание на структурно-комплиментарную[2] особенность-взаимосвязь индексов путем пропуска сначала j потом k:

$$\begin{vmatrix} k+j \\ k+n-j \end{vmatrix} \underset{\mathrm{j}}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} k \\ k+n \end{vmatrix} \underset{\mathrm{k}}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} j \\ n-j \end{vmatrix}$$

Воспользуемся формулой Муавра–Бине $\sqrt{5}F_t=\phi^t-(-1)^t\phi^{-t}$, где $\phi=\left(1+\sqrt{5}\right)/2$, и вычислим отдельно два выражения (опустив одинаковый сомножитель 5):

$$F_kF_{k+n}+(-1)^kF_jF_{n-j}\Rightarrow$$

$$\left[\phi^k-(-1)^k\phi^{-k}\right]\cdot\left[\phi^{k+n}-(-1)^{k+n}\phi^{-k-n}\right]+(-1)^k\left[\phi^j-(-1)^j\phi^{-j}\right]\cdot\left[\phi^{n-j}-(-1)^{n-j}\phi^{-n+j}\right]=$$

$$=\phi^{2k+n}-\underline{\underline{(-1)^{k+n}\phi^{-n}}}-\underline{(-1)^k\phi^n}+(-1)^{2k+n}\phi^{-2k-n}+$$

$$+\underline{(-1)^k\phi^n}-(-1)^{k+n-j}\phi^{-n+2j}-(-1)^{k+j}\phi^{n-2j}+\underline{\underline{(-1)^{k+n}\phi^{-n}}}=$$

$$=\phi^{2k+n}-(-1)^{k+n-j}\phi^{-n+2j}-(-1)^{k+j}\phi^{n-2j}+(-1)^{2k+n}\phi^{-2k-n};$$

$$F_{k+j}F_{k+n-j}\Rightarrow\left[\phi^{k+j}-(-1)^{k+j}\phi^{-k-j}\right]\cdot\left[\phi^{k+n-j}-(-1)^{k+n-j}\phi^{-k-n+j}\right]=$$

$$=\phi^{2k+n}-(-1)^{k+n-j}\phi^{-n+2j}-(-1)^{k+j}\phi^{n-2j}+(-1)^{2k+n}\phi^{-2k-n}.$$

Обычным сравнением убеждаемся, что соотношения равны. Теорема доказана.

Примечание. С легкой руки Н. Воробьева [3, с. 25] и некоторых других математиков прошлого века исходная формула названа именем Бине, хотя за 135 лет до него впервые получена в 1718 г. другим известным французским математиком Муавром [4, с. 29].

Рассматривая в целом данную теорему, следует отметить, что мы просто продемонстрировали свой достаточно эффективный способ ее доказательства с использованием знаменитой формулы Муавра–Бине.

Само тождество уже известно и достаточно давно

Так, сделав простую замену индекса $m=n-j$, получаем видоизмененную запись

$$F_{k+j}F_{k+m}-F_kF_{k+m+j}=(-1)^kF_jF_m.$$

В подобном виде, но с другими буквами, это тождество приведено в монографии С. Вайды [5]. Оно же встречается с использованием такой записи [6]:

$$F(n+i)F(n+k)-F(n)F(n+i+k)=(-1)^nF(i)F(k).$$

---

[2] КОМПЛИМЕНТАРНОСТЬ (лат. *complimentare* взаимодополняемость) – отношение соответствия каких-либо объектов чему-либо. В семиотике *К.* как отношение основано на связи между термином и отрицанием его противоположного: "добро" – "не зло" – http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/230691.

Т е о р е м а 2. Триномы $F_j x^{i+1} - F_{i+1}x^j + (-1)^j F_{i+1-j}$, $i \ge j \ge 1$ с числами Фибоначчи F в качестве коэффициентов имеют общий делитель $x^2 - x - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Обратим внимание на гармоничность в записи тринома с присутствием структурной комплиментарноости индексов

$$F_j x^{i+1} \quad - \quad F_{i+1}x^j \quad + \quad (-1)^j F_{i+1-j}$$

Квадратный трехчлен может быть записан через свои корни $x^2 - x - 1 = \left(1 + \phi^{-1}\right)\left(1 - \phi\right)$.

Доказать делимость исходного тринома на этот трехчлен равносильно тому, что его корни $\left(-\phi^{-1}, \phi\right)$ являются корнями тринома, то есть после подстановки их вместо x трином тождественно обращается в нуль.

Проверяем с помощью формулы Муавра–Бине (опустив одинаковый сомножитель $\sqrt{5}$):

$$F_j x^{i+1} - F_{i+1}x^j + (-1)^j F_{i+1-j} \Rightarrow$$

$$\left[\phi^j - (-1)^j \phi^{-j}\right]\phi^{i+1} - \left[\phi^{i+1} - (-1)^{i+1}\phi^{-i-1}\right]\phi^j + (-1)^j\left[\phi^{i+1-j} - (-1)^{i+1-j}\phi^{-i-1+j}\right] =$$

$$= \underline{\phi^{i+j+1}} - \underline{\underline{(-1)^j \phi^{i-j+1}}} - \underline{\phi^{i+j+1}} + (-1)^{i+1}\phi^{-i-1+j} + \underline{\underline{(-1)^j \phi^{i-j+1}}} - (-1)^{i+1}\phi^{-i-1+j} = 0;$$

$$F_j x^{i+1} - F_{i+1}x^j + (-1)^j F_{i+1-j} \Rightarrow$$

$$\left[\phi^j - (-1)^j \phi^{-j}\right](-\phi)^{-i-1} - \left[\phi^{i+1} - (-1)^{i+1}\phi^{-i-1}\right](-\phi)^{-j} + (-1)^j\left[\phi^{i+1-j} - (-1)^{i+1-j}\phi^{-i-1+j}\right] =$$

$$= \underline{(-1)^{-i-1}\phi^{-i-1+j}} - \underline{\underline{(-1)^{-i-1+j}\phi^{-i-1-j}}} - (-1)^{-j}\phi^{i+1-j} + \underline{\underline{(-1)^{i+1-j}\phi^{-i-1-j}}} + (-1)^j \phi^{i+1-j} - \underline{(-1)^{i+1}\phi^{-i-1+j}} = 0.$$

В последнем соотношении использовано очевидное равенство $(-1)^k = (-1)^{-k}$.

Итак, пара чисел $\left(-\phi^{-1}, \phi\right)$ является корнями тринома. Теорема доказана.

В том, что золотые триномы $F_j x^{i+1} - F_{i+1}x^j + (-1)^j F_{i+1-j}$ делятся без остатка на трехчлен $x^2 - x - 1$ и содержат коэффициенты в виде чисел Фибоначчи, нет ничего удивительного.

Так и должно быть. Потому как сами «числа Фибоначчи совпадают с последовательностью коэффициентов частного от деления 1 на $1 - x - x^2$» [7, с. 11].

Другими словами, производная функция чисел Фибоначчи равна $\dfrac{1}{1 - x - x^2}$.

Исследование сходимости.

Важной оценкой золотого тринома является его способность адекватно отражать способность быстрой сходимости к своему аттрактору – золотой пропорции.

Для перехода к разностной форме трином разделим на коэффициент при старшей степени $x^{i+1} - \dfrac{F_{i+1}}{F_j} x^j + (-1)^j \dfrac{F_{i+1-j}}{F_j}$.

Тогда рекуррентная форма по дискретному параметру $n \geq 0$ приобретает вид линейного возвратного однородного уравнения с постоянными коэффициентами [8, с. 329–347]

$$x_{i+1+n} = \frac{F_{i+1}}{F_j} x_{j+n} + (-1)^{j+1} \frac{F_{i+1-j}}{F_j} x_n$$

с (i + 1) начальными условиями, например, равными единице.

Результаты моделирования процесса рекурсии (рис. 1 – рис. 2) позволяют высказать некоторые суждения.

Только триномы, содержащие пару соседних целочисленных степеней $\left(x^{i+1}, x^i\right)$ (рис. 1), обладают действительно быстрой сходимостью к своему аттрактору – числу золотой пропорции. То есть в образовании каждого члена ряда обязательно принимает участие предшествующий элемент.

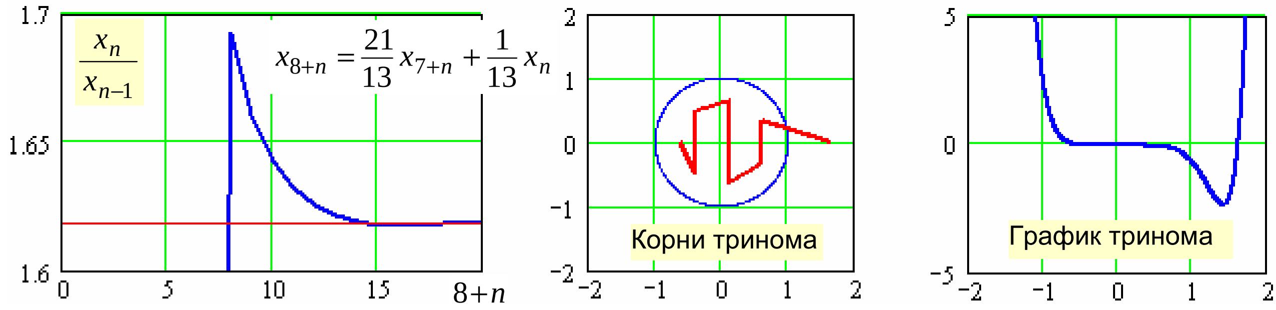

Рис. 1. Устойчивая и быстродействующая сходимость тринома (старших степеней) к своему аттрактору – числу золотой пропорции

В других случая картина совершенно противоположная. И главное наблюдение заключается в том, что рекурсия, как динамический процесс устойчивого приближения к аттракторам, по сути, отвергает данные триномы. Отношение соседних членов последовательности либо слабо сходится к своему аттрактору, либо вообще не сходится. Последнее происходит обычно при появлении у триномов своего зеркального отрицательного корня ф = –1,618. На рис. 2 это соответствует значениям тринома j = 2, 4, 6.

Можно, конечно, было провести и дополнительные исследования, но данный объект не вызывает у нас сколь-нибудь значимого интереса.

Сама по себе хорошая идея расширения класса алгебраических уравнений со свойствами "золотого" сечения при ее реализации в виде тринома общего вида (с использованием в качестве коэффициентов чисел Фибоначчи) натыкается на труднопреодолимые препятствия, и в результате становится малопродуктивной.

Хотя есть надежда, что золотые триномы могут найти применение в других областях математики.

Пока же их полезность в использовании не востребована и находится под вопросом.

В этом контексте неоспоримые преимущества имеет *обобщенное уравнение золотой пропорции* (ЗП), $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$x^{2m} - \sum_{j=1}^{m} x^{2j-1} - 1 = 0. \tag{1}$$

"Развернув" для наглядности знак-обозначение суммы, получаем

$$x^4 = x^3 + x^1 + 1, \quad x^6 = x^5 + x^3 + x^1 + 1, \quad x^8 = x^7 + x^5 + x^3 + x^1 + 1 \quad \text{и т. д.}$$

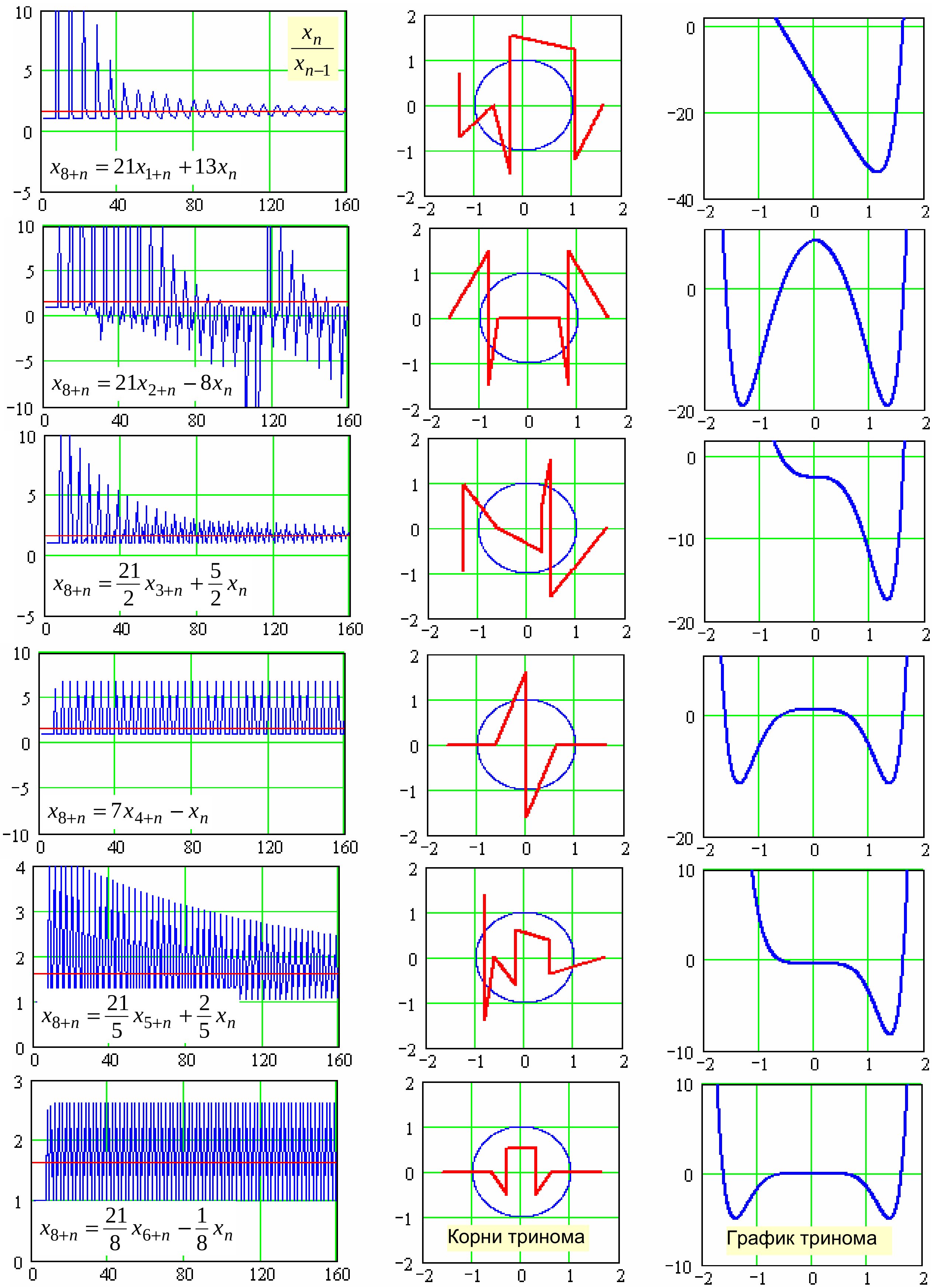

Рис. 2. Характеристики золотых триномов восьмого порядка

Уравнения типа (1) для любого целого $m \geq 1$ имеют пару действительных корней $\left(-\phi^{-1}, \phi\right)$ ЗП.

Все коэффициенты равны 1.

Решение уравнения (1) для любого порядка m получено в аналитическом виде.

Обобщенное уравнение ЗП порождает бесчисленное множество аддитивно-рекуррентных последовательностей, сходящихся к золотой пропорции, причем количество начальных условий может быть сколь угодно большим.

Есть и другие полезные свойства (1), с которыми более подробно можно познакомиться в статье [2].

Литература.

1. *Григорьев Ю.Д.*, *Мартыненко Г.Я.* Об одном классе алгебраических уравнений с фибоначчиевыми коэффициентами // Академия Тринитаризма. – М.: Эл № 77-6567, публ.16032, 05.08.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321192.htm.

2. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения. – Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.

3. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 5-е изд. – М.: Наука, 1984. – 144 с.

4. *Tattersall J.J.* Elementary Number Theory in Nine Chapters: Second Edition. – New York: Cambridge University Press, 2005. – 442 p.

5. *Vajda S.* Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications. – New York: Ellis Horwood limited, 1989.

6. *Knott R.* Fibonacci and Golden Ratio Formulae. "Order 2 Formulae. Fibonacci numbers". – http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibFormulae.html.

7. *Маркушевич А.И.* Возвратные последовательности. – М.: Гос. изд-во Технико-Теоретической Литературы, 1950. – 50 с.

8. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.

© ВаСиЛенко, 2010