С.Л. Василенко

Квадратичная природа золотой пропорции

Не следует множить сущее без необходимости
Бритва Оккама[1]

Каждый день время от времени смотрим на отдельные события "квадратными глазами", но редко задумываемся, – почему?

На слово "глаз" у С. Ожегова можно найти пояснение [1]: большие (круглые, *квадратные*) *глаза* делать – выражать удивление или крайне удивляться.

Широко раскрывающиеся от изумления глаза и впрямь напоминают квадраты.

Подобные визуальные знаки обычно неизменны и имеют устойчивый характер, а выражения глаз играют особую роль в невербальном отражении человеческих эмоций и передаче разнообразной смысловой информации. – Своеобразные коды.

«Широко раскрытые глаза передают разные степени удивления, вплоть до изумления и потрясения, а также "сильное желание", "заинтересованность чем- или кем-либо". Удивленные, изумленные (но не потрясенные) глаза, делать круглые (большие, страшные, *квадратные*) *глаза*, вылупить (выкатить, вытаращить, выпучить) глаза, когда создается ощущение, что глаза вылезают из орбит и лезут на лоб, – все это мимические жесты, передающие разные степени удивления» [2, с. 237].

Продолжая эту мысль, выскажемся в контексте косвенных аналогий, что "квадратные глаза" – это интуитивное представление человека и своего рода зеркальная реакция на новую информацию, исходящую из внешнего мира, мгновенные срезы которого действительно имеют плоскостно-квадратичный характер.

"Квадратные глаза" – отражатель триномиально-квадратичного кода мироздания [3].

Понятно, приведенные квадратичные параллели не следует воспринимать буквально, и они нигде не пересекаются, даже в геометрии Лобачевского.

Это больше ассоциативные образы через квадратичное восприятие мира в перманентной череде плоских проекций.

В этой связи небезынтересно проследить один из математических феноменов – золотой пропорции – все теми же "квадратными глазами", а точнее через призму ее прародителя в виде квадратного уравнения общего вида.

Квадратичная сущность ЗП. Анализ немногочисленных ключевых свойств золотой пропорции позволяет утверждать, что онтологически она обязана своим происхождением квадратичным закономерностям.

Исследуя вопросы соподчиненности, которые наиболее рельефно выражены в философской дилемме[2] курицы и яйца, важным остается момент истины, связанный с расстановкой акцентов при обобщении задачи.

Напомним:

обобщение понятий – логическая операция, посредством которой в результате исключения видового признака получается понятие более широкого объема, но менее конкретного содержания.

---

[1] Методологический принцип бережливости. Альтернативное написание: *не следует привлекать новые сущности без самой крайней на то необходимости*. Бритва Оккама – название принципа, а не его атрибуция. Он известен еще со времен Аристотеля и в логике носит название «принцип достаточного основания».

[2] Мой сын, будучи в пятилетнем возрасте, разрешил этот логический парадокс (с понятиями нечеткого объема) весьма просто, сказав, что первым появился ... цыпленок.

Таким видовым признаком, который исключается, является отличительная особенность названия "золотая". Ибо любое частное решение, которое мы можем снабдить похожими эпитетами, имеет такие же равные права "на долю наследства" в квадратном уравнении общего вида.

Но такая разноголосица частного не может быть востребована в общем понятии. Поэтому все они становятся просто разновидностями пропорции, обусловленной квадратным уравнением.

И если нам со словом "золотое" насаждают любые другие числа, кроме величины золотой пропорции (в линейном или угловом измерении), то это элементарная подделка.

Мы уже начинали выстраивать логические связи между ЗП и уравнением [4].

Напомним основные положения:

– ЗП не распространяет свои свойства на уравнение общего вида, которое никоим образом не становится его обобщающим кодом, а наоборот ЗП как губка через свойства общего решения впитывает все генетические свойства квадратного уравнения;

– ЗП не только вступает в законные права наследника структурных свойств и отношений, характерных для квадратного уравнения, но вдобавок насыщает их дополнительными только ему присущими свойствами, по праву формируя заслуженный нимб уникальности и неповторимости;

– образно говоря, ЗП – гениальный ребенок своих родителей – обычных квадратных уравнений общего вида, и обратного хода (влияния) на них ЗП уже не имеет.

Основную тезу изложенных утверждений можно свести к одной формулировке:

Всеми своими свойствами золотая пропорция обязана квадратному уравнению.

В связи с этим вполне закономерно выполнить сопоставление одинаковых позиций для двух уравнений или их характеристик.

Это позволит еще раз проследить связующие линии и убедиться в правомерности наших утверждений.

Сравнительный тест-анализ сопоставимости:

/слева – свойства квадратного уравнения общего вида, справа – уравнения ЗП/

Исходное алгебраическое уравнение:

$$x^2 = px + q\,, \qquad\qquad x^2 = x + 1\,.$$

Положительный корень уравнения (дискриминант больше или равен нулю):

$$\lambda = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}\,, \qquad\qquad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,.$$

Разностное (возвратное) уравнение как аналог алгебраического уравнения, $t \geq 0$:

$$x_{t+2} = px_{t+1} + qx_t\,, \qquad\qquad x_{t+2} = x_{t+1} + x_t\,.$$

Стремление числовой последовательности к аттрактору (максимальному действительному корню):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \lambda\,, \qquad\qquad \lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = \Phi\,;$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+k}}{x_t} = \lambda^k\,, \qquad\qquad \lim_{t\to\infty} \frac{x_{t+k}}{x_t} = \Phi^k\,.$$

Разложение в цепную (непрерывную) дробь, которое следует непосредственно из самого уравнения $\lambda^2 = p\lambda + q$ путем его многократного повторения:

$$\lambda = p + \frac{q}{\lambda} = p + \frac{q}{p + \frac{q}{\lambda}} \approx p + \frac{q}{p + \frac{q}{p + \frac{q}{p + \ldots}}}, \qquad \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \ldots}}}.$$

Разложение в радикал-рекурсию

$$\lambda = \sqrt{q + p\lambda} = \sqrt{q + p\sqrt{q + p\lambda}} \approx \sqrt{q + p\sqrt{q + p\sqrt{q + \ldots}}}, \quad \Phi = \sqrt{1 + \Phi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}} \approx \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}.$$

Последние исследования:

1. Аналитическое (явное) определение членов последовательности в виде обобщенной формулы Муавра–Бине для квадратного уравнения общего вида [5]:

$$x_t = \frac{\lambda^t - (-q)^t \lambda^{-t}}{\sqrt{p^2 + 4q}}, \qquad x_t = \frac{\Phi^t - (-1)^t \Phi^{-t}}{\sqrt{5}}.$$

Исходная формула была впервые приведена в 1718 г. французским математиком Муавром в виде $x_n = (\tau^n - \sigma^n)/(\tau - \sigma)$, где $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$, $\sigma = (1 - \sqrt{5})/2$ – корни квадратного уравнения $x^2 = x + 1$, а уже гораздо позже в 1843 г. независимо выведена Бине [6, с. 29].

Заметим, что у нас $q \geq 1$, однако в литературе по золотому сечению западные ученые предпочитают ссылаться на работу [7, с. 62], где представлено расширение формулы Муавра–Бине только для частного случая квадратного уравнения $x^2 = px + 1$ при $q = 1$.

Причины такой манипуляции становятся понятными из следующего пункта в связи с неувязками с так называемыми гиперболическими функциями Фибоначчи–Люка (ГФЛ).

2. Переход на непрерывное время t и фиксация коридора изменчивости комплексной функции $x(t) \Leftarrow x_t$

Для квадратичного уравнения $x^2 = px + q$ аналога ГФЛ нет (?)	Гиперболические функции Фибоначчи–Люка (ГФЛ) $F_c(t) = \frac{\Phi^t + \Phi^{-t}}{\sqrt{5}}$, $F_s(t) = \frac{\Phi^t - \Phi^{-t}}{\sqrt{5}}$ $L_c(t) = \Phi^t + \Phi^{-t}$, $L_s(x) = \Phi^t - \Phi^{-t}$

Непрерывные огибающие функции $\left.\begin{matrix} \mathrm{C}(t) \\ \mathrm{S}(t) \end{matrix}\right\rangle = \frac{\lambda^t \pm q^t \lambda^{-t}}{p'}$	С квадратным уравнением общего вида ГФЛ никак не связаны (?)

Непрерывные функции Фибоначчи – это числовые функции. Их область определения – действительные числа, область значений – множество комплексных чисел, поскольку присутствует операция возведения в степень отрицательного числа. Чтобы их отобразить, целесообразно переходить к реальным частям. Тогда легко виден коридор их изменчивости между двумя огибающими. Для коэффициентов $p = q = 1$ они названы ГФЛ.

Но, как видим, функции ГФЛ обособлены, изолированы и живут отдельной жизнью.

Они теряют органически-преемственную связь с обычным квадратным уравнением общего вида, в частности при $q \geq 1$.

Это абсолютно непостижимо! – Современная теория Фибоначчи настолько мощна, что спокойно выходит на просторы алгебраического уравнения n-й степени.

А тут связь обрывается уже на самом низком уровне обобщения.

То есть, дальше простого уравнения $x^2 = px + 1$ ГФЛ элементарно не работают.

Напомним одну особенность. По Дирихле (1837): y есть функция переменной x на некотором отрезке $a \le x \le b$, если каждому значению x (на этом отрезке) соответствует совершенно определенное значение y. Причем безразлично, каким образом установлено это соответствие – аналитической формулой, графиком, таблицей или обычными словами.

И что мы видим? – Функции, задающие коридор обобщенной функции Фибоначчи, спокойно могут быть описаны графиком, таблицей и даже словами (рис. 1).

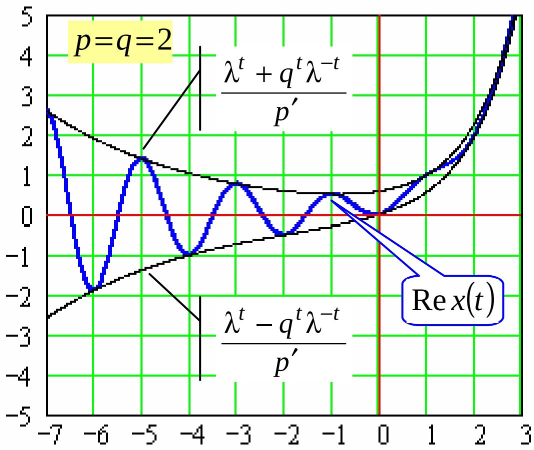

Рис. 1. Обобщенная функция Фибоначчи со своими огибающими линиями $\lambda = 1 + \sqrt{3}$, $p' = \sqrt{p^2 + 4q}$: концепция ГФЛ не работает

Мы их можем отобразить даже аналитически (!), но только никак не с помощью ГФЛ (?).

Для методологии развития многовековой теории Фибоначчи подобная ситуация характеризуется как нонсенс. "Этого не может быть потому, что такого не может быть никогда", – говорят в подобных случаях.

Мы имеем дело, пожалуй, с единственным случаем, когда квадратное уравнение общего вида не имеет своего аналога (в данном случае ГФЛ), что свидетельствует об узости ГФЛ и их функциональной непригодности.

Действительно, ГФЛ – это просто видоизмененная запись решения квадратного уравнения частного вида, причем в такой противоестественной форме, которая не допускает обобщения для уравнения $x^2 = px + q$, не говоря уже об объектах более высокого порядка.

Это дает основание признать данный путь тупиковым и сконцентрировать внимание на обычных апробированных траекториях в виде огибающих линий.

Отказ от функции ГФЛ и переход на широко известные в математике огибающие кривые позволяет легко выйти из этого тупика-противоречия [8] не только для квадратного уравнения общего вида, но и решать задачи для кубического уравнения (например, последовательностей Трибоначчи) и других обобщений.

Еще украинский академик Ю. Митропольский в свое время призывал «*не сбиваться на простую игру в формулу, за которой не стоит никакого реального содержания*» [9, с. 14].

Следуя его рекомендациям, ГФЛ подпадают под бритву Оккама как лишние сущности.

3. Обобщенное уравнение на произвольное количество $2m$ начальных условий [10]:

$$x^{2m} = px^{2m-1} + pqx^{2m-3} + \ldots + pq^{m+1}x + q^m, \qquad x^{2m} = x^{2m-1} + x^{2m-3} + \ldots + x + 1.$$

Второе разностное уравнение не выводит нас с поля золотой пропорции в ее истинном значении и является новой условно-многомерной формой ее подачи.

В частности, оно выводит на важное, многостороннее и действительно полезное обобщение в части возможного интегрирующего начала ЗП в развитии определенных природных процессов и явлений.

А именно. Можно задать триллионы совершенно произвольных соразмерных начальных условий (целых, действительных, мнимых, иррациональных и др. чисел), и через считанное количество итерационных шагов эта рекурсия выводит нас с той или иной точностью на аттрактор – золотую пропорцию.

Это несомненный прогресс по сравнению с общеизвестной двучленно-аддитивной схемой Фибоначчи. Теперь "поставщиком ЗП" может быть не только пара начальных условий (затравочных чисел), например (1, 1), но и любое сколь угодно большое ограниченное множество числовых объектов.

4. Квадратичные цепи или ветвящаяся вертикально-горизонтальная структура представления квадратичной гармоники в виде множества цепных дробей [11]:

$$\lambda = \frac{x_t + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \ldots}}}}{x_{t-1}}, \qquad \Phi = \frac{F_t + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \ldots}}}}{F_{t-1}};$$

$$a = x_t + qx_{t-2}, \quad b = (-1)^t q^{t-1}, \qquad a = F_t + F_{t-2} = L_{t-1}, \quad b = (-1)^t,$$

F_t – числа Фибоначчи.

Данное замечательное свойство золотой пропорции – иметь целый спектр разложений быстро сходящихся цепных дробей – также полностью корреспондируется с квадратным уравнением

Доказано, что формы разложения ЗП и соответствующие их скорости сходимости могут быть самыми разными.

Одновременно более рельефно высвечивается в явном виде связь с числами Фибоначчи.

Прослеживается также теорема Бернулли, согласно которой отношение соседних чисел Фибоначчи стремится к своему аттрактору – ЗП.

Воочию видно, что "единичное разложение" числа Ф – всего лишь частный случай его представления непрерывной (цепной) дробью.

Этим самым развеян еще один устойчивый миф ЗП, что она якобы имеет самую медленную редкостную сходимость среди многих других иррациональных и трансцендентных чисел.

Сходимость. Плохая сходимость ЗП сильно преувеличена, в том числе и Н. Воробьевым в его замечательной книге о числах Фибоначчи [12].

Отдельно взятое число Ф в его стандартном проявлении действительно дает в цепной дроби одни единицы, поэтому сходится наиболее медленно.

Но онтологически его образующаяся иррациональность в виде корня из пяти сходится весьма быстро, следовательно, и само число Ф можно вычислить за малое число итераций по сравнению со многими другими иррациональными числами.

$$\Phi = \frac{1}{2}\cdot\left(3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ldots}}}}\right); \quad \sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}; \quad \sqrt{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}};$$

$$\Phi = \frac{1}{2}\cdot[3; (4)], \quad \sqrt{3} = [1; (1, 2)], \quad \sqrt{7} = [2; (1, 1, 1, 4)].$$

Сходимость цепных дробей из ветвящейся вертикально-горизонтальной структуры (п. 4) и вовсе фантастическая, например, только для четырех звеньев цепи [11]:

$$\frac{1+\cfrac{1}{3940598+\cfrac{1}{7881196+\cfrac{1}{7881196+\cfrac{1}{7881196+\cfrac{1}{7881196}}}}}\cdot 1762289}{2}$$

$$\frac{1+\dfrac{1}{3940598+\cfrac{1}{7881196+\cfrac{1}{7881196+\cfrac{1}{7881196+\cfrac{1}{7881196}}}}}}{1762289}\Bigg/2 \;-\;\Phi \approx 2{,}42\cdot 10^{-69}.$$

Графическое решение. Квадратичная природа золотой пропорции достаточно наглядно проявляется в разнообразных графических построениях, которые в большинстве случаев взаимно дополняют друг друга.

Упоминание об историческом развитии методов решения квадратного уравнения мы находим в работе [13, с. 320–321, с. 438–440]. «Сам Евклид нигде не пользуется общей формулой решения квадратного уравнения даже в геометрической форме... Но в Началах имеется предложение 28, из которого может быть выведена основная формула для квадратного уравнения, которая в истории этого сыграла важную роль, так как по образцу решения этого предложения-задачи строился и геометрический вывод общей формулы решения квадратного уравнения даже во времена Виеты» [13, с. 438].

Даже «в начале существования буквенной алгебры общая формула квадратного уравнения $x^2 + px = q,\ \ p > 0$ выводилась геометрически [13, с. 320].

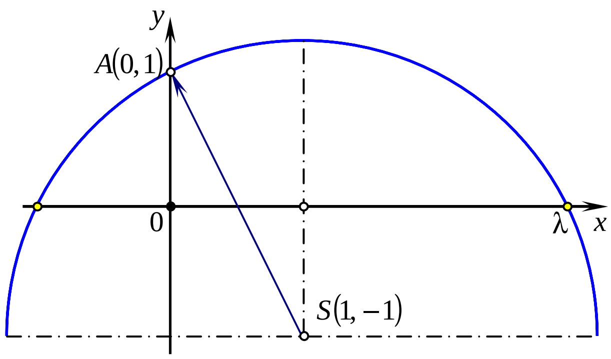

Рис. 2. Графическое решение квадратного уравнения: $p = 2$, $q = 3$

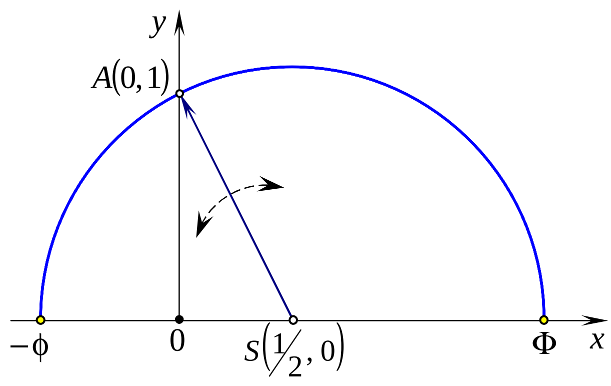

Рис. 3. Графическое решение квадратного уравнения золотой пропорции

Нам нет необходимости озвучивать пройденный математиками путь в этом направлении, и будем исходить уже из реалий сегодняшнего дня.

Существует достаточно простой, но весьма эффективный графический способ решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки [14]. Строится фиксированная точка $A(0, 1)$, а также точка $S\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{a+c}{2a}\right)$, зависящая от параметров исходного уравнения.

Для алгебраического уравнения $x^2 = px + q$ такая точка имеет координаты $S\left(\dfrac{p}{2}, \dfrac{1-q}{2}\right)$ (рис. 2)

Тогда абсциссы точек пересечения окружности (радиусом SA) с осью x являются корнями исходного уравнения.

Для алгебраического уравнения золотой пропорции $x^2 - x - 1 = 0$ это равносильно построению прямоугольного треугольника с катетами $1 : 0{,}5$ и проведению окружности радиусом $SA = \sqrt{5}/2$ (рис. 3).

Конечно, для золотой пропорции существуют и другие, возможно, более эффектные и эффективные схемы построения.

Мы остановились на выбранном варианте исключительно для того, чтобы продемонстрировать связь ЗП с квадратным уравнением общего вида.

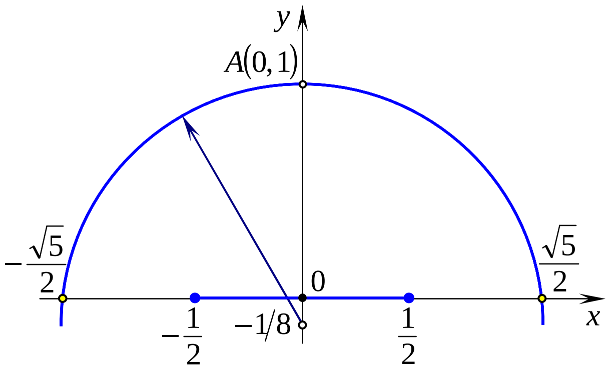

Рис. 4. Графическое решение приведенного квадратного уравнения "золотого" сечения

Представляет интерес некоторое видоизменение исходного уравнения ЗП с приведением или поправкой его решения на величину 1/2.

Сделав элементарную замену переменных $x = z + 1/2$, приходим к уравнению $z^2 = 5/4$ с простым графическим решением (рис. 4).

ЗП как составляющая общего квадратичного закона. Нередко любят повторять, что ЗП – божественная мера красоты, сотворенная в природе.

Весьма спорное утверждение, поскольку красота – понятие относительное.

Да, и все сущее – уже само по себе гармонично, а значит и красиво в силу только своего существования, независимо от форм, размеров, пропорций и т.п.

Иногда говорят, что золотое сечение (ЗС) – мера пропорциональности. Возможно, но тогда почему она до сих пор не проявила себя в физике? – А всевозможные "пупковые концепции" – пока из области фантазий, гипотез и большого желания выдавать желаемое за действительное, что больше напоминает красивые сказки и романтический энтузиазм.

Получается, что уникальность ЗС сильно преувеличена. Во всяком случае, пока.

В большинстве случаев золотое сечение – это некоторая модель, которая в природе в идеальном виде встречается крайне редко (если вообще встречается) вследствие шумов, помех, сбоев, ограничений, лимитирующих факторов и т.п.

Но в общем хоре мифов и в разноголосом песнопении «Боже, ЗС храни» есть все-таки нечто, что позволяет говорить основательно и с полной уверенностью о значимости золотой пропорции.

Это ее связь через квадратное уравнение с иными квадратичными закономерностями генезиса, эволюции и бытия мироздания с его триномиально-квадратичным числовым кодом [3] в виде тройки чисел (Φ, π, e).

Числа (Φ, π, e) фундаментальны и имеют общее "квадратичное происхождение", которое порождают кривые второго порядка: окружность, гипербола и парабола.

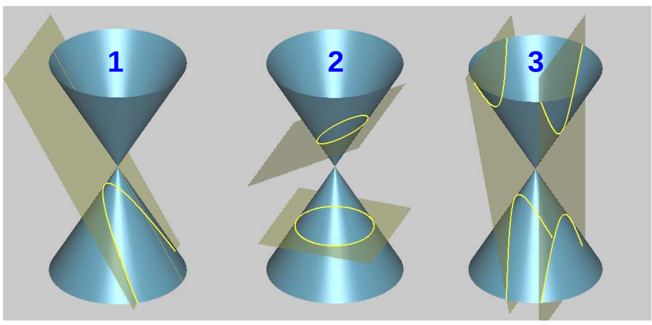

Рис. 5. Конические сечения:
1 – парабола; 2 – круг и эллипс; 3 – гипербола

Наиболее отчетливо данное связующее триединство проявляется в обычных конических сечениях (рис. 5), которые в одном теле-объекте объединяют три замечательные константы (Φ, π, e), образуемые кривыми второго порядка и выходящие далеко за их пределы, неожиданно появляясь в самых разных теориях и практических приложениях.

Чуть видоизменяя известное равенство Эйлера, получаем математическое отношение шести констант математики – нуля, двух единиц (действительной – 1 и мнимой – i) и тройки "квадратичных" чисел (Φ, π, e):

$$e^{i\pi} + \Phi(\Phi - 1) = 0\ .$$

Еще об аналитике ЗП. Квадратичные корни в аналитике ЗП иногда могут иметь специфическое проявление, создавая иллюзию проскакивания квадратного уравнения.

Нет, сама по себе внутренняя сущность остается. Но решение пропорции (равенства отношений) идет как бы в обход квадратного уравнения.

Об этом следует непременно говорить, дабы не абсолютизировать или порождать новую свежеиспеченную догматику, бороться с которой будет труднее, чем ее создавать.

Последнее подтверждается мифологическими сказаниями о ЗП, собранными вперемешку с религиозно-социальным пафосом и сверхъестественными силами, а также преувеличениями и вымыслами.

В чем же смысл перескакивания барьеров?

В работе [15] продемонстрирован любопытный переход от теоремы Пифагора – через деление целого в среднем и крайнем отношении – к числу золотого сечения.

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \to \quad y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x) \quad \to \quad \frac{z + x}{y} = \frac{y}{z - x}\ .$$

Сравнивая с математической пропорцией (задачей деления целого в среднем и крайнем отношении) $\frac{\text{Целое}}{\text{Большее}} = \frac{\text{Большее}}{\text{Меньшее}}$, имеем: $\text{Целое} - \text{Меньшее} = (z + x) - (z - x) = y$ или $y = 2x$.

Положив для определенности $x = 1$, получаем $y = 2$ и $z = \sqrt{5}$. Обозначая через число ЗС безразмерную величину Φ как отношение целого к большему, находим

$$\Phi = \frac{z + x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\ .$$

Из контекста преобразований хорошо видно, хотя мы и не использовали напрямую запись решения квадратного уравнения, оно само неявно присутствует в отображении пропорции, когда в равенство отношений мы вводим неизвестную переменную.

Двойка как основа аксиоматики натурального ряда. Натуральные числа, как мы к ним уже привыкли, – это естественные числа или числа, возникающие естественным образом при счете (в смысле перечисления или исчисления).

Так, по Арнольду натуральные числа – это те, которые участвуют в натуральном или естественном счете: один, два, три и т.д. У Бурбаки "Натуральные числа – это мощности конечных множеств" [16].

Натуральные числа обычно определяются, исходя из определений единицы и операции сложения либо "следовать за", как у Пеано [17].

Во многих культурах, особенно в восточных, число "один" символизирует начало всех вещей и совершенную неделимую сущность.

Хотя данный вопрос не очевиден. В нем прослеживается устойчивая вера в стереотипы.

Это наглядно видно на примере парадокса Банаха–Тарского [18, 19]: «трехмерный шар равносоставлен двум своим копиям». Другими словами, шар может быть разложен на несколько частей, из которых потом можно сложить два точно таких же шара.

> Разделяя шар на конечное число частей, мы интуитивно ожидаем, что, складывая эти части вместе, можно получить только сплошные фигуры, объем которых равен объему исходного шара. Однако это справедливо только в случае, когда шар делится на части, имеющие объем.

> Суть парадокса заключается в том, что в трехмерном пространстве существуют неизмеримые множества, которые не имеют объема, если под объемом мы понимаем то, что обладает аддитивным свойством, и предполагаем, что объемы двух конгруэнтных множеств совпадают.
>
> Очевидно, что "куски" в таком разбиении не могут быть измеримыми (и невозможно осуществить такое разбиение какими-либо средствами на практике).
>
> Для плоского круга аналогичная теорема неверна.

Так, и аксиомы Пеано не могут определить натуральный ряд, поскольку они не разъясняют, что означают понятия "единица" и что такое "следовать за", а лишь указывают связи между ними [20]. Кстати это довольно трудная задача. Например, полное имя единицы в теории Бурбаки требует для своей записи десятки тысяч знаков.

На наш взгляд, аксиоматическое или алгоритмическое определение натурального ряда более эффективно давать не с единицы, а с двойки.

Единица чрезвычайно неудобное начало для аксиоматически непротиворечивого установления натуральных чисел. Её даже на обывательском уровне трудно предъявить для понимания.

Так, мы сами, не говоря уже о других цивилизациях, слабо себе представляем, что такое люди, не показав рядом мужчину и женщину.

Одно яблоко, выставляемое напоказ в качестве аксиоматической единицы, малопредставительно и не несет главной смысловой нагрузки. А что, собственно говоря, мы хотим продемонстрировать: форму или симметрию, контур или цвет?

Два одинаковых яблока – это уже более целенаправленная информация.

Любая качественная сторона идет уже с избытком, а потому неинформативна и уходит на задний план. Остается только количество, которое и может быть положено в основания натурального счета.

Так и палочка для счета или просто один указательный палец, приподнятый вверх.

Дети практически ничего не понимают с одной палочкой, сколько им не тверди, что это одна палочка или прообраз "одного".

Прозрение наступает только после того, когда показывается такая же вторая палочка!

Но можно им объяснить и по-другому, начав сразу с двух вместе, разнося их потом на две в отдельности.

Так и нам для формальной аксиоматики нужно спуститься с небес своих нынешних знаний, отвлечься от уже известного багажа, наполненного числами, и начинать рассуждать о натуральном ряде как перед детьми или способными к мышлению инопланетянами.

Понятно, что в математике уровень абстрагирования чрезвычайно высок, и она способна выхолостить любое понятие, включая единицу, настолько, насколько это требуется для построения слаженной и непротиворечивой теории (полнота ограничивается теоремой Гёделя). И все же...

Другой важный момент. Двойка – единственное простое четное число, которое к тому же обладает любопытным уникальным свойством: $2 + 2 = 2 \cdot 2 = 2^2$.

Возможно, потребуется изменение концептуального положения о сравнении единицы с таким понятием как целое. На наш взгляд, данный догмат тоже нуждается в основательном переосмыслении.

Неделимость единицы – это слабый аргумент. Делится единица и весьма спокойно на две половинки, уводя в область вещественных чисел. Делится клетка на две себе подобные.

Делится или раздваивается практически всё.

А вот двойка, взятая в качестве монады натурального ряда, своими двумя половинками воспроизводит две единицы. Именно на такой стыковке и свойстве $2 = 1 \oplus 1$ можно сосредоточить усилия в аксиоматизации того, что мы сегодня называем натуральным рядом – основой из основ нашего абстрактного мышления в воспроизведении мироздания.

И тогда двойка заиграет своими лучами-свойствами совершенно в ином свете.

Сложности и перипетии в подобных аксиоматических построениях достаточно подробно изложены в работе [20].

Выводы.

Проведенный анализ квадратичной природы золотой пропорции позволяет сделать важные выводы фундаментального характера в эпистемологии её познании:

1. Золотая пропорция подобно солнечному зайчику отражает сущностные признаки квадратного уравнения.

ЗП – "золотой самородок" квадратного уравнения.

Она потому и замечательна в своих математических свойствах, что ее глубинные корни исходят из квадратичных закономерностей, равно как для чисел π или e.

2. У числа золотой пропорции нет ни одного свойства, которое не вытекало бы из квадратного уравнения общего вида.

3. Исключением из правила по п. 2 является единственный ортодоксальный образ – гиперболические функции Фибоначчи–Люка (ГФЛ), которые не имеют своего прототипа для квадратного уравнения общего вида.

На фоне всех других сопоставительных и расширительных аналогий, ГФЛ выглядят архаизмом без каких-либо теоретических и практических продолжений.

И хотя прообразы подобных функций есть, они не сводимы к ГФЛ, если свободный член уравнения $q > 1$. То есть ГФЛ начисто теряют свойства преемственности или саморазвития и в методологическом плане выпадают из стройного квадратичного учения о золотой пропорции.

4. "ЗП не терпит суеты". Число ЗП фундаментально также как π или e, и не нуждается в своем подтверждении в виде пресловутых догадок типа "пупковой концепции".

В мышлении и творчестве человека проявляется тенденция к поискам более простых оптимальных решений (гносеологический принцип Колмогорова), но не настолько, чтобы все многообразие мира сводить, порой искусственно, под один тип пропорционального соотношения, загоняя тем самым саму теорию ЗП в тупик.

5. Усилия ученых в области ЗП целесообразно сосредоточить на поиске истинных проявлений золотой пропорции, когда аргументировано и доказательно отводятся любые другие предположения об иных возможно-допустимых видах математической пропорции.

Автор приносит извинения всем исследователям, чьи работы не упомянуты по тексту или не приведены в перечне литературы, но могли бы занять достойное место в процессе освещения затронутой темы и её развития.

Литература.

1. *Ожегов С.И.* Словарь русского языка. / Под ред. Н.Ю. Шведовой. – 19-е изд., испр. – М.: Русский язык, 1987. – 750 с.

2. *Крейдлин Г.Е.* Жесты глаз и визуальное коммуникативное поведение // Труды по культурной антропологии. – М.: Вост. лит., 2002. – С. 236–251. – http://ec-dejavu.ru/g/Gesture.html#geste2.

3. *Василенко С.Л.* Триномиально-квадратичный код мироздания // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15995, 12.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161675.htm.

4. *Василенко С.Л.* Квадратичные закономерности // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15664, 21.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161579.htm.

5. *Василенко С.Л.* Аналитика "золотых" пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14795, 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.

6. *Tattersall J.J.* Elementary Number Theory in Nine Chapters: Second Edition. – New York: Cambridge University Press, 2005. – 442 p.

7. *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов: Пер. с англ. – М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 272 с. / Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 /.

8. *Василенко С.Л.* Гиперболические лабиринты на пути к гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15513, 06.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161539.htm.

9. *Митропольский Ю.А.* О роли математики в научно-техническом прогрессе // Докл. Республ. науч. конф. «Математика и научно-технический прогресс». – Киев, 1973.

10. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции: теория и приложения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.

11. *Василенко С.Л.* Златые цепи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15557, 22.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161546.htm.

12. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 5-е изд. – М.: Наука, 1984. – 144 с.

13. *Начала Евклида*. Книги I-VI // Перевод с греческого и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

14. *Пресман А.А.* Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки // Квант. – 1972. – № 4. – С. 34–35.

15. *Бакунинский А.* Математика гармонии: позолоченные сечения // Электронный журнал по архитектуре и дизайну A3D. – Новосибирск, 23.04.2008. – http://www.a3d.ru/architecture/stat/219/.

16. *Арнольд В.И.* Математическая дуэль вокруг Бурбаки // Вестник РАН. – 2002. – Т. 72, № 3. – С. 245–250. – http://www.mccme.ru/edu/index.php?ikey=viarn_burbaki.

17. *Аксиомы Пеано* // Википедия. Дата обновления: 21.04.2010. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=23953970.

18. *Парадокс Банаха–Тарского* // Википедия. Дата обновления: 06.06.2010. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=25200586.

19. *Ященко И.В.* Парадоксы теории множеств. – М.: Серия "Б-ка «Математическое просвещение»", 2002. – Вып. 20. – 40 с.

20. *Успенский В.А.* Семь размышлений на темы философии математики // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.11127, 08.04.2004. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0202/007a/02020021.htm#t2.