

Центры масс однородных тел как аттракторы возвратных последовательностей (Фибоначчи, Трибоначчи ...)

*Дайте мне точку опоры, и я сдвину Землю!*¹
Архимед из Сиракуз

История в 2222 года. Представление о центре тяжести тел впервые использовал великий древнегреческий математик Архимед (ок. 287–212 до н.э.) [1]. На основании механических соображений он показал как можно вычислить площади некоторых плоских фигур. В «Послании к Эратосфену» он дал вначале нестрогое вычисление площади параболического сегмента, то есть части плоскости, ограниченной дугой параболы и её хордой. Затем в работе «Квадратура параболы» представил строгое решение этой задачи.

Впоследствии Архимед механическим путем вычислил объем шара, шарового сегмента и эллипсоида вращения, нашел также положение центра тяжести некоторых фигур, например, шарового сегмента.

Несмотря на то, что стержневым понятием всей статики Архимеда являлось понятие о центре тяжести, оно ни в одной дошедшей до нас работе четко не сформулировано. По всей вероятности это определение было сделано им в одном из ранних сочинений по механике, которое, к сожалению, нам неизвестно [2]. Составить себе представление об этом определении можно по сохранившемуся и восходящему к Архимеду фрагменту у греческого математика, астронома и географа Паппа Александрийского (ок. 320), из сочинений которого до нас дошли «Математические коллекции» (Collectiones), в которых дан замечательный и исчерпывающий комментарий к математическим трудам его предшественников.

В книге VIII, 5 говорится [1, с. 71]:

«Центром тяжести некоторого тела является некоторая расположенная внутри него точка, обладающая тем свойством, что если за нее мысленно подвесить тяжелое тело, то оно остается в покое и сохраняет первоначальное положение».

Из всех уцелевших произведений Архимеда видно, что подобное понятие центра тяжести ему вполне известно, и он им постоянно пользуется.

Если говорить вообще о творчестве Архимеда, то еще в древности о нем хорошо сказал Плутарх [3]²: *«Во всей геометрии нельзя найти более трудных и глубокомысленных задач, которые были бы решены так просто и ясно, как те, которыми занимался Архимед. ... Если читатель сам не находит доказательства, то при изучении архимедовых сочинений у него создается впечатление, что он смог бы без труда найти решение, – таким легким и быстрым путем Архимед приводит к тому, что он хотел доказать».*

После Архимеда представление о центре тяжести стало важнейшим не только в механике, но и в математике. Это позволило сравнительно просто и наглядно решить множество трудных геометрических задач.

Например, швейцарский геометр Поль Гюльден (по-немецки Пауль Гульдин, 1577–1643) в 1635–1641 гг. опубликовал обширный четырехтомный труд «Центробарика»³, посвященный изучению понятия о центре тяжести. В этом труде были сформулированы

¹ Выражение стало афоризмом. Существует и видоизменение этой замечательной крылатой фразы: *Дайте мне точку опоры, и я переверну весь мир!*

² Приведенная цитата дана в переводе И.Н.Веселовского.

³ *Paul Guldin. Centrobaryea.* – Wien: 1635, 1640 und 1641. – В основе названия этого труда лежит греческое слово *barys* тяжелый. Отсюда центры тяжести тел – барицентры.

теперь широко известные теоремы, позволяющие найти площади поверхностей и объемы тел вращения, когда известны центры тяжести линий или пластинок, образовавших при своем вращении эти поверхности и тела.

И еще пример.

Итальянский геометр Джованни Чева⁴ (1648–1734) доказал свою знаменитую теорему о пересечении в одной точке некоторых линий треугольника не только чисто геометрически, но и довольно изысканным методом с использованием понятия о центре тяжести.

В историческом плане наиболее интересным геометрическим исследованием была книга видного немецкого математика и астронома Августа Фердинанда Мёбиуса (1790–1868) «Барицентрическое исчисление»⁵ (1827). В этом оригинальном, богатом математическими идеями труде Мёбиус на основании понятия о центре тяжести построил целую геометрическую дисциплину, получившую впоследствии название «проективная геометрия».

Число замечательных результатов, в которых понятие о центре тяжести было краеугольным камнем, можно множить достаточно долго. Прошло два с лишним тысячелетия со времени пионерских работ Архимеда, но число замечательных геометрических задач, решаемых с помощью понятия центра тяжести, оказалось отнюдь не исчерпанным. Причем математиками уже давно подмечено, что многие задачи элементарной и высшей математики решаются с помощью этого понятия наиболее изящным способом.

Это со всей наглядностью было показано и в недавних работах [4, 5].

В них были рассмотрены плоские выпуклые твердотельные фигуры с осевой симметрией, из которых вырезались подобные им фигуры с коэффициентом подобия $k = (\sqrt{5} - 1)/2$ (золотое сечение) так, чтобы их края в одной точке совпадали.

Центр тяжести получающихся фигур оказывался лежащим на геометрическом контуре. Эти работы привлекли внимание исследователей не только неожиданными выводами, но, прежде всего, изяществом получаемого результата.

Однако время неумолимо бежит вперед.

И вполне закономерным нам представилось продолжить изучение этих особенностей, сделав обобщение результатов для похожих геометрических объектов в трехмерном и n -мерном евклидовом пространстве. В свое время подобным образом поступил Архимед при решении задачи о «квадратуре параболы» – он повторно вернулся к этой задаче, но уже на другом уровне, с полным логическим обоснованием всех деталей.

Возврат к работам [4, 5] показал, что выявленное свойство центра масс является проявлением общей закономерности, которая по-новому приоткрывает нам область физической интерпретации и реализуемости линейных возвратных (рекуррентных) последовательностей n -порядка с единичными коэффициентами и предельными аттракторами: золотым сечением, константой Трибоначчи (лат. *tri* три) и др.

Пожалуй, это одно из немногих теоретических представлений о приложении возвратных последовательностей (чисел) любого порядка к решению реальных физических задач. В том числе и едва ли не единственная наглядная реализация константы Трибоначчи в физике.

Но прежде, чем излагать новый материал вначале следует, пожалуй, вернуться к уже опубликованным результатам и рассмотреть некоторые из них вновь под несколько иным, уточняющим углом зрения.

⁴ Его учение о секущих, положившее начало новой синтетической геометрии, изложено в сочинении «О взаимно-пересекающихся прямых» (*De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio*, 1678).

⁵ *Möbius A.F. Der barycentrische Calcül: ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie.* – Leipzig, 1827.

Некоторые основные понятия. Для удобства читателей, чтобы им постоянно не обращаться к статье [5], повторим кратко основные определения и принятые в ней положения.

Центр тяжести (ЦТ) – точка приложения равнодействующей всех сил тяжести, действующих в однородном поле тяжести на твердое тело при любом его положении в пространстве. ЦТ однородного тела находится на оси симметрии или на пересечении осей симметрии. Если у твердого тела нет закрепленной оси вращения, для его равновесия необходимо и достаточно, чтобы сумма действующих на него сил равнялась нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов этих сил была равна нулю относительно любой оси.

В дальнейшем будем без оговорок опираться на доказываемую в теоретической механике теорему о единственности центра тяжести материальных тел.

Более общим понятием, чем ЦТ является понятие центра масс [6–9].

Центр масс (ЦМ) – точка твердого тела, движущаяся так же, как и материальная точка, на которую действует та же результирующая сила, что и на тело. Если линейные размеры тела малы по сравнению с радиусом Земли, то центр масс совпадает с центром тяжести. ЦМ не связан ни с каким силовым полем и имеет смысл для любой материальной системы.

В дальнейшем будем говорить о центре масс.

Рассматриваемые ниже фигуры и тела будем считать однородными, то есть их поверхностная и объемная плотность будут считаться постоянными. Более того, будем считать эти плотности равными единице. Это допущение не снижает общности, но упрощает выкладки, так как позволяет массу любой пластины или тела измерять соответственно площадью или объемом. В этом случае удобно пользоваться понятием *статического момента* площади, который определяется как произведение площади фигуры на расстояние её центра масс до какой-либо заданной оси.

Понятие о статическом моменте площади облегчает решение задач по определению координат ЦМ сложных фигур, так как имеет чисто геометрический характер.

Двумерная задача с полудиском. Помимо проанализированных тонких пластин различных форм [5], рассмотрим задачу расчета еще одной фигуры, которая вызвала некоторые разночтения в использовании полученных закономерностей и привела к уточнению смысла самой проблемы.

Фигура имеет вид однородного полудиска радиусом R , из которого вырезан полудиск радиусом $r < R$, касающийся края исходного полудиска в точке, лежащей на линии, соединяющей центры масс этих полудисков (рис. 1).

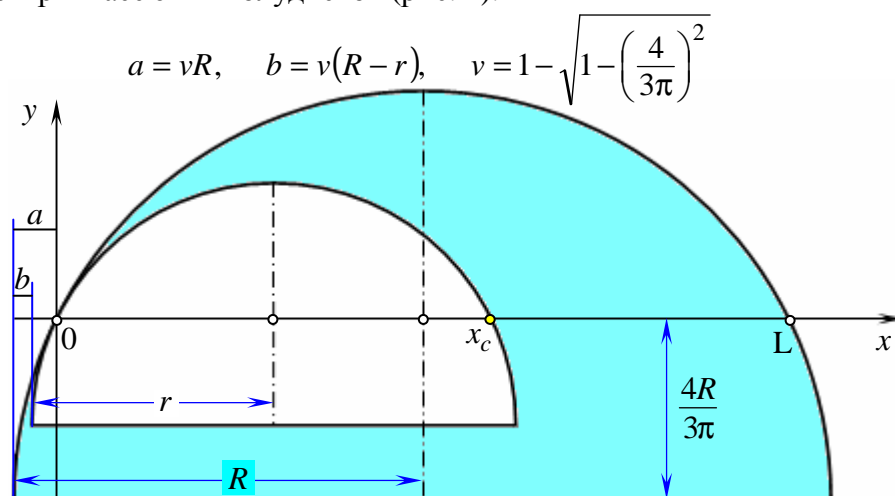


Рис. 1. Пример определения центра масс x_c в полудиске с самоподобным вырезом

Центр масс полудиска располагается на расстоянии $\frac{4}{3\pi}R$ от его ограничивающего диаметра [10]. В таком случае длина линии OL, параллельной диаметру и проходящей через ЦМ, которую назовем *хордой центра масс*, равна $2R\sqrt{1-\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2}$. Соответствующие формулы справедливы и для вырезаемого полудиска с заменой R на r .

При изучении рассматриваемых в настоящей работе объектов необходимо определенным образом фиксировать начало координат и ориентировку координатных осей.

Их выбор необходимо делать так, чтобы модель можно было удобно описывать. Для достижения единообразия и упрощения расчетов начало координат удобнее всего совмещать с точкой касания фигур, а ось абсцисс направлять через их центры масс. Очевидно, что ось ординат в этом случае будет перпендикулярна к направлению оси абсцисс.

В соответствии со сказанным поместим начало координат "O" в точку касания полудисков, а координатные оси направим, как показано на рис. 1.

При определении координат искомого ЦМ образованную фигуру с вырезом можно рассматривать как сплошной полудиск радиуса R , на который наложен полудиск радиуса r с отрицательной массой, равной по величине массе вырезанной части (метод отрицательных масс).

Равенство статических моментов относительно оси Oy, дает уравнение, определяющее искомое положение центра масс на оси Ox:

$$x_c = \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r} \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2}.$$

Пусть коэффициент подобия k полудисков равен числу золотого сечения $k = \phi = (\sqrt{5} - 1)/2$. Тогда с учетом отношения $r/R = \phi$ находим

$$x_c = 2r\sqrt{1 - (4/3\pi)^2}.$$

Таким образом, искомая точка центра масс $(x_c, 0)$ находится от точки касания полудисков на расстоянии, равном хорде центра масс вырезаемого полудиска, то есть на границе фигуры.

Дважды золотая задача. Мы так назвали задачу, в которой число золотого сечения проявляет себя дважды на двух иерархических уровнях.

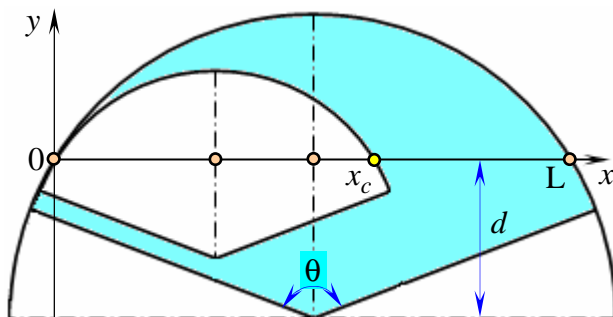


Рис. 2. Сектор с центральным золотым углом $\theta = 2\pi\Phi^{-2}$ и самоподобным вырезом

Сначала строится сектор с центральным золотым углом. Затем из него вырезается самоподобная фигура с коэффициентом подобия, равного также числу золотого сечения (рис. 2).

В геометрии *золотой угол*⁶ – это меньший из двух углов, образованных секциями окружности согласно золотому сечению.

То есть отношение длины большей дуги к длине меньшей такое же, как и отношение полной окружности к длине большей дуги.

⁶ Golden angle / From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_angle.

Следовательно, этот угол равен $\theta = \Phi^{-2} 360 = \phi^2 360 \approx 137,5^\circ$.

На рис. 2 представлен круговой сектор радиусом R (с подобным вырезом радиусом r), образованный центральным золотым углом.

ЦТ кругового сектора отстоит от диаметра на расстоянии⁷

$$d = \frac{4R}{3} \cdot \frac{\sin(\theta/2)}{\theta}.$$

Хорда центра масс равна

$$OL = 2R \sqrt{1 - \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{\sin(\theta/2)}{\theta} \right)^2}$$

Положение центра масс на оси Ox при $R = 1$:

$$x_c = 2\phi \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sin(\pi\phi^2)}{\pi\phi^2} \right)^2} \approx 1,0575.$$

Приведенные примеры определения центра масс однородной плоской фигуры с вырезанной подобной фигурой с коэффициентом подобия, равным золотому сечению, несколько отличаются от рассмотренных задач в работе [5].

Эти случаи более общие, и более наглядно показывают, что вырез необходимо делать так, чтобы точка касания фигур и их центры масс находились на одной прямой. Это важное уточнение весьма показательно и позволяет перейти к обобщению.

Обобщение двумерных задач. Исчерпать всевозможные другие планиметрические случаи можно путем уточнения общего определения U_k -фигуры и доказанной теоремы [5].

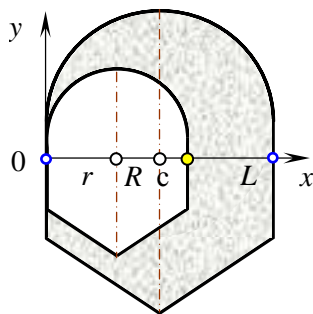


Рис. 3. Пример U_k -фигуры

Определение. U_k -фигура – плоская однородная фигура, получаемая путем выреза из выпуклой фигуры с осевой вертикальной симметрией подобной ей фигуры с коэффициентом подобия $k < 1$ так, что точка их внутреннего касания лежит на линии, соединяющей центры масс исходной и вырезаемой фигур (рис. 3).

Выпуклость исходной фигуры означает, что вырезаемая часть не выходит за ее контуры, и поэтому U_k -фигура имеет вид условной "подковы".

Теорема. Центр масс U_k -фигуры лежит на её геометрическом контуре на стороне выреза, если коэффициент подобия k численно равен золотому сечению.

Доказательство. Поместим начало координат в точку касания исходной и вырезаемой фигур, а ось Ox будем считать проходящей через их центры масс.

Пусть R и S – соответственно координата точки центра масс по оси Ox и площадь исходной фигуры. Параметрам R и S соответствуют аналогичные параметры выреза $(r, s) = (kR, k^2S)$, где $k < 1$ – коэффициент подобия.

В силу свойства центра масс и симметрии исходной фигуры ее вертикальная ось симметрии проходит через точку R .

⁷ Weisstein E.W. Circular Sector / From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – <http://mathworld.wolfram.com/CircularSector.html>.

Это означает, что линейный размер исходной фигуры вдоль оси Ox равен $2R$ и соответствующий линейный размер выреза равен $2r$ (см. рис. 3).

Определим положение центра масс U_k -фигуры методом баланса статических моментов:

$$x_c = \frac{RS - rs}{S - s} = \frac{RS - k^3 RS}{S - k^2 S} = \frac{1 - k^3}{1 - k^2} R = \frac{1 + k + k^2}{1 + k} R.$$

Пусть коэффициент подобия равен числу золотого сечения: $k = \phi = (\sqrt{5} - 1)/2$. Тогда

$$x_c = \frac{1 + \phi + \phi^2}{1 + \phi} R = 2\phi R = 2r.$$

Координата центра масс U_k -фигуры $x_c = 2r$, следовательно, её центр масс лежит на границе выреза (геометрическом контуре). Теорема доказана.

Можно сформулировать и обратную теорему. Ее обоснование в основном похоже на предыдущее доказательство.

Теорема. Если центр масс U_k -фигуры лежит на её геометрическом контуре на стороне выреза, то коэффициент подобия k численно равен золотому сечению.

Доказательство. Поместим начало координат в точку касания исходной и вырезаемой фигур, а ось Ox будем считать проходящей через их центры масс.

Пусть R и S – соответственно координата точки центра масс на оси Ox и площадь исходной фигуры. Параметрам R и S соответствуют аналогичные параметры выреза $(r, s) = (kR, k^2 S)$, где $k < 1$ – коэффициент подобия.

В силу свойства центра масс и симметрии исходной фигуры её вертикальная ось симметрии проходит через точку R . Это означает, что линейный размер исходной фигуры вдоль оси Ox равен $2R$ и соответствующий линейный размер выреза равен $2r$ (рис. 3).

Определим положение центра масс U_k -фигуры методом статических моментов:

$$x_c = \frac{RS - rs}{S - s} = \frac{1 + k + k^2}{1 + k} R.$$

Из соображений симметрии исходной и вырезаемой фигур, очевидно, что центр масс U_k -фигуры лежит на оси Ox .

Пусть центр масс U_k -фигуры расположен на её контуре.

В этом случае координатой точки центра масс будет $x_c = 2r$.

Следовательно,

$$x_c = \frac{1 + k + k^2}{1 + k} R = 2r = 2kR.$$

Отсюда следует, что $k^2 + k - 1 = 0$ и коэффициент подобия равен числу золотого сечения $k = \phi = (\sqrt{5} - 1)/2$. Теорема доказана.

В заключение этого раздела отметим, что величина, обратная числу ϕ и равная $\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2$ является аттрактором (константой) различных числовых последовательностей Фибоначчи $\Phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_{t+1}}{f_t}$, которые задаются рекуррентным соотношением $f_t = f_{t-1} + f_{t-2}$ с любыми начальными условиями (f_0, f_1) , не равными одновременно нулю.

Так, пара начальных чисел $(f_0, f_1) = (0, 1)$ приводит к числам Фибоначчи.

Задачи прикладной механики. Во многих областях прикладной механики приходится сталкиваться с задачами об устойчивости равновесия тел под действием силы тяжести.

Если неподвижная горизонтальная ось вращения твердого тела проходит через ЦМ, то тело будет находиться в состоянии *безразличного равновесия*, при условии, что никаких сил, кроме силы тяжести, на тело не действует. Это означает, что тело будет сохранять равновесие при любом повороте относительно этой оси.

Полученные выше результаты могут быть использованы при решении задач на поиски состояний безразличного равновесия тел.

Например, проведем через точку центра масс, находящуюся на границе вырезанного контура, горизонтальную ось вращения Oz перпендикулярно плоскости U_k -фигуры. В таком случае любое возможное отклонение не меняет высоты ЦМ фигуры, момент силы тяжести относительно оси остается равным нулю (сила тяжести проходит через ось вращения) и поэтому она всегда будет находиться в состоянии безразличного равновесия.

Обычно в качестве примера состояния безразличного равновесия тела, закрепленного на горизонтальной оси, проходящей через ЦМ, приводят диски, колеса, якоря динамо-машин и т.п. Пример с U_k -фигурой информационно богаче, насыщеннее для размышлений (и, возможно, для практических применений) и в литературе до сих пор не встречался.

Этот принцип можно использовать в реализации некоторых решений колебательного характера типа "китайского болванчика", маятниковых систем и др.

Выпуклость. Заметим, что условие строгой выпуклости нам было необходимо для наглядности доказательства. Данное условие можно ослабить.

В наших рассуждениях главное другое: чтобы вырезаемая часть не выходила за контуры базовой пластины (заготовки).

Естественно, что спектр возможных пластин значительно расширяется, создавая нескончаемую гамму фракталоподобных геометрических фигур (рис. 4).

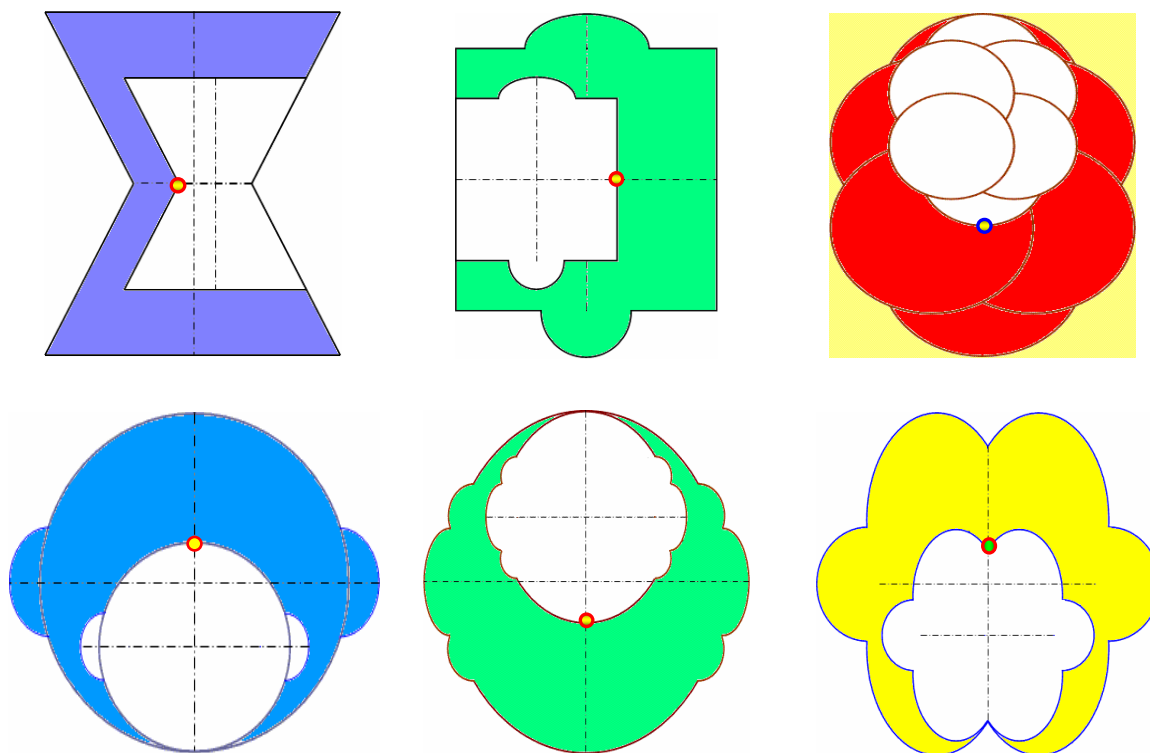


Рис. 4. Примеры построения плоских невыпуклых фигур с геометрическим центром на контуре и коэффициентом подобия, равным золотому сечению

Фигуры для наглядности расположены несколько иначе, но они все приводятся к исходной задаче простым поворотом вокруг центра масс.

Рассмотрим, например фигуры, образованные эпициклоидой – плоской кривой, образуемой фиксированной точкой окружности, катящейся по другой окружности (рис. 5).

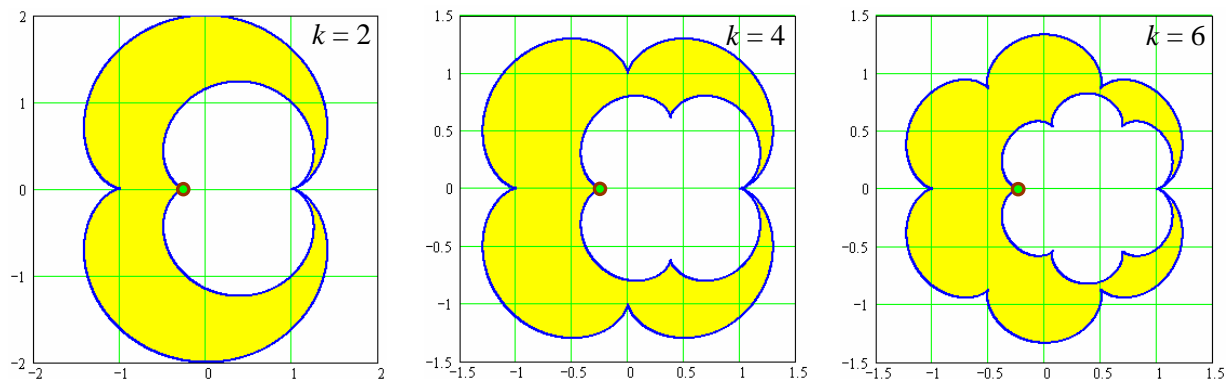


Рис. 5. "Золотоподобные" вырезы в фигурах, образованных эпициклоидой

Если центр неподвижной окружности с радиусом R находится в начале координат, а радиус катящейся по ней окружности равен r , то эпициклоида описывается параметрическими уравнениями относительно t :

$$x(t) = r[k' \cos(t) - \cos(k't)], \quad y(t) = r[k' \sin(t) - \sin(k't)], \quad k' = 1 + k = 1 + R/r.$$

Положив для определенности и удобного масштабирования $r = 1/k$, для четных значений k находим положение центра масс при $t = \pi$ в виде $\phi^2 - \phi = 1 - 2\phi \approx 0,236$.

Невыпуклым фигурам свойственны некоторые особенности (рис. 6).

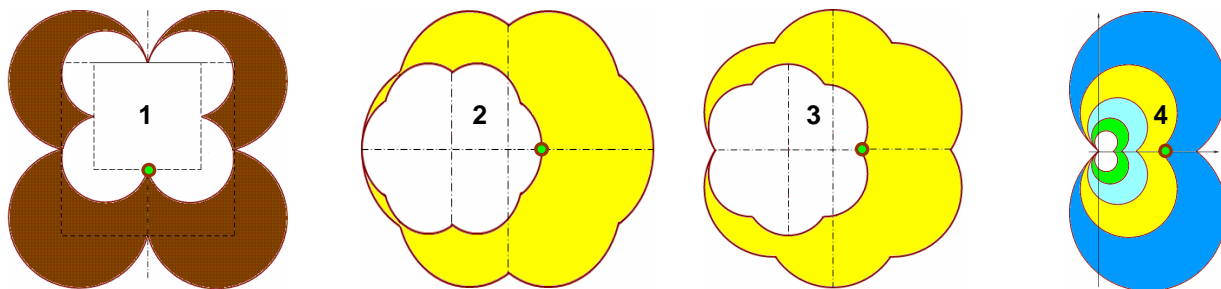


Рис. 6. "Золотоподобные" вырезы в фигурах:

1 – приемлемое сближение четырех кругов;

2, 3 – два способа вырезания в одной фигуре;

4 – фрактальная компоновка вырезов по образу русской матрешки

Так, для соприкасающихся четырех кругов вырезаемая часть выходит за пределы основной 4-круговой фигуры. Но уже при незначительном сближении этих кругов задача о "золотоподобном" вырезе получает полноценное решение (рис. 6, п.1).

Ряд фигур с двойной симметрией имеет по два приемлемых решения (рис. 6, п. 2–3).

Трехмерная задача "шар вырезан из шара". Вполне закономерно продолжить изучение отмеченных особенностей на похожих геометрических объектах в трехмерном евклидовом пространстве.

Оказывается, что выявленное свойство ЦМ является проявлением общей закономерности, которая по-новому приоткрывает нам область физической интерпретации и реализуемости линейных возвратных последовательностей третьего порядка с их предельным аттрактором в виде константы Трибоначчи.

Пусть материальное тело представляет собой однородный шар радиусом R , из которого сбоку вырезан шар радиусом $r < R$, касающийся края исходного шара (рис. 7).

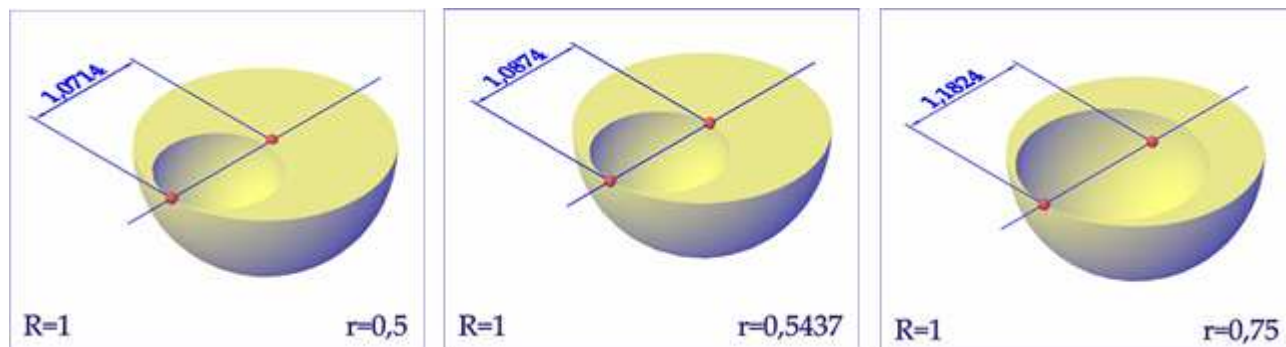


Рис. 7. Смещение центра масс:

разрез на среднем рисунке соответствует константе Трибоначчи $1/1,8392 = 0,5437$

Полученное тело симметрично относительно оси Ox , поэтому на ней находится и его центр масс, положение которого определяется координатой $(x_c, 0)$ с параметром

$$x_c = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot R - \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot r}{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{(R-r)(R+r)(R^2+r^2)}{(R-r)(R^2+Rr+r^2)} = \frac{R^3+R^2r+Rr^2+r^3}{R^2+Rr+r^2} = \frac{R^3}{R^2+Rr+r^2} + r.$$

Анализ формулы показывает, что с изменением радиуса $r = 0 \div R$ вырезаемого шара центр масс смещается в интервале $x_c = (1 \div 1,5)R$.

Положение центра масс, когда он находится на границе полученной фигуры, определяется из уравнения

$$x_c = 2r \quad \text{или} \quad r^3 + Rr^2 + R^2r - R^3 = 0.$$

Если принять $R = xr$, то последнее уравнение принимает вид $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.

Явное выражение для единственного действительного корня этого кубического уравнения можно получить по формуле Кардано:

$$T = \frac{1}{3} \left(c + \frac{4}{c} + 1 \right) = 1,8392867\dots, \quad c = \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}.$$

Здесь $T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$ – константа (аттрактор) числовой последовательности Трибоначчи

[11], задаваемой с помощью рекуррентного соотношения $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}$ с тремя начальными условиями (f_0, f_1, f_2) , $n \geq 3$.

Целочисленная последовательность чисел Трибоначчи при $\lambda = (f_0, f_1, f_2) = (0, 0, 1)$ приведена в энциклопедии Н. Слоуэна [12] под номером A000073:

0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, ...

Подобных последовательностей для разных начальных чисел (вещественных, комплексных и т.д.) может быть миллиарды, но отношения их бесконечно больших чисел всегда сходятся к константе T .

Числа Трибоначчи (с начальными условиями λ) могут быть определены и через триномиальные коэффициенты

$$R_{n,k} = \sum_{j=0}^n C_n^j C_j^{k-j} = \sum_{j=0}^n C_{k-j}^j C_n^{k-j} \quad \text{как} \quad f_{n+2} = \sum_{k=0}^n R_{n-k,k}.$$

Прямое суммирование биномиальных коэффициентов приводит к формуле [13]:

$$f_n = \sum_{m=0}^{\lceil n/2 \rceil} \sum_{k=0}^{\lceil n/3 \rceil} C_{n-m-2k}^{m+k} C_{m+k}^k,$$

где $\lceil \xi \rceil$ – целая часть от ξ ; C_m^k – биномиальные коэффициенты: число сочетаний из m по k .

Можно привести расчеты многих других весьма показательных примеров о центре масс в соответствии с константой Трибоначчи, как это было сделано с плоскими фигурами для золотого сечения. Все они будут приводить к полученному выше результату для шаров.

Ограничимся только несколькими иллюстрациями.

Например, в кубе (рис. 8) или додекаэдре (рис. 9) имеет место три способа фиксации ЦМ на контуре тела: от грани, вершины или угла многогранника.

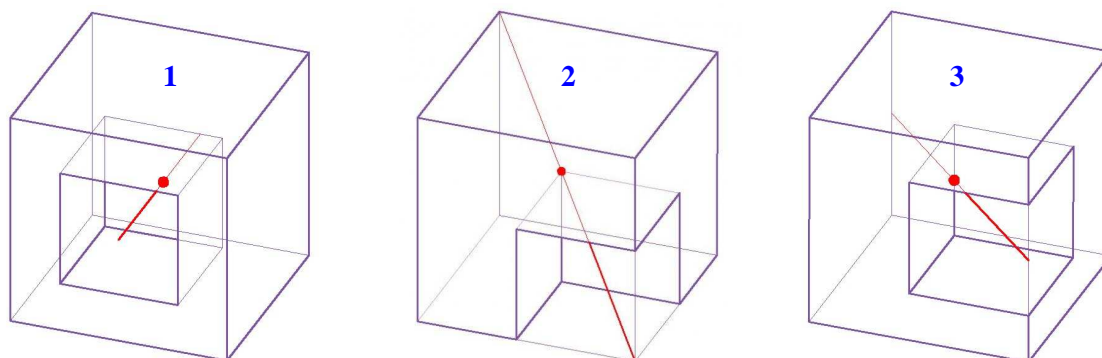


Рис. 8. Три вида выреза в кубе с центром масс на границе тела:
1 – от грани; 2 – от вершины; 3 – от ребра

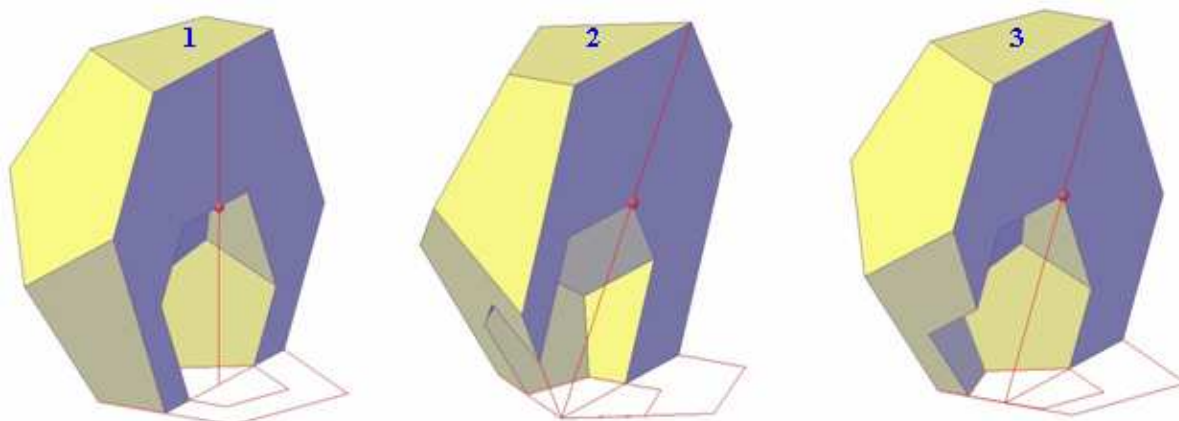


Рис. 9. Три вида выреза в додекаэдре с центром масс на границе тела:
1 – от грани; 2 – от вершины; 3 – от ребра

Разнообразие тел здесь также безгранично, как и плоских фигур.

Вот, например, как выглядят самоподобные вырезы для двух сдвоенных конусов согласно константе Трибоначчи $1/1,839 = 0,544$ (рис.10).

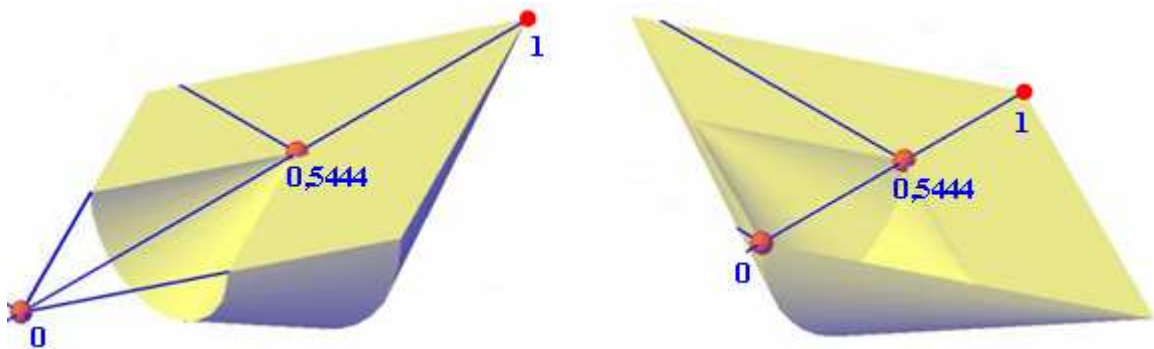


Рис. 10. Вырезы в сдвоенных конусах: от вершины и от боковой поверхности

В обычном конусе мы наблюдаем пропорции Трибоначчи как у основания тела, так и на оси расположения центров масс (рис. 11).

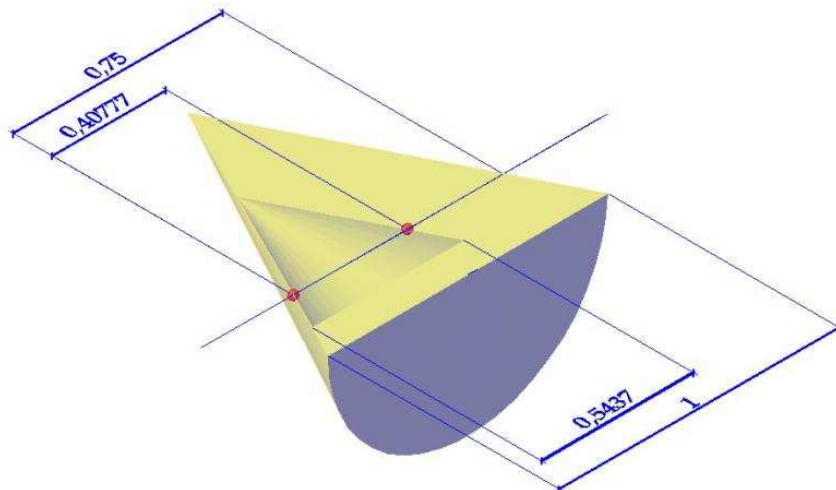


Рис. 11. Вырез в конусе с расположением центра масс на границе тела

Нечто подобное происходит в октаэдре (рис. 12) и т.д.

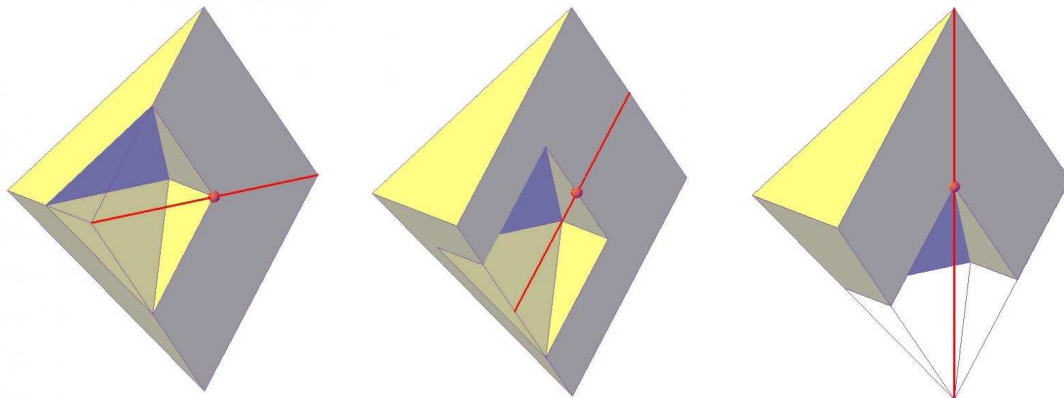


Рис. 12. Разные положения выреза в октаэдре с центром масс на границе тела

Заключительные комментарии. Мы сознательно избегали излишней формализации и чрезмерной строгости изложения материала. При желании этот пробел всегда можно восполнить, и он не будет менять сущности полученных результатов.

Для нас сейчас важнее привлечь внимание ученых к существованию довольно изящных итогов. А они таковы, что центры масс выпуклых однородных тел с осевой симметрией и самоподобными вырезами при определенных, весьма специфических условиях располагаются на границе (поверхности) этих тел.

Так, для евклидова пространства \mathbb{R}^2 с самоподобным вырезом такая ситуация наблюдается при величине подобия k численно равной величине золотого сечения $\phi = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Для евклидова пространства \mathbb{R}^3 коэффициент подобия k вырезаемого тела в таком случае определяется уравнением $k + k^{-3} = 2$ и равен константе Трибоначчи, то есть пределу отношения двух соседних элементов, – предыдущего к последующему – в последовательности Трибоначчи.

Выявленная закономерность сама по себе не является исключительным событием, хотя и весьма оригинальным, и что называется, долгие годы буквально витала в воздухе.

Довольно необычным, а скорее неожиданным и любопытным является взаимосвязь физической переменной (центра масс) с аттракторами рекуррентных числовых последовательностей, вычисляемых через сходные характеристические алгебраические уравнения.

Этот факт заслуживает особого внимания хотя бы потому, что до сих пор подобные числовые последовательности рассматривались в основном чисто абстрактно, без какой-либо увязки с физическими явлениями.

Применение этих последовательностей в модельных искусственных структурах типа помехоустойчивого кодирования не в счет, поскольку не связано с природными процессами.

Исследования в данном направлении будут продолжены для евклидова пространства \mathbb{R}^n . Коэффициент подобия k вырезаемого тела в этом случае, на наш взгляд, определяется уравнением $k + k^{-n} = 2$ и равен соответствующей константе, определяемой, как предел отношения двух соседних элементов, – предыдущего к последующему – в линейной возвратной последовательности n -го порядка.

Весьма заманчивым является также расширение полученных материалов на их применимость в сфере глобальных проявлений, в частности, на примере *упрощенной модели эволюции Вселенной*.

Но об этом в следующий раз.

Продолжение следует...

Литература:

1. *Архимед*. Сочинения. – М.: Госфизматлит, 1962. – 640 с.
2. *Льоцци М.* История физики: пер. с итал. Э.Л.Бурштейна. – М.: Мир, 1970. – 464 с.
3. *Плутарх*. Сравнительные жизнеописания: пер. С.П. Маркиша и С.И. Соболевского. В 3 т. Т.1. "Марцелл", XVII. – М.: Изд-во АН СССР, 1961.
4. *Байрашев К.А.* Золотое сечение в задачах о центре тяжести // *Фундаментальные исследования*. – 2006. – № 9. – С. 13–17.
5. *Василенко С.Л.* Центр масс плоских фигур в точках золотого сечения // *Академия Тринитаризма*. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15957, 20.06.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/1661-vs.pdf>.

6. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика: Учеб. для студентов мех.-мат. специальностей ун-тов: 2-е изд., испр. и доп. – М: Ред. журн. "Регуляр. и хаот. динамика", 1999. – 569 с.
7. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики: Учеб. для студентов вузов по направлениям "Механика" и "Математика": 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2000. – 719 с.
8. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. Учеб. для студентов вузов в области прикладных математики и физики / МФТИ: 3-е изд., перераб. – М.: Физматлит, 2008. – 304 с.
9. *Фейнмановские лекции по физике.* – Том 2, глава 19. Центр масс; момент инерции. – http://all-fizika.com/article/index.php?id_article=41.
10. *Weisstein E.W.* Circular Segment / From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/CircularSegment.html>.
11. *Generalizations of Fibonacci numbers* // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Generalizations_of_Fibonacci_numbers#Tribonacci_numbers.
12. *Sloane N.J.A.* The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – www.research.att.com/~njas/sequences.
13. *Кузьмин О.В.* Обобщения чисел Фибоначчи и Трибоначчи // Оптимизация, управление, интеллект. – 2000. – № 4. – С. 188–198.

© Василенко, Белянин, Радзюкевич, 2010

