С.Л. Василенко

Квазизолотая пропорция в структурированных системах

Ёж – птица гордая.
Не пнёшь – не полетит.
Золотые афоризмы

К взаимопониманию через обмен мнениями. Существует устойчивое воззрение, что если бы люди договорились о терминах, то никаких споров никогда не возникало бы в принципе. Все конфликты в полемиках происходят исключительно от разного понимания терминов и смыслов, в них заложенных.

Да и в самих спорах истина практически никогда не рождается. Если людьми владеют эмоции и естественный соревновательный дух как прообраз борьбы за власть, то во время дебатов они не достигают соглашения даже тогда, когда внутри вроде бы и согласны.

Поэтому уже в самом начале лучше сменить категорию спора на более мягкую разновидность общения в виде обмена мнениями, что часто очень даже полезно для обеих сторон. В частности, спокойная дискуссия способна неожиданно раскрыть наше невежество в вопросах, о которых мы и не подозревали.

Так или иначе, но в диалогах следует хотя бы в общих чертах ознакомиться с аргументацией и доказательным базисом партнеров. Результативность общения многократно повышается, когда присутствует обоюдно-искреннее желание как можно глубже и обстоятельнее разобраться с сутью обсуждаемых вопросов.

***Есть ли золотая середина в золотом сечении*?** Выражения со словом "*золотое*" (правило, годы, слова...) обычно несут в себе логические выверенные свидетельства неопровержимой истины и справедливости констатируемых фактов.

Правда есть и ограничения. Например, из нынешних символов можно упомянуть "золотую молодежь". Здесь и зависть, и классовое осуждение, и нарицательное название молодых людей, близких по смыслу к мажорам.

На первый взгляд вопрос подзаголовка выглядит необычно.

Середина – это место, более или менее одинаково удаленное от краев, или средняя часть чего-нибудь, равно отстоящая от границы или начала и конца этого "чего-нибудь".

Замечательный старый термин "золотая середина" восходит к Аристотелю, который в свою очередь его заимствовал у Демокрита для развития тезы о добродетели [1, с. 164].

Сегодня образ "золотой середины" употребляется, как правило, в значении наилучшего (оптимального, идеального или безупречного) варианта решения.

Хотя он недостаточно точен и больше тяготеет к аллегории, чем к точному понятию.

Термин "золотое сечение" или "золотая пропорция" (ЗП) наоборот скрупулезно точен и с математической точностью (до радикала) означает пропорцию-отношение $(a+b):b=b:a=\Phi$ большей части b некоторого целого $a+b$ к его меньшей части a.

В абсолютной точности величины $\Phi=(1+\sqrt{5})/2$ одновременно заключена и сила, и слабость.

Слабость вытекает из крайне ограниченного круга задач, где ЗП проявляет себя в явном виде. Остальные исследования в этой области построены исключительно на гипотетических предположениях, чаще никак не обоснованных, а из чистого желания получить вожделенное значение, хоть чем-то напоминающее число Ф, ну, хотя бы в 2–3 похожие цифры.

После чего во всеуслышание объявляется о некой гармоничности полученного соотношения, будто варианты 1:3 или 20:80 (по Парето) выглядят менее достойно.

Так или иначе, но гипертрофированная одержимость идеей о *всеобщей гармонизации мира* исключительно на основе золотой пропорции наносила и продолжает наносить непоправимый вред установлению ее действительной роли в мироздании.

И в этой "золотой лихорадке", в которую были вовлечены многие исследователи, до золотой середины также далеко, как персонажу нашего афоризма.

Вспомним Архимеда, давшего людям много нового в разных направлениях науки.

Тем не менее, главным своим достоянием он считал многократно проверенный на бумаге и "ведрами" закон-соотношение 3/2 в сравнении объемов цилиндра и вписанного в него шара, что и завещал начертать на своей могиле.

А тут, что ни возьми, будь-то отношение лапок муравья к осиной талии или земной меридиан к длине границы Гондурас, – во всем и везде сплошная вереница открытий ЗС.

Быть красивой или умной? – Вот в чем вопрос. Разнокалиберные формы хвалебных од о золотом сечении могут сбить с толку любого неискушенного читателя.

Не сравнивали в пропорции разве что хвост ужа и нос ежа.

«Сегодня ученые, работающие в любых направлениях науки, снова и снова натыкаются на эту константу. Следует серия сенсационных публикаций. Мир в восторге. Поднимается газетная шумиха, на волне которой начинается бурный рост разного рода "научных" теорий и новых "философских" трудов на тему числа Ф. С его помощью считают все, от развития Вселенной до количества чертей на дне бутылки. Вал мутных публикаций захлестывает мир, хороня под этим мусором и действительно ценные научные находки и открытия» [2].

А ларчик открывается просто. Люди, весьма отдаленные от математики, западают на простоту и элегантность "золотой модели". Большого ума и специальной подготовки не надо. Формы просты и наглядны. Бери любую тему с несимметричным отношением.

Сиди себе и складывай, или умножай, либо дели.

Что делить? – Да, хоть что. Можно человека. Можно корову. А можно и планеты.

Стихи? – тоже подойдут. Картины? – так это воистину кладезь.

Секс? – просто 100 %-ный объект для исследований, не Камасутра, а сплошной ЗС.

После чего рождаются всякие байки. Достаточно вспомнить самый распространенный антропный взгляд на красоту человеческого тела, обусловленную якобы золотой пропорциональностью. Хотя понятно, что если бы у людей пупок был на лбу, они все равно нравились бы друг другу не меньше, а не исключено, что и больше.

Даже если бы люди были "пупколобами", или их вовсе без них, как Адам и Ева[1], то воспринимались бы всё одно одинаково гармоничными. И тело нам казалось бы таким же пропорциональным и красивым, просто с другими числами.

Оттого, что рот один, а глаза два, мы же не страдаем? Но если бы люди были наоборот циклопами с двумя ртами (для жидкой и твердой) пищи, от этого наши эволюционные настроения и предпочтения нисколько не стали бы хуже нынешних стереотипных эталонов.

Например, какие такие изысканные золотые пропорции у Нефертити с её удлиненно-вытянутой продолговатой формой черепа? – Скорее всего, за счет искусственного "растягивания". Жила бы она сейчас, точно сделала бы карьеру в Голливуде, играя без грима инопланетян: вытянутое лицо со змеиным выражением, череп – яйцом, затылочная часть сильно оттянута назад и т.п. А ведь рисуют. Проводят линии псевдоЗС и радуются.

Эту тему можно было развивать и дальше.

Интерес к пропорции ЗП, выражаемой сегодня величиной Ф, на протяжении более двух тысячелетий не раз менялся на противоположный знак.

Наука надолго отворачивалась от числа Ф до следующей сенсации, как правило, броской, эффектно поданной, но малосодержательной по своей сути.

«За последние полвека было, как минимум, два всплеска интереса к этой константе... Несколько сайтов в Интернете рассказывают о последних достижениях в этой области. Но, кажется, и там интерес минимальный... Уже любое упоминание о нем (числе Ф) вызывает активное неприятие всего, что с ним связано» [2].

Так что, если хочешь найти пропорцию ЗС, – поищи ее на диване: поспи, и все пройдет.

---

[1] "Митохондриальная Ева" – общий предок по материнской линии всех на Земле людей – жила около 200 тыс. лет назад, примерно в то время, когда окончательно сформировалась современная анатомия человека.

Научная стерилизация ЗС. Под научной стерилизацией ЗС мы будем понимаем процесс освобождения учения о золотой пропорции от всякого рода домыслов и фальсификаций.

Определение 1. *КвазиЗС* – модель, в основе которой лежит вполне конкретное число, близкое к золотой пропорции.

Определение 2. *ПсевдоЗС* – модель, в основу которой искусственно и бездоказательно внедрена золотая пропорция.

Мы сознательно здесь не вводим критерий близости, который определяется конкретной задачей и назначается исследователем довольно произвольно.

В чем принципиальная разница этих двух моделей? – Это хорошо видно из смысла приставок.

Квази... (лат. *quasi* нечто вроде, как будто, как бы), составная часть сложных слов, соответствующая по значению словам: "якобы", "мнимый", "ложный" – Большая советская энциклопедия. – http://slovari.yandex.ru/~книги/БСЭ/Квази.../. Так, квазистационарный (почти стационарный) процесс – научное определение, означающее процесс, который протекает в ограниченной системе и распространяется в ней так быстро, что за время его распространения в пределах системы её состояние не успевает измениться.

Псевдо (греч. *pséudos* ложь) – приставка, означающая ложность, неверность следующего за ней.

ПсевдоЗС ближе всего к профессиональному жаргонизму "обманка". И цена псевдоЗС такая же, как и псевдозолотой бижутерии.

Таким образом, в первом случае речь идет о числах, которые имеют свое четкое математическое происхождение (обоснование), и по своему значению они весьма мало отличаются от констант ЗП.

Второй случай характеризует состояние, когда в модель нарочито и без должной аргументации насаждается ЗП. Чаще всего характерен для ситуаций или субъективного фактора, который мы характеризуем ёмким термином "ауромания".

Он ближе всего к психотропному восприятию окружающего мира: во всём и везде видеть отголоски навязчивой идеи, в данном случае, признаков золотой пропорции.

Золотая пропорция имеет ряд замечательных свойств, но еще больше ей приписываются свойства вымышленные.

Не зря утверждают, что многие настойчиво стремятся отыскать золотое сечение во всем, что находится между полутора и двумя.

Мы бы и не против этого. Только, вынося данное утверждение на всеобщее обозрение, обязательно следует упомянуть, что это только предположение, догадка или гипотеза.

Подобная постановка вопроса обычно дополняется такими словами как, возможно, вероятно, наверно, не исключено и т.п.

Ведь нет же гарантии, что возможная пропорциональность по золотому сечению, на самом деле окажется нечто другим: близким по значению, но далеко отличным по смыслу или духу. В противном случае рождаются мифы, сказки, басни, но только не научные ресурсы или новые знания.

Это даже не заблуждения, что вполне допустимо в науке. Это несколько хуже. И ближе к понятию "фальсификации результатов".

Так осуществляется искусственная подгонка результатов под заранее спланированную модель. То есть фактически дезинформация.

О корректности просто и говорить не приходится.

Итак, на научном языке в стилистический ряд квази-псевдо-ЗС заложена следующая смысловая теза: «Очень хочется верить, но нет оснований».

Слова "нет оснований" означают, что вопрос изучался слабо. А результаты изучения показывают, что нет оснований доверять первоначальным гипотезам-утверждениям.

Это и есть формула научного подхода: "хочется верить", но на данном этапе "нет оснований". И от такой веры следует отказаться. Во всяком случае, пока.

Мифологизация. Очень широко распространена гипотеза о присутствии золотой пропорции, особенно в живых системах.

Подчеркнем, что иногда она действительно встречается, но во многих случаях это всего лишь гипотеза, поскольку прямые доказательства отсутствуют.

И сведения принимаются больше на веру.

Многие специалисты грешат тем, что желаемое любой ценой заполучить ЗП, выдается за действительное. И заметим, без какой-либо теоретической подоплеки. Просто, взяли, захотели. И всё.

Но искажение или подгонку результатов исследований не следует путать с процессом порождения и развития мифов. В сложении сказок и мифов вокруг золотой пропорции нет ничего предосудительного. Смысл не в правоте, а привлечении внимании.

Обрастая домыслами и ореолом таинственности, восходящим якобы к древним, усиливается астральное восприятие на уровне информационно-энергетической субстанции пространственного бытия.

Любая, хоть незначительная таинственность всегда порождает фантазии, вымыслы, догадки, альтернативные трактовки и т.п.

Женщина – до сих пор неразгаданная тайна-загадка. И это здорово.

Например, русский философ А. Лосев считал миф древнейшей формой освоения мира в виде синтеза четырех понятий: личности, истории, чуда и слова.

Анализируя разные трактовки, он приходит к следующим определениям: «миф есть в словах данная чудесная личностная история»; «миф есть развернутое магическое имя»; он «не может уже быть проанализирован дальше и сводим на какие-нибудь более первоначальные моменты» [3, § 13].

Вот по такой схеме и рождаются сказки-басни про ЗП, приобретая черты мифа как "чудодейственных историй", имеющих осмысленно-личностную активизацию, в противовес умозрительно-абстрактному началу.

Правда в мифологизации есть и неприглядная сторона, когда искусственно канонизируются недостаточно проверенные, противоречивые или просто необоснованные исторические данные.

Так, некоторые ортодоксы догмата ЗС любят часто восхвалять слова А. Лосева из журнальной статьи[2] [4]: «С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления – золотого сечения». Но после более тщательного изучения темы он высказывал уже иное мнение: «Если обратиться к первоисточникам, то отчетливых материалов о сознательно проводимой теории золотого деления у Платона мы не найдем» [5, с. 271].

Эти и некоторые другие вопросы по исторической теме при изучении ЗС более подробно изложены в работах В. Белянина [6, 7].

***What can I do*?** Что же можно реально предпринять в условиях тотального нигилизма к элементарным требованиям научного похода к разработке темы ЗС? И можно ли в принципе надеяться на поднятие её статуса в процессе проведения конкретных исследований и интерпретации получаемых результатов? – Тернистые вековые пути и стремления ученых к истинно новым знаниям показывают, что да.

Продуктивная борьба с очевидным шарлатанством возможна, и она приносит свои плоды. Только здесь не должно быть равнодушных и сторонних наблюдателей. В том, что «вал мутных публикаций захлестывает мир» виноваты, прежде всего, сами ученые, предпочитая не доводить во всеуслышание собственные позиции, искренне полагая, что талантливые идеи и так пробьют себе дорогу.

Можно заверить, что это далеко не так и тем более не всегда.

---

[2] Любопытна политическая подоплека: почему-то стесняются ссылаться на журнал "Коммунист".

Не будем далее развивать эти почти очевидные утверждения и сосредоточим далее основное внимание на изложении собственной позиции.

Мы уже высказывали в своих работах первые осмысления-соображения о том, что структурная добротность и устойчивость золотого сечения в контексте систематики находится под большим вопросом, поскольку своей идеальностью оно ничего не оставляет для сохранения системных связей частей в целом, фактически и заблаговременно предрекая его на тленность.

Для конкретизации предположим, что определено некоторое отношение k (чего-то к чему-либо), весьма близкое к числу золотой пропорции Ф.

Образуется естественная разность $\sigma = \Phi - k$. Знак не имеет принципиального значения.

Теоретически эта величина может иметь природы появления как минимум в двух основных аспектах.

1. Разность σ – это своеобразная константа (параметр) структурирования.

Она отвечает за системность структуры, основанной на квазизолотой пропорции.

То есть ЗС имеется в наличии, но система своей целостностью специально выдавливается за пределы разрушающего воздействия ЗС.

Так, для живых систем выход на идеальное значение ЗС или через порог чувствительности, скорее всего, означает потерю устойчивости и переход к нежизненным образованиям и формам материи.

2. Никакой золотой пропорции в системе и близко нет. Это простое приближение-совпадение. А в основе структуры лежит совершенно иная числовая конструкция (модель), но достаточно близкая к ЗС.

Первый случай надежно идентифицировать наиболее трудно. Здесь должны быть включены все имеющиеся механизмы для доказательства наличия истинного значения ЗС, исходя из природы изучаемых процессов и явлений, но протекающих под существенным воздействием шумовых факторов, искажающих ЗС. Нужно показать, что системе здесь действительно необходима «золотая конструкция». Без нее она просто немыслима и т.п.

А то, что её нельзя продемонстрировать надежными экспериментальными данными, это издержки всевозможных ошибок на входе и выходе системы.

В такой постановке задачи доверие к предлагаемым моделям, безусловно, повысится.

Второй случай, исходя из принципа разнообразия мира, наиболее типичен.

Именно эта составляющая становится первопричиной появления квази- и псевдоЗС.

Выход простой. Нужно производить проверки разрабатываемых моделей на их принадлежность различным структурам, а не только ЗС.

Причем делать такие испытания следует максимально честно и непредвзято, отложив на время все личные симпатии или антипатии к феномену ЗС.

А для этого необходимо иметь под рукой банк данных о задачах, решения которых приводят к величинам, весьма близким и похожим на числа золотой пропорции.

Исходя из смысла решаемых проблем, можно проводить рекогносцировку по базовым моделям на предмет возможного сходства с ними, а не с золотой пропорцией.

Банк моделей Василенко (БМВ) – Bank of Models Vasilenko (BMV)

В принципе мы максимально близко подошли к изложению особо отличительной идеи и этим самым открываем новый некоммерческий проект «Формирование BMV».

Целью проекта является создание единого банка моделей для выполнения исследований в области золотого сечения.

Главная задача проекта – сбор и анализ модельных структур квазиЗС, похожих на ЗС.

Объект исследований – математические модели.

Предмет исследований – формирование комплекса моделей, в основе которых лежат числа, весьма близкие к золотой пропорции.

Область применения – подтверждение истинных структур ЗС, а также выявление возможных структур с признаками ЗС, но таковыми не являющимися.

Персонификация проекта не связана с ложной нескромностью.

Наоборот, это взятие на себя определенных, можно даже сказать повышенных обязательств. – Скорее всего, потребуется немало усилий по координации и планированию работ.

Всякое бывает. И если программа работ почему-либо застопорится, не нужно будет искать крайнего или стрелочника. Всё будет проектироваться на одну персону.

Этим самым мы хотим, прежде всего, подчеркнуть собственную принципиальную позицию, направленную против слепого подражания и восхваления без надобности золотой пропорции. Одновременно мы заявляем о том, что являемся сторонниками разработки темы ЗП под углом зрения ее научного представления.

Нам глубоко несимпатично полное замалчивание данного феномена в официальной науке. Но еще больше претит бездумное восхваление ЗП и приклеивание её ярлыков «на всё, что ползает или летает».

Мы приступаем к разработке проекта, хорошо понимая и осознавая, что при всей своей легкости и кажущейся простоте золотая пропорция является чрезвычайно сложным и еле уловимым для идентификации модельным аттрактором.

Тем не мене, реализуя новый проект, мы глубоко уверены в том, что на широком поле ЗС, в конце концов, будут расставлены вешки-указатели.

Будет создан надежный фильтр, раскладывающий различные изыскания на три основные гармоники «ЗС – квазиЗС – псевдоЗС».

Будет образован примерный кодекс правил и обязательных тестовых процедур, следуя которому исследователю будет легко ориентироваться в характере выполняемой им работы: или это строгий математический объект, или некая возможная гипотеза, либо просто прикидка на дальнейшее осмысление числовой конструкции.

BMV – это своеобразная лакмусовая бумажка на возможную принадлежность ЗС.

BMV – это самобытный набор математических тестовых объектов для проведения экспресс-анализа получаемой синтетической продукции и выдачи сертификата качества ЗС.

Со временем, будем надеяться, идея BMV разовьется.

А пока, как и для любой теории, лучше всего ее рассмотреть на конкретных примерах, из контекста которых многое станет более понятным: и методология, и методы, и методики.

Итак, мы начинаем наш проект со слоганом ... «BMV для ЗС».

1. Сократимость обыкновенной дроби

Данная задача, в частности возникает при выборе произвольного деления a/b в процессе формирования или отыскания конкретного выражения математической пропорции.

И уже только поэтому имеет право становиться на одни весы с золотым сечением.

В математике это обыкновенная (простая) дробь или запись рационального числа.

Подобных делений существует бесчисленное множество.

Но можно и ограничить, поставив вопрос в иной плоскости.

Сколько в поле натуральных чисел $(a, b) \in N \times N$ можно построить неповторяющихся пропорций? Или другими словами, какое количество составляют взаимно-простые пары целых чисел, считая, что $(a, b) \neq (b, a)$, или как часто они встречаются?

В вычислительном аспекте данный вопрос не является сложным и сводится к рекуррентному подсчету суммы (n = 2, 3, 4, 5, ...) [8]

$$R_n = R_{n-1} + 2r_n = R_{n-1} + 2\sum_{i=1}^{n} \max[2 - \gcd(n,i), 0] \ , \qquad (1)$$

либо

$$R_n = R_{n-1} + 2\varphi(n) = 2\sum_{i=2}^{n} \varphi(i) \ ,$$

где $\varphi(n)$ порядок группы обратимых элементов кольца Z_n (множества неотрицательных целых чисел с алгебраическими операциями сложения и умножения) или функция Эйлера, выражающая количество целых чисел отрезка $[1, n]$, взаимно простых с n; R_1=0, $\gcd(n,i)\equiv$НОД(n,i) – наибольший общий делитель целых чисел n и i, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n/R_{n-1}=1$.

Определим вероятность P несократимости дроби a/b как предел при $N\to\infty$ вероятности того, что будут взаимно простыми числа a и b, каждому из которых независимо от другого присвоено одно из значений $\overline{1,N}$, принимаемых как равновозможные [9, с. 39].

Тогда $P=\zeta(2)^{-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum_n \frac{1}{n^{-2}}\right)^{-1}\to\frac{6}{\pi^2}\approx 0{,}608$, где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана (в целой четной точке $s=2$).

Другими словами, вероятность несократимости дроби a/b – это вероятность события, при котором произвольно выбранные целые числа a, b не имеют общего делителя: в разложениях этих чисел на простые сомножители отсутствуют общие множители.

Характерно, что дискретная функция R_n/n^2 по мере увеличения n убывает, но не монотонно, а буквально стягивается или сжимается с двух сторон в одну точку, стремясь к своему пределу (рис. 1).

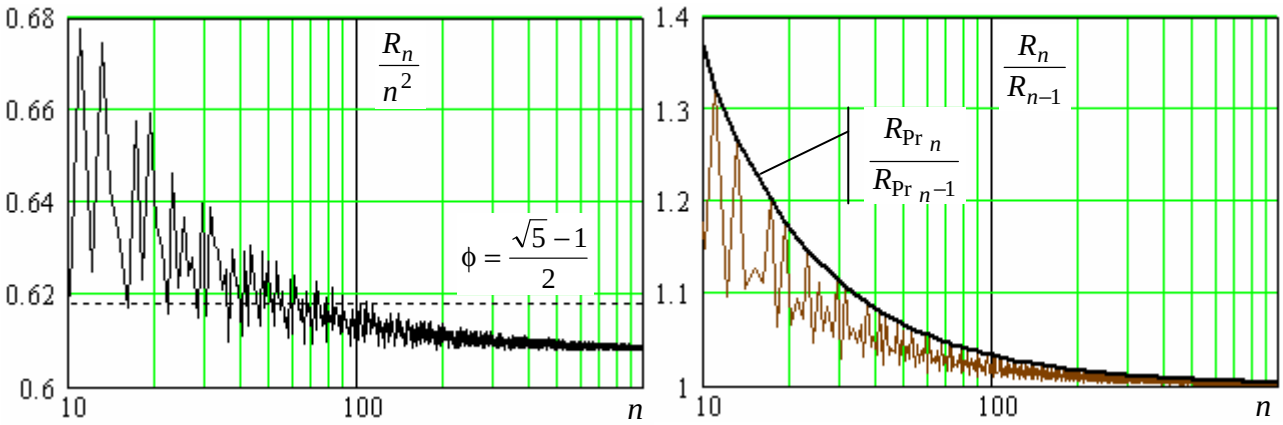


Рис. 1. Характерные графики изменения дискретной функции R_n (1)

Впервые ответ на вопрос о частоте появления пары взаимно простых чисел дала удивительная теорема, открытая в 1881 г. итальянцем Э. Чезаро [10, п. 3]:

вероятность выбора из N пары взаимно простых чисел равна $6/\pi^2$.

То есть примерно в 61 % случаев из натурального ряда можно извлечь пару взаимно простых чисел. Необыкновенно, но по теореме Чезаро в "царстве" целых чисел при этом возникает загадочное и вездесущее число π.

У любого физического взаимодействия есть своя константа связи.

Поэтому вполне разумно для совокупности математических пропорций взаимодействия целого и его частей в виде произвольного деления a/b как несократимой дроби использовать следующие постоянные структуры или структурного равновесия взаимодействий:

постоянная «сжатия» структуры дуально-несимметричных (неизоморфных) взаимодействий

$$S_v=\lim_{n\to\infty} R_n/n^2=6/\pi^2\approx 0{,}608\ ,$$

которой соответствует константа "зеркального" отображения в виде игнорируемых (сокращаемых или аннулируемых) взаимодействий $\overline{S}_v=1-S_v\approx 0{,}392$.

Для совокупности математических пропорций взаимодействия целого и его частей в виде произвольного деления a/b как несократимой дроби в работе [8] используется постоянная «сжатия» структуры дуально-несимметричных (неизоморфных) взаимодействий, равная $S_v = 6/\pi^2 \approx 0{,}608$ – вероятности несократимости дроби.

Число S_v достаточно близко к значению, обусловленному золотым сечением $\Phi^{-1} = \left(\sqrt{5}-1\right)/2 \approx 0{,}618$.

Такое сходство гипотетически является одной из первопричин отыскания в многообразии структур мироустройства тех или иных структурированных природных образований, в которых присутствуют признаки или заложен механизм "золотой" пропорции. И то, что часто выдается за приблизительную гармонию на основе ЗС, на самом деле может являться результатом долгого и мучительного процесса сначала синтеза, потом "притирки", а далее – и сегодня продолжающейся эволюции миропорядка, в основе которых лежит постоянная структуры дуальных взаимодействий $S_v \approx 0{,}608$ как некая фрактальная размерность Вселенной, основанная на числе π.

2. Упаковка кругов

Здесь задача несколько отличается от традиционной постановки тем, что мы не ставим во главу угла достигнуть максимальной упаковки. Наша цель – найти по возможности конструкции с кодовыми числами, напоминающими золотую пропорцию.

Примеры расположения одинаковых касающихся кругов показывают (рис. 2), с ростом их количества уменьшается их радиус и наоборот увеличивается радиус средней вписанной между ними окружности.

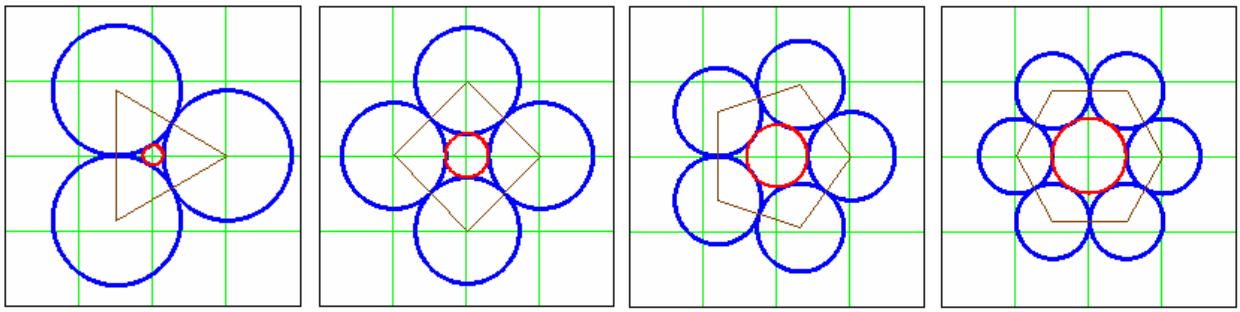


Рис. 2. Примеры расположения одинаковых касающихся n кругов вокруг одного

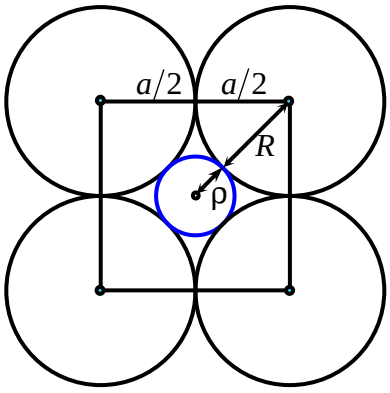


Рис. 3. Характерные размеры

Пусть в правильном n-угольнике со стороной a в каждой из вершин расположены круги радиусом $R = a/2$, между которыми вписан еще один круг радиусом ρ (рис. 3)

Диаметр окружности, описанной вокруг правильного n-угольника, равен

$$D_n = 2(\rho + R) = \frac{a}{\sin(\pi/n)}.$$

Отсюда следует равенство $\rho + R = \dfrac{R}{\sin(\pi/n)}$ или отношение радиусов кругов

$$k_n = \frac{\rho}{R} = \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1} - 1.$$

Величина $k = 1$ для шестиугольника ($n = 6$). В остальных случаях (табл. 1) отношения – уже не целочисленные.

Примечательно, что для правильного пятиугольного, буквально "нашпигованного" геометрическими проявлениями золотой пропорции, соотношение радиусов составляет около 0,7.

Таблица 1

Соотношения радиусов окружностей $k_n = \rho/R = (\sin \pi/n)^{-1} - 1$

n	Иррациональное представление	Приближенное значение
3	$2/\sqrt{3} - 1$	0,155
4	$\sqrt{2} - 1$	0,414
5	$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} - 1$	0,701
6	1	1
7		1,305
8	$\dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} - 1$	1,613
10	$2\Phi - 1 = \dfrac{4}{\sqrt{5}-1} - 1$	2,236
12	$\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} - 1$	2,864

Вместе с тем $k_8 = \left(\sin\dfrac{\pi}{8}\right)^{-1} - 1 \approx \Phi$ (число золотого сечения), восемь – это 2 в кубе.

Велика вероятность того, многие пропорции, определенные ранее экспериментально и якобы близкие по своему значению к ЗС, на самом деле псевдозолотые.

Во всяком случае, у большинства из них на сегодня пока нет никакой теоретической подосновы, быть равными точно ЗС.

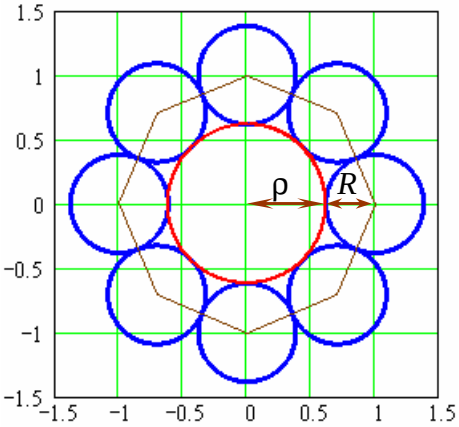


Рис. 4. Расположение кругов по схеме (8 + 1) с соотношением радиусов $\rho/R \approx 1{,}613$, близким к ЗС

Здесь же налицо стремление восьми одинаковых кругов плотно упаковаться вокруг центра так, что истинное соотношение радиусов равно 1,613 и весьма близко к золотой пропорции (рис. 4).

И аналогии простые:

2 – дуальность, деление клетки и т.п.;

3 – размерность пространства, удвоенная квадратичность $2{\cdot}2^2$ и др.

Заметим, что $2{\cdot}2^2 = 2^3 = 8$.

Это часть общего триномиально-квадратичного закона (кода) мироздания [11].

Так что, большинство псевдоЗС – следствие «планиметрической упаковки 2^3», причем как правило, плоскостного характера.

Процесс упаковки таких ячеек на плоскости (рис. 5) несложен и изящен!

А сама упаковка (рис. 6) просто изумительна в своем великолепии и незамысловатости, симметрии и пропорциональности, объединении в себе черт квадратов и окружностей, наличии квадратичных структур и проч.!

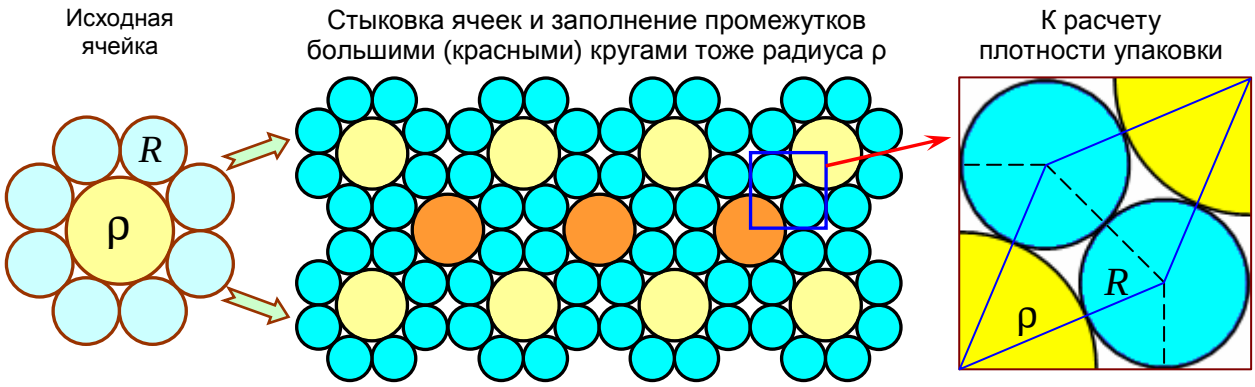


Рис. 5. Равномерное заполнение плоскости
и выделение фрагмента для определения плотности упаковки

Свойства упаковки. Обратим внимание на особенности упаковки:

– каждый малый круг соседствует с тремя ему подобными, а большой – окружен плотным кольцом из восьми малых;

– в горизонталях каждый один большой имеет две пары малых (справа и слева) так, что их структура соотносится с базой $5 = 1 + 4$ и выражается соотношением $1 : 4$.

Если кто-то в проявлении величин (3, 5, 8) видит признаки чисел Фибоначчи, то не будем их переубеждать.

Хотя, на наш взгляд, в этом еще мало совпадений, чтобы говорить о системности.

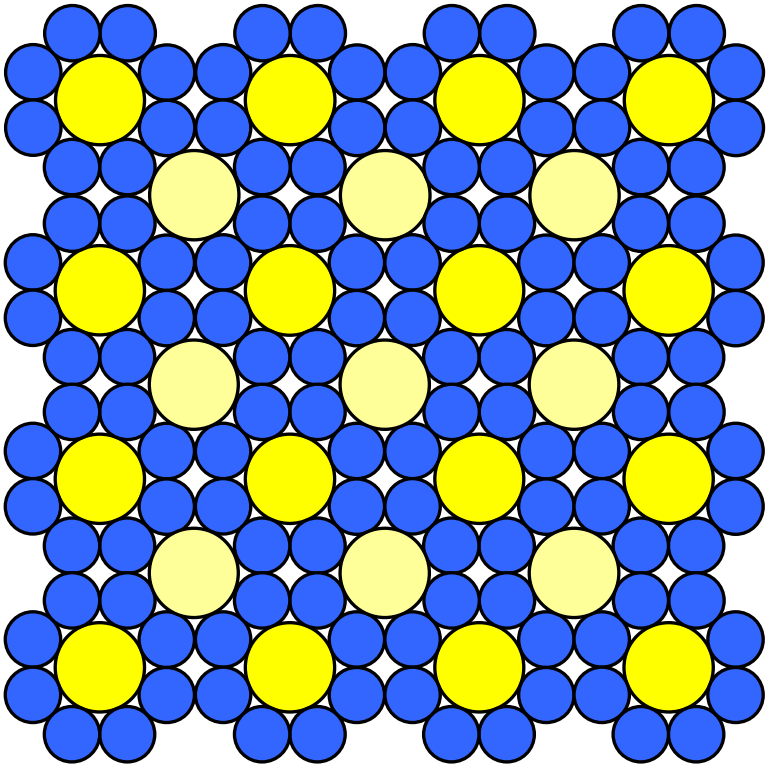


Рис. 6. Упаковка плоскости кругами по схеме (8 + 1)

А вот на примере заполненного квадрата 4×4 нам видится схема египетского треугольника: $3^2 + 4^2 = 5^2$, где 16 – основные круги, 9 – "дозаполненные" круги.

А общее количество малых кругов составляет $8 \cdot 16 = 2^7 = 128$.

То есть, по сути, имеем дело с двоично-структурированной системой.

Здесь же налицо стремление восьми одинаковых кругов плотно упаковаться вокруг центра так, что соотношение радиусов равно 1,613.

Так что, большинство псевдоЗС – возможное следствие «планиметрической упаковки 2^3», причем, как правило, плоскостного характера.

Хорошо известно [12, 13], что на плоскости самой плотной является гексагональная решетчатая упаковка кругов с плотность упаковки $\pi/\sqrt{12} \approx 0{,}9069$.

Параметры упаковок шаров в размерностях до 24 можно найти в работе [14, с. 33].

Плотность нашей упаковки определяется из условий заполнения в характерной квадратной ячейке (см. рис. 5, справа) и составляет

$$p = \frac{\pi R^2\left(2 + k_8^2/2\right)}{R^2\left(2+\sqrt{2}\right)} = \pi \frac{2^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} - 1\right)^2}{2\left(2+\sqrt{2}\right)^2} \approx 0{,}8897\,,$$

что всего лишь на 1,7 % меньше максимально возможной плотности.

Это хороший результат, тем более мы и не преследовали такую цель.

С другой стороны, весьма вероятно, что описанные разнообразные квадратичные свойства упаковки вместе с достаточно плотной, но не максимально возможной упаковкой, весьма благоприятны для формирования структур живых систем. К этому можно добавить и необычные структурообразующие свойства воды на молекулярном уровне, которые также связаны с двоичным кодом (атомная масса кислорода –16).

Вода и восьмеричная упаковка.

Вода – основа жизни и необходимый компонент, пожалуй, всех живых систем.

Не будем также забывать, что количество протонов кислорода – 8.

В этой связи возникают явственные параллели внутреннего строения молекул воды с упаковкой (8+1) так, что гипотетически может накладывать свой отпечаток даже на строение и пропорции живых существ. Чем не гипотеза? – Во всяком случае, она более реалистична, чем многие сказки о красивых гармоничных пропорциях. Даже если они и есть, то вторичны по отношению к более основополагающему принципу.

В работе [15] предложена дуально-пентагональную модель молекулы воды – матрицы (лат. *matrix* – матки, источника, начала и первоосновы) жизни.

Данную структуру (рис. 7) в общем случае можно дополнить (до 2^5) димерами H_4O_2, которые образуются при испарении воды и распаде ее кластеров с превращением практически в простой газ.

Главный здесь смысл заключатся в том, что вода связана с золото-образующими числами (2 и 5), когда связка 2–5 является ключевой в тождестве $\Phi = \frac{2^0 + \sqrt{5}}{2^1}$, а число Ф – следствием закона более высокого уровня, чем просто ЗС или математическая пропорция.

В целом 2^5 – это число структурированной или дуально-пентагональной гармонической пропорции!?

В конечном счете, это приводит нас к важному обобщению в виде природного "закона квинты" $(1-2-5)$, частным случаем которого является то же золотое сечение.

То есть ЗС является частным в природном структурировании на основе квинтовых закономерностей в их условно "радикальном проявлении" (через корень из пяти).

Что здесь мы обнаружили небезынтересного?

То, что числа 2, 4 и 8 в аддитивной процедуре Фибоначчи могут приводить к числам, делящимся на 8, не так уж и удивительно (табл. 2).

Но вот относительно всех других представителей 1, 3, 5, 6 и 7 это выглядит довольно необычно.

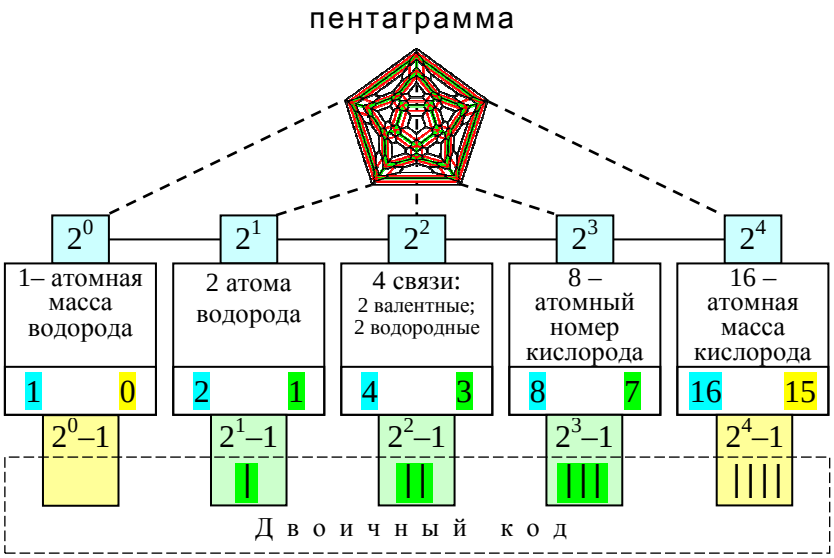


Рис. 7. Дуально-пентагональная структура молекулы воды, дополняемая димерами $2 \cdot H_2O = H_4O_2$

Таблица 2

Начальные числа дуальных последовательностей Фибоначчи, сходящихся к ЗС

0 0	1 2	1 2	2 4	3 6	5 10	8 16
0 0	3 4	3 4	6 8	9 12	15 20	24 32
0 0	5 6	5 6	10 12	15 18	25 30	40 48
0 0	7 8	7 8	14 16	21 24	35 40	56 64

В целом вместе с нулевым начальным условием все натуральные числа до 8 приводят де-факто за 5 шагов по схеме Фибоначчи к десятичной таблице умножения восьми на данные числа.

А это уже далеко немаловажная закономерность, характеризующая необычные свойства числа $2^3 = 8$:

$$(f_0,\ f_1) = (0,\ k), \quad f_j = f_{j-1} + f_{j-2} \ \Rightarrow \ f_6 = 8k\,.$$

ЗС – не обязательно самостоятельный кирпичик природы, который сам по себе может и не существовать, во всяком случае, в явном виде, но может проявляться в виде гипотетических соотношений.

Но соотношение – это даже не физическая величина. Её не за что подвесить.

И здесь в выгодном свете (с точки зрения науки о гармонии) как раз и выступает двоичная пентагональность – прямой прародитель ЗС, наравне с единицей.

Восьмеричные трансформации. Продолжая тему упаковки кругов по схеме (8 + 1), отметим, что центры восьми окружностей располагаются фактически в вершинах двух квадратов, повернутых относительно друг друга на 45°.

Это свойство порождает особые линии симметрии, что наглядно было видно из упаковки плоскости кругами, а также в иных геометрических проявлениях, в частности, на примере плоской кривой "Роза", напоминающей символическое изображение цветка.

а) Задание k-лепестковой плоской кривой "Роза" в параметрической форме (относительно t) имеет вид ($k' = k^{-1}$, $k'' = 1 + k'$):

$$\begin{cases} x(t) = k''(\cos tk' - \cos tk''), \\ y(t) = k''(\sin tk' - \sin tk'')\,. \end{cases}$$

Задавая для переменной t фиксированный дискретный шаг d, и соединяя точки прямолинейными отрезками, получаем самые разные узоры-модификации (рис. 8).

Простое описание данная кривая имеет в полярной системе координат [16] $\rho = \sin k\varphi$.

Вся кривая располагается внутри окружности единичного радиуса.

Число лепестков равно k, если k – нечетное и $2k$, – если четное.

Для несокращаемого дробного значения $k = m/n$ количество лепестков розы равно m, если оба числа (m, n) нечетные и $2m$, если хотя бы одно – четно (рис. 9).

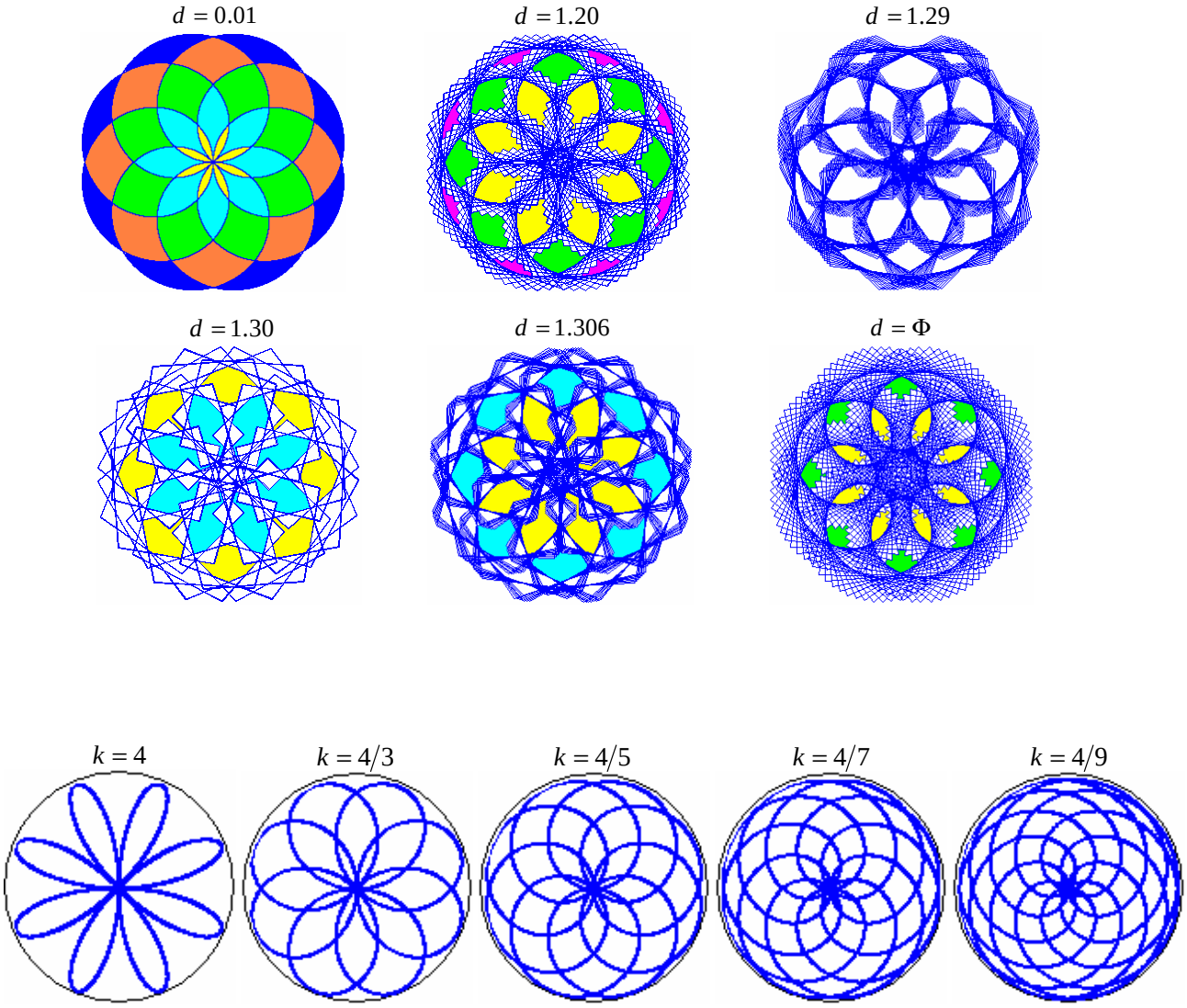


Рис. 9. Виды полярной розы при различных значениях k

б) Весьма показателен пример, приведенный в заметке [17], как специалисты одной из лабораторий (Agilent Laboratories) по разработке аналого-цифровых преобразователей (АЦП) для измерительных систем решали задачу экономичного дублирования при выходе из строя одного из разряда: «Мы используем для взвешивания 12-разрядный преобразователь с весами разрядов $g = 1{,}6$ (каждый следующий разряд больше младшего в 1,6 раза), а затем преобразуем его в 8-разрядный двоичный код, который является выходом АЦП-микросхемы... Число 1,6 мы получили экспериментально-эмпирическим путем».

Поскольку речь идет, в конечном счете, о системном выходе в виде 8-разрядного двоичного кода, то допустимо предположить, что американские специалисты экспериментальным путем вышли на константу $k_8 \approx 1.6$, которая в данном случае обеспечивает корректировку и достаточно плотную "упаковку" выходного сигнала, хотя и не максимальную.

в) Правильные 8-угольны формы нашли широкое распространение во многих странах при изготовлении различных почетных знаков отличия (рис. 10).

Знак ордена Св. Станислава с мечами (Российская империя)

Звезда ордена Британской империи

Орден Св. Владимира

Рис. 10. Примеры 8-лучевых знаков отличия и знаков орденов (организаций)

3. Правильные многогранники

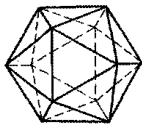
Рассмотрим два правильных многогранника: икосаэдр и додекаэдр.

Гранями додекаэдра являются правильные пятиугольники.

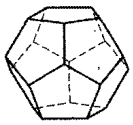
В каждой вершине икосаэдра сходится пять треугольников. Если его вершину срезать, то получим также правильный пятиугольник.

В силу этих причин оба эти геометрических тела имеют связь с числом золотой пропорции Φ [18, с. 49], в частности, через радиусы описанной и вписанной сфер (табл. 2).

Примечательно, что отношение радиуса описанной сферы к диаметру вписанной сферы для додекаэдра и икосаэдра одинаково и составляет



$$\frac{R}{2r} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3-\Phi}}{\Phi} \approx 0{,}6292\,,$$



что в определенном смысле можно считать довольно близким к числу золотой пропорции.

Таблица 2

Элементы правильных многогранников,
длина ребра равна a

Многогранник	Радиус описанной сферы, R	Радиус вписанной сферы, r	$R/2r$
Икосаэдр	$\frac{a}{4} \cdot \sqrt{2\left(5+\sqrt{5}\right)} = \frac{a}{2} \cdot \Phi\sqrt{3-\Phi}$	$\frac{a}{4} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\Phi^2}{\sqrt{3}}$	0,6292
Додекаэдр	$\frac{a}{4} \cdot \sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right) = \frac{a}{2} \cdot \Phi\sqrt{3}$	$\frac{a}{4} \cdot \sqrt{10+\frac{22}{\sqrt{5}}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\Phi^2}{\sqrt{3-\Phi}}$	0,6292

Напомним [19], что икосаэдр лучше всего из всех правильных многогранников подходит для триангуляции сферы методом рекурсивного разбиения. Он содержит наибольшее среди них количество граней (20), поэтому искажение получающихся треугольников по отношению к правильным минимально.

Додекаэдр, составленный из 12 правильных пятиугольников, имеет 15 осей симметрии, проходящих через середины противолежащих параллельных ребер, и 15 плоскостей симметрии, проходящих в каждой грани через вершину и середину противоположного ребра.

Усеченный икосаэдр[3] применяется как примерная модель сферы в футбольном мяче.

---

[3] Усеченный икосаэдр образуется срезанием 12 вершин с формированием граней в виде правильных пятиугольников, а 20 треугольных граней превращаются в правильные шестиугольники. При этом число вершин нового многогранника увеличивается в 5 раз (12×5=60),

В химии его структуру повторяет простейший из фуллереннов[4].

В хвалебных одах или мифологических образах ЗС присутствие числа Ф в формулах приведенных многогранников возводится в некий абсолют.

Чего здесь больше "личности, истории, чуда или слова" (по Лосеву) судить не беремся, но с таким же успехом во многие формулы, содержащие двойку, можно ввести число ЗС путем простой замены $2 = \left(1+\sqrt{5}\right)\phi$.

Например, знаменитая формула Эйнштейна запишется через ЗС так: $E = mc^{\left(1+\sqrt{5}\right)\phi}$.

Весьма забавно, не правда ли? – Ну, и ничего, что непривычно. Зато налицо перевоплощение: материя увязана с массой вещества через золотую пропорцию.

Примеры квазиЗС. Характерных примеров моделей, в основе которых лежат вполне конкретные числа, близкие к ЗС можно привести много. Возьмем, например, одну из последних работ по этой теме д.т.н. А. Коновалова [20]. Исходные данные результатов наблюдений он нормирует $v' = v/v_{\max}$ и по ним строит простые регрессионные модели преимущественно параболического вида $y' = ax'^2 + bx'$, принимая в частности, $b = 1 - a$.

По утверждениям автора выскажем несколько замечаний:

1) Подобное нормирование не влияет на сокращение объема фактических данных, необходимых для установления количественных связей.

2) Решение (регрессионное соотношение), полученное для каких-нибудь одних условий, не становится универсальным или пригодным для всех.

3) Разброс значений параметра a слабо влияет на характер кривых (рис. 11). Приведенное значение $a = 0.618$ для массы древесной зелени и хвои сосны с таким же успехом может быть, например, 0.60 или 0.65, и совершенно не иметь никакой связи с числом золотой пропорции.

4) Попадание значений коэффициентов в интервал ЗС не только малообоснованно в физическом плане, но и не вычерчивает никакой связи с математической сущностью золотой пропорции. Это не модель ЗС, а кривая регрессии с коэффициентами, похожими на ЗС, но не имеющими четкого содержания или природной интерпретации.

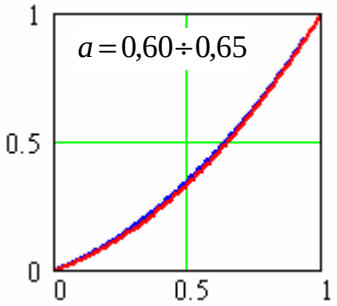


Рис. 11. Практическая неразличимость кривых, охватывающих зону ЗП

Даже если условно принять $a \approx \phi = \left(\sqrt{5}-1\right)/2$, что это означает? – Давайте посмотрим.

Пусть, например $x' = 0{,}5$. Тогда $y' = 0{,}345$ и $x'/y' = 1{,}447$, то есть ни о какой модели ЗС говорить не приходится.

Попробуем перейти от нормированных значений к фактическим величинам с использованием максимальных значений

$$\left(x_{\max}, y_{\max}\right) = (40,\ 46 + 76) \quad x/y = x'/y' \cdot x_{\max}/y_{\max} = 0{,}474 .$$

Результат то же.

И уже совсем не понятно, когда при подсчете массы древесной зелени хвойных деревьев перемножаются разнородные физические величины: килограммы и диаметры стволов [20, ниже табл. 4].

Так что приближенная модель ЗС налицо. А если принять во внимание перенос акцентов с соотношения переменных на малопредставительные коэффициенты регрессии нелинейного уравнения, что является нарушением основного принципа ЗС, то расчетная схема может спокойно переквалифицироваться и в модель псевдоЗС.

Мы могли аналогичным образом проследить многие другие попытки подогнать результаты под заранее выбранный объект ЗП, как например, уже делали в работах [21–23], но это выходит за рамки нашего исследования.

---

[4] ФУЛЛЕРЕНЫ (бакиболы) – молекулярные соединения класса аллотропных форм углерода (алмаза, карбина, графита) в виде выпуклых замкнутых многогранников, составленных из четного числа 3-координированных атомов углерода.

Да и не имеет особого смысла, поскольку научная общественность сама даст адекватную оценку подобным материалам.

Некоторые целочисленные свойства чисел 1618 и 16180.

1) Решение диофантового уравнения квадратичного типа (A123654)

$$x^2 + (x + 809)^2 = y^2 \quad \rightarrow \quad (x,\ y) = (\mathbf{16180},\ 23461).$$

Примечательно, что 23461 = 29·809.

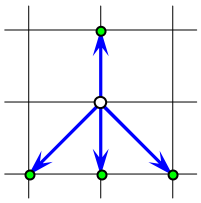
Кроме того, рекуррентная формула общего решения уравнения имеет вид:

$$x_n = 6x_{n-3} - x_{n-6} + \mathbf{1618}.$$

с любопытным аттрактором этой последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-3}} = 3 + 2\sqrt{2}$.

2) Число $n = 16180$ обладает тем свойством, что $\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k k\lceil n/k \rceil = 0$, где $\lceil \xi \rceil$ – целая часть от ξ.

Таких чисел не так уж много (A072663): 2, 26, 28, 76, 210, 1801, 3508, **16180**, 29286...



3) Количество "маршрутов" (в пределах первого квадранта плоскости Z^2), начинающихся из точки (0,0), заканчивающихся на оси Oy и состоящих из n шагов, взятых из множества {(–1, –1), (0, –1), (1, –1), (0, 1)}.

Изюминка таких маршрутов заключается в том, что подниматься можно только по вертикали, а спускаться – уже тремя способами. При n = 13 = 12 + 1 количество таких маршрутов составляет **16180** (A151394).

Такое же самое число возможных "маршрутов" расположено и в пределах первого октанта в Z^3, начиная с точки (0,0,0), и состоящих из n шагов, взятых из множества {(–1, –1, 0), (–1, 0, 1), (–1, 1, –1), (1, 0, 0)}– A148005.

4) Имеет место быть (в целых числах) красивое равенство $e^{e^2} = \mathbf{1618}$.

5) Примечательна сумма двух чисел Фибоначчи: $F_8 + F_{16+1} = 21 + 1597 = \mathbf{1618}$.

6) Весьма редкое для натуральных чисел n свойство образовывать набор простых чисел вида $12n + k$, где k = {1, 5, 7, 11, 13, 17}, а 12 наравне с 24 – особые числа в математике [24]. Величины n образуют последовательность: 8, 1338, **1618**, 3648...

Выводы и предложения.

1. В общих чертах дана характеристика некоммерческого проекта по формированию «Банка моделей Василенко» (BMV).

2. Сделаны первые "взносы" в BMV в виде нескольких моделей:

– вероятность несократимости наугад выбранной обыкновенной дроби составляет

$$S_v = 6/\pi^2 \approx 0{,}608;$$

– для 8 одинаковых касающихся кругов вокруг одного соотношение их радиусов близко к золотой пропорции и равно

$$k_8 = \rho/R = (\sin \pi/8)^{-1} - 1 = \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} - 1 \approx 1{,}613;$$

– отношение радиуса описанной сферы к диаметру вписанной сферы для додекаэдра и икосаэдра также поблизости от ЗП

$$\frac{R}{2r} = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{3+\sqrt{5}} \approx 0{,}629\,,$$

Возможно, именно по таким схемам "пакуются" или структурируются некоторые живые и костные системы, что приводит к соотношению их базовых размеров, похожему на золотую пропорцию, но не имеющему к ней прямого отношения.

Исследователь может попадать на подобные структурообразующие числа и принимать их за ЗС, которого де-факто в задаче нет.

Дальнейшие усилия в данном направлении целесообразно сосредоточить на пополнении BMV новыми моделями.

По сути, речь идет о математических задачах на квазиЗС или задачах, похожих своим решением на золотую пропорцию

Каждая новая модель – это ещё один шаг к высвобождению золотой пропорции от цепких пут ложных конструкций типа квази- или псевдоЗС.

Приглашаются все желающие.

Авторы могут выполнить собственное описание предлагаемой ими структуры, либо удобным способом выслать нам для обобщения.

В любом случае авторство модели в BMV сохраняется.

Дивидендами будет по настоящему научная апробация и признание результатов исследований в области золотой пропорции на фоне разноликого и часто пустопорожнего многоголосья аллилуйных песнопений "Во славу ЗС".

По мере формирования банка будут издаваться обзорные научные статьи.

Важное условие: модель должна быть математически обоснованной.

Двери банка для Вас всегда открыты.

Автор выражает искреннюю благодарность участникам Лаборатории золотого сечения (http://www.a3d.ru/disput/61/1, модератор Радзюкевич А.В.) за полезное и конструктивное обсуждение вопроса об упаковке кругов, что позволило по-новому посмотреть на данную проблему и нашло отражение в материалах данной статьи.

Литература.

1. *Иванов В.Г.* История этики Древнего мира. – Л.: ЛГУ, 1980. – 224 с.
2. *Никитин А.В.* Компьютеры Фибоначчи. Точки над i. – http://www.andrejnikitin.narod.ru/fib1.htm.
3. *Лосев А.Ф.* Диалектика мифа. – М.: Академ. проект, 2008. – 304 с.
4. *Лосев А.Ф.* История философии как школа мысли // Коммунист. – 1981. – № 11. – С. 55–66.
5. *Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Ранняя классика: 2-е изд., испр. и доп. – М.: Науч.-изд. центр "Ладомир", 1994. – 538 с.
6. *Белянин В.С.* К вопросу об исторической теме при изучении золотой пропорции. – 2006. – http://www.a3d.ru/architecture/stat/183.
7. *Белянин В.С.* Еще раз к вопросу об исторической теме при изучении золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13775, 14.09.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321031.htm.
8. *Василенко С.Л.* Математические пропорции взаимодействия целого и его частей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15248, 23.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322040.htm.
9. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел: Учеб. пособие, изд. 11-е стер. – Спб.: Лань, 2006. – 176 с.
10. *Сизый С.В.* Лекции по теории чисел: Учеб. пособие для математ. спец. – Екатеринбург: УГУ, 1999. – http://www.allmath.ru/highermath/algebra/theorychisel-ugu/index.htm.

11. *Василенко С.Л.* Триномиально-квадратичный код мироздания // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15995, 12.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161675.htm.

12. *Слоэн Н.Дж.А.* Упаковка шаров // В мире науки. – 1984. – № 3. – С. 72–82. – http://www.ega-math.narod.ru/Nquant/Spheres.htm.

13. *Упаковка шаров* // Виртуальная лаборатория. – 2010. – http://ru.vlab.wikia.com/wiki/Упаковка_шаров.

14. *Конвей Дж., Слоэн Н.* Упаковки шаров, решетки и группы: В 2-х т. Т. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 415 с. – http://vlabdownload.googlecode.com/files/Upak_Konv_1.djvu.

15. *Василенко С.Л.* Дуально–пентагональные структуры // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15573, 01.10.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161554.htm.

16. *Роза* (плоская кривая) // Википедия. Дата обновления: 04.01.2010. http://ru.wikipedia.org/?oldid=21067424.

17. *Розин Б.С.* Один штрих в пишущуюся историю математики гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15999, 15.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321186.htm.

18. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.

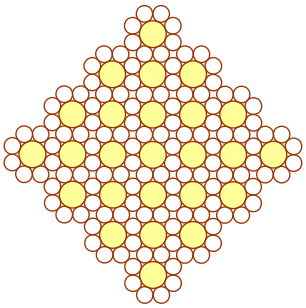
19. *Икосаэдр* // Википедия. Дата обновления: 29.04.2010. http://ru.wikipedia.org/?oldid=24170578.

20. *Коновалов А.А.* Обобщение результатов наблюдений и золотое сечение // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16024, 31.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161685.htm.

21. *Василенко С.Л.* Случайность и золотая пропорция в системе «хаос–порядок» // Академия Тринитаризма. М.: Эл. № 77-6567, публ.15220, 09.04.2009. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322034.htm.

22. *Василенко С.Л.* Асимптотика золотого сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15252, 25.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322042.htm.

23. *Василенко С.Л.* Бифуркации в нелинейной динамической модели, основанной на "золотой" пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15232, 14.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322037.htm.

24. *Василенко С.Л.* Периодические структуры на циферблате Фибоначчи // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15998, 14.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161676.htm.

© ВаСиЛенко, 2010