С.Л. Василенко

Математические начала гармонии: гармонические треугольники

"...природа создать треугольники действительно
не может, но зато могут люди. Они и создают". –
Илья Панин. История "Динозавров", 2005.

Математические начала... В последнее время в литературе все чаще можно встретить использование терминологического оборота "математика гармонии".

По нашему мнению, наиболее точно, слаженно и полно отвечает понятию гармонии и правилам образования словесных русскоязычных конструкций со словами "математика" и "гармония" выражение композитора М. Марутаева [1] «математические начала гармонии».

Можно использовать и оборот «математические основы (основания) гармонии».

Во-первых, здесь нас ничто не разделяет на "математику гармонии" и логически напрашивающуюся, но противоположную ей "математику дисгармонии".

Во-вторых, "начала" – это основа (фундамент) для сколь угодно широкого дальнейшего развития. В-третьих, "начала" априори предполагают недосказанность и незавершенность, что полностью соответствуют идее (теореме) Геделя о неполноте любой теории (аксиоматики) в случае ее непротиворечивости. Как процесс, математизация гармонии никоим образом не абсолютизируется в виде завершенного продукта.

Даже наоборот. Мы изначально закладываем тезу о принципиальной невозможности буквального описания гармонии исключительно средствами математики, оставляя тем самым свободное поле (пространство) для души и чувственных форм восприятия гармонии, что соответствует ее культурным срезам (проекциям) различных народов и народностей.

И потом, какая замечательная перекличка веков! Весьма символично, что эстафета времени с его "Началами" Евклида – самой знаменитой после Библии и читабельной многотомной книги, в преемственном смысле здесь адекватно ассоциируется с математическими началами всеобщей гармонии. Здесь также и Ньютон с его наиболее известными «Математическими началами натуральной философии».

По нашему мнению, одно из немногих четких определений мы находим в работе [2]: «*Математические начала гармонии* – это знания о том, как, посредством мер геометрии и числа, Единое (континуум пространства-времени Вселенной) обретает континуумно-дискретное множество объектов и как эти множества сохраняют содержание и форму целостности континуума».

Формулировка в целом верная. Хотя мера (планка) обобщения здесь непомерно высока.

Поэтому легко представить себе мысли математиков, берущихся за абстрактную гармонизацию подобных знаний. – В принципе, не мудрствуя лукаво, сюда можно включить по определению всю математику, а не только геометрию и теорию чисел.

Там же [2] можно найти еще одно интересное высказывание: «*Математика гармонии* – это математика, изучающая и моделирующая гармонию бытия пространственно-временных форм Жизни и их количественные отношения, проявляющиеся в эволюции природы, общества и мышления».

Совсем не просто для нас найти принципиально-сущностные или предметно-идентификационные различия между этими пространными понятиями.

Создается такое впечатление, что второе даже уже первого (описывает только формы жизни), хотя могло бы быть наоборот. Но и с небольшими косметическими корректировками невольно закрадывается мысль о фактическом провозглашении идеи построить математическую модель-структуру "всего и вся", что весьма проблематично, но вполне приемлемо в философском толковании.

Оставим данный вопрос для последующего более подробного анализа и методологического осмысления. А пока сосредоточим внимание на математических аспектах гармонии в их сугубо геометрической трактовке, начав с исследования гармонических свойств такого известного, но во многом необычного феномена как треугольники.

Треугольники в природе. В окружающем нас мире треугольников не так уж много.

Но и то, что мы за них принимаем, возможно, таковым на самом деле не является.

Не исключено, что их вообще нет, – с далеко идущими концептуальными линиями в части отсутствия подобных жестко-связанных структур. Таким образом, в отличие от известной формулы «очевидное – невероятное», принятие факта существования в природе естественных треугольных форм – «не очевидное, но вероятное».

Конечно, существуют триадные формы типа молекулы воды. Но там присутствуют специфические конфигурации, далекие от понятия планиметрической (плоскостной) жесткости, характерной для геометрических фигур.

С треугольником больше сопоставляется геометрическое выражение тройки как гармонического результата взаимодействия единства и дуальности.

Ученый античности Никомах отмечает: «Тройка в сравнении со всеми остальными числами обладает исключительной красотой и благолепием. Прежде всего, она первая в действительности явила возможности единицы: нечетность, совершенство, пропорцию, единство, предел. В самом деле, 3 – первое действительно нечетное число, сообразно названию "более чем равное", то есть в другой своей части имеющее нечто большее, нежели равное... Исключительность тройки в том, что она является суммой двух начальных чисел и суммой их обоих» [3].

Нечто, похожее на треугольники можно иногда наблюдать в живом мире:

- подвижная голова богомолов имеет почти треугольную форму;
- треугольной конфигурации уши у куницы и соболя.

Так уж необходимы природе треугольники? И собственно зачем?

Видимо, жесткость конструкции ей не нужна. Сохранение структурной устойчивости осуществляется на другой основе: межмолекулярные связи, гравитация и т.д.

Треугольники и люди. В антропоцентрическом мире или в сфере человеческих отношений треугольников «хоть пруд пруди», – от жестких строительных конструкций, даже непонятно с чего скопированных, а скорее всего, гениально придуманных людьми, – до любовных треугольников с их гармоническими колебаниями и резонансами. Например, такое выдающееся изобретение как колесо можно было придумать, наблюдая за движением солнца, луны или отмерших и высохших растений "перекати-поле". Но как в сознании наших древних предков родились треугольники, воистину «тайна за семью печатями».

Слово "эволюция", на наш взгляд, здесь малоубедительно, хотя история этих фигур и восходит к первым шагам возникновения абстрактного мышления.

Можно предположить, что методом проб и ошибок было выявлено свойство жесткости треугольника, которое стало применяться в строительном искусстве для укрепления различных сооружений и составных деталей.

Треугольник – первая геометрическая фигура, встречающаяся в древних орнаментах.

Изображение треугольников и задачи на треугольники встречаются в папирусах и в старинных индийских книгах.

Треугольник – одна из первых плоских фигур. Отсюда и символ поверхности вообще.

По Платону «всякая прямолинейная поверхность состоит из треугольников» [4] – строительных блоков космического мироздания.

Но не все из них одинаково выразительны, и «нам приходится отдать предпочтение двум треугольникам... один из них равнобедренный, а другой таков, что в нем квадрат большей стороны в три раза больше квадрата меньшей» [4, с. 457]. Тимей в диалоге отмечает, что истинными элементами материального мира являются не земля, воздух, огонь и вода, но два вида прямоугольных треугольников: половина квадрата и половина равностороннего треугольника.

Как бы там ни было, но, несмотря на реальное отсутствие треугольников в природе, сегодня и дети знают, что это такое, и могут довольно легко продемонстрировать.

В географии хорошо известны названия Бермудского и золотого треугольников[1].

В северном полушарии неба известно созвездие "Треугольник" (лат – *Triangulum*), которое содержит 15 звезд, видимых невооруженным глазом.

Существует и музыкальный инструмент в виде металлического стержня, согнутого в форме треугольника и подвешенного за один из его углов.

У человека даже экономическая модель "спрос–предложение" является треугольником, поскольку непременно содержит третью составляющую – ресурс, без чего две остальные не могут существовать.

В такой абстрактной науке как математика выделен специальный раздел тригонометрии (от греч. *trigonon* – треугольник и *metro* – метрия), который своим рождением обязан исследованию зависимостей между сторонами и углами треугольника, а сегодня изучает алгебраические соотношения тригонометрических функций и их приложения в геометрии.

Древние геометры, а позже пифагорейцы и Евклид в своих «Началах» придавали исключительное значение изучению и описанию многообразных свойств различных по форме треугольников на плоскости. И здесь очень важно одно наблюдение [5].

Геометр-пифагореец – это теоретик. Рассматривая чертеж, он мысленно вычленяет его отдельные части, проводит дополнительные линии и подмечает такие соотношения, которые скрытое делают явным. К примеру, сколько не разглядывай различные треугольники, их внешний вид ничего не скажет о том, чему равна сумма углов каждого из них.

Но стоит провести прямую линию, проходящую через вершину треугольника параллельно его противоположной стороне, и теорема о равенстве суммы углов любого треугольника развернутому углу сразу же становится совершенно очевидной.

Так и понятие "гармонического треугольника" как ни странно, но впервые самостоятельное возникло вовсе не с геометрией, а благодаря теории чисел.

Поэтому, нарушив частично хронологию, с него и начнем наше повествование с последующей передачей эстафеты геометрии.

А уже в рамках ее мощного раздела в виде алгебраической геометрии попробуем сформулировать один общий подход к конструированию целого класса гармонических треугольников, органически связанных с теорией пропорции в ее гармоническом аспекте.

Числовые треугольники. История возникновения арифметических треугольников связана с треугольником Паскаля (1665 г.) – бесконечной числовой таблицей треугольной формы, в которой на вершине и по боковым сторонам стоят единицы, а всякое другое число равно сумме двух предшествующих и совпадает с биномиальными коэффициентами $p_{i,j} = C_i^j$ [6]. Строки симметричны относительно вертикальной оси.

Несмотря на свою простоту, треугольник таит в себе неисчерпаемый кладезь различных свойств чисел, и по праву считается одной из наиболее изящных схем во всей математике.

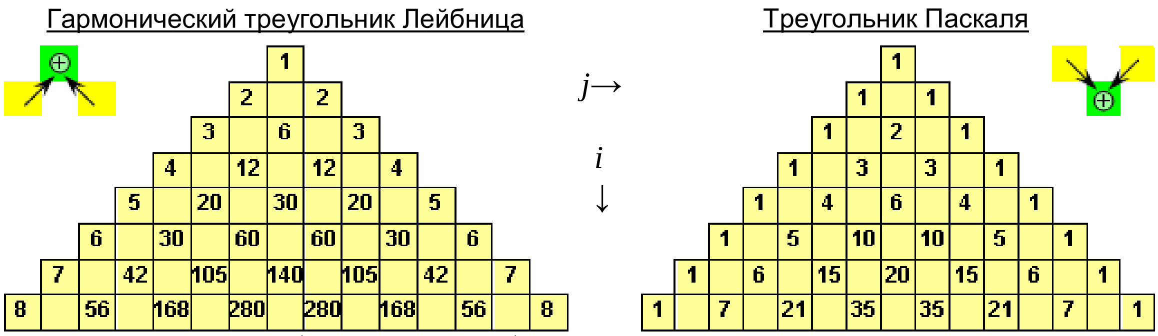
В математической литературе также известен *гармонический треугольник Лейбница*, который придуман им несколько позже (1673 г.) для суммирования обратных или дробных фигурных[2] чисел. Он сыграл исключительную роль в возникновении дифференциально-интегрального исчисления. Его свойства аналогичны (в смысле противоположности) свойствам треугольника Паскаля (рис. 1). Числа на границе треугольника выражаются обратными значениями последовательности натуральных чисел.

---

[1] ЗОЛОТОЙ ТРЕУГОЛЬНИК – географическая зона, расположенная в горах на стыке границ трех государств Юго-Восточной Азии: Таиланда, Мьянмы и Лаоса

[2] ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА – общее название чисел, связанных с той или иной геометрической фигурой. Это понятие исторически восходит к пифагорейцам. Различают следующие виды фигурных чисел:

– *линейные* (не разлагаются на сомножители 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13...);
– *плоские* (представимы в виде произведения двух сомножителей 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15,...);
– *телесные* (выражаются произведением трех сомножителей 8,12,18,20,24,27,28,...);
– *многоугольные* (треугольные, квадратные, пятиугольные и т.д. – определяются числом кружков, из которых можно выложить правильный многоугольник). – [http://ru.wikipedia.org]



$l_{i,j} = 1/z_{i,j}\,,\quad z_{i,j} = \left(z_{i+1,j-1}^{-1} + z_{i+1,j+1}^{-1}\right)^{-1}$ $\qquad p_{i,j} = p_{i-1,j-1} + p_{i-1,j+1}$

Рис. 1. Числовые треугольники Лейбница l и Паскаля p
(для удобства записи чисел Лейбница l представлены только их знаменатели z)

Каждое число внутри равно сумме двух чисел, стоящих под ним, то есть

$$l_{i,j} = l_{i+1,j-1} + l_{i+1,j+1}\,.$$

Легко показать, что числа треугольников Лейбница и Паскаля связаны формулами

$$z_{i,j} = (i+1)\cdot p_{i,j}\,, \qquad l_{i,j} = z_{i,j}^{-1}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

В треугольнике П. каждое число является суммой двух северных (верхних по диагоналям) соседей. В треугольнике Л. каждое число является суммой двух южных (нижних по диагоналям) соседей.

Граничные условия в треугольнике П. по боковым сторонам составляют единицы, в треугольнике Л. – они обратны последовательным натуральным числам [7, с. 115–118].

Заметим, что различные фигурные числа (многоугольные, пирамидальные, плоские и телесные) рассматривал еще древнегреческий философ и математик Никомах в своем трактате «Введение в арифметику» (книга 2, главы 6–20) – своеобразной пифагорейской числовой энциклопедии [8]. Он писал: «Треугольным называется такое число, которое, будучи разобранным на единицы, может быть выложено на плоскости в форме равностороннего треугольника. К примеру, таковы числа 3, 6, 10, 15, 21, 28 и т.д.; ведь они могут быть изображены схематически в виде равносторонних треугольников... Их стороны возрастают как последовательные числа» [8, кн. 2, гл. 8)].

Сегодня можно найти сотни самых различных числовых рекуррентных образований, отформатированных в виде треугольных массивов или таблиц (матриц). Для этого достаточно включить поисковый режим "table" в OEIS-энциклопедии [9].

Но вернемся к геометрии, в частности, ее алгебраической транскрипции.

Египетский треугольник и пифагоровы тройки. В науке давно и хорошо известен Египетский треугольник – прямоугольный треугольник с соотношением сторон 3:4:5.

Еще в античные времена отмечалась его особенность: теорема Пифагора дает целые квадраты, как катетов, так и гипотенузы, то есть 9 + 16 = 25.

Египетский треугольник является простейшим (и первым известным) из Героновых треугольников с целочисленными сторонами и площадями. Название треугольнику с таким отношением сторон дали еще эллины в VII–V веках до н. э. Наиболее вероятно, что именно попытка обобщения упомянутого отношения квадратов на любые прямоугольные треугольники привела позже Пифагора к доказательству его знаменитой теоремы.

Многие века египетский треугольник активно применялся для построения прямых углов землемерами и архитекторами, например, в виде шнура, разделенного отметками (узлами) на 12 = 3+4+5 частей, а также для создания иных схем пропорциональности.

Назовем их псевдогармоническими.

Они несут за собой целочисленную гармоничность, которая получила свое развитие через пифагоровы числа (тройки) – кортеж (последовательность конечного числа элементов) из трех целых чисел (x, y, z), удовлетворяющих соотношению Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$.

Пифагорова тройка называется примитивной, если (x, y, z) – взаимно простые числа.

Нетрудно видеть, что числа x и y имеют разную четность. Тогда примитивная тройка однозначно представляется в виде $(m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 + n^2)$ для натуральных взаимно простых чисел $m > n$ разной четности [10].

Говоря о Пифагоровых тройках, нельзя не упомянуть известное соотношение $a_5^2 = a_{10}^2 + 1$ между длинами сторон правильных 5-угольника и 10-угольника, вписанных в единичную окружность $R = 1$, которое можно найти во многих книгах по геометрии, например [11, с. 149],

$$a_5 = 2R\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1+\phi^2} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

$$a_{10} = 2R\sin\frac{\pi}{10} = \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

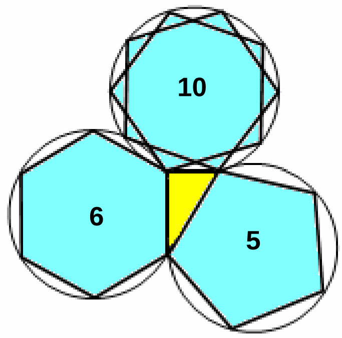


Рис. 2. Иллюстрация отношения сторон правильных многоугольников

Учитывая, что длина 6-угольника $a_6 = 1$, мы приходим еще к одной своеобразной целочисленной (по количеству вершин) модификации Пифагоровой тройки:

прямоугольный треугольник, образованный сторонами a_j правильных фигур (5-угольника, 10-угольника и 6-угольника), вписанных в единичную окружность (рис. 2).

Формулировка данной закономерности восходит еще к Евклиду ("Начала", предложение 13.10): «Если в круг вписан равносторонний пятиугольник, то его сторона в квадратах равна стороне шестиугольника вместе со стороной десятиугольника, вписанных в тот же самый круг» [12, с. 115].

Алгебраическая геометрия в гармонии треугольника. Безусловно, что вышеописанное свойство правильных многоугольников напрямую соотносится с гармонией треугольника во взаимосвязи алгебраических и геометрических свойств. В целом же гармоничность плоских треугольников, как плоских фигур, ограниченных тремя отрезками попарно пересекающихся прямых линий, очевидна и проявляется во многих отношениях.

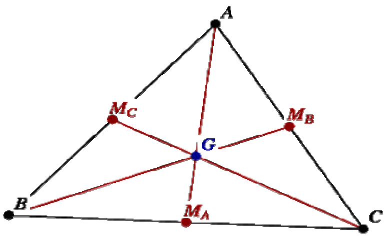
Просто диву даешься, насколько многообразен и удивителен мир гармонично-симметричных отношений в общесистемном случае для любого треугольника, по внешней форме весьма далекого от гармонии в смысле ее частного образа в виде красивости.

Но насколько все сразу преображается, когда мы начинаем сопоставлять отношения сторон, углов, высот и прочих элементов треугольника, которые образуют около 3600(!) характерных точек [13–16] со своей геометрией, симметрией и гармоничными соотношениями. И треугольник подобно фениксу из пепла воссоздается во всей своей красе, как геометрической, так и формульно-подобной, а часто даже симметричной форме [6].

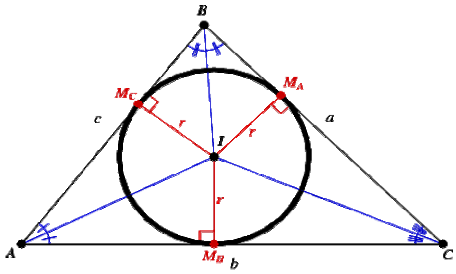
Данные центры относятся к замечательным точкам треугольника, местоположение которых не зависит от того, в каком порядке берутся его стороны и вершины.

В определенном смысле эти точки (центры) сродни центрам квадратов и кругов.

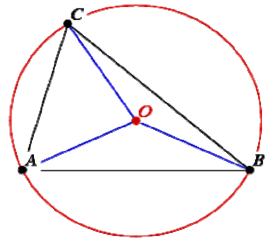
Некоторые из них, например центры медиан, биссектрис, высот, серединных перпендикуляров или описанной окружности (рис. 3) получаются простыми построениями и были знакомы еще древним грекам.



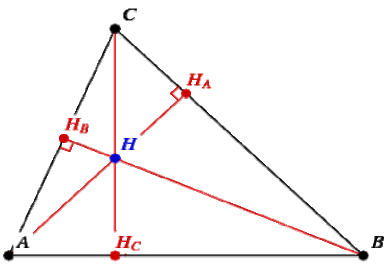
G(M) – • медиан, Ц.тяжести, Centroid



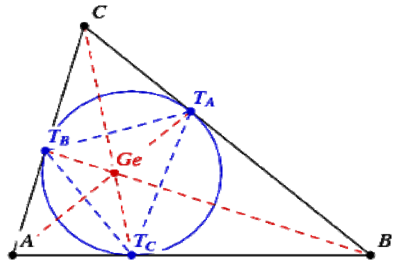
I – • биссектрис, Ц.вписанной окружности, Incenter



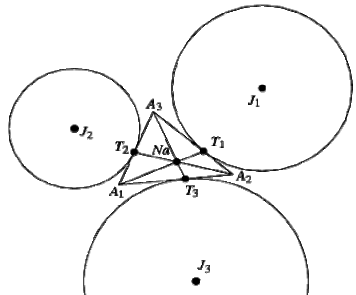
O – • серединных перпендикуляров, Ц.описанной окружности, Circumcenter



H – • высот, ортоцентр, Orthocenter



Ge – • Жергонна /вершины–точки касания/ Gergonne point



Na – • Нагеля /вершины–точки касания/ Nagel point

Рис. 3. Некоторые характерные точки (•) плоских треугольников

Так, Архимед доказал, что точка пересечения медиан является центром тяжести (барицентром) треугольника. А расстояние d между центрами вписанной и описанной окружностей и соответствующие радиусы r, R гармонизированы красивой 3×2 (три по два) формулой Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Наибольший вклад в развитие геометрии треугольника внесли математики XIX–XX веков Лемуан, Брокар, Тебо и другие.

На сегодня мы имеем целый кладезь уникальных свойств, которые можно по праву отнести к проявлению уникальной алгебраически-геометрической симметрии.

1. Возьмем, например, *теорему синусов*: стороны (a, b, c) произвольного треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов (α, χ, γ):

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R – радиус описанной окружности треугольника.

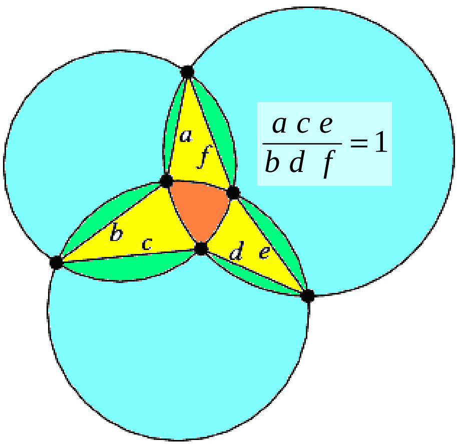


Рис. 4. Демонстрация единичного тождества Хонсбергера (1995)

Разве это не гармония? – Когда одинаковое соотношение трех пар метрических и угловых величин дополняется вращательным движением в виде описанной окружности.

Только вдумайтесь в это и сравните еще раз с изящной симметричной формулой синусов.

2. А *теорема косинусов* (обобщение теоремы Пифагора): квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2dc\cos\alpha .$$

Здесь воочию видим гармоническое соединение линейных, квадратичных и угловых характеристик любого треугольника.

3. Замечательные гармонические свойства демонстрируются при сравнении сторон трех

треугольников, образующихся при взаимном пересечении трех окружностей (рис. 4), в виде единичного тождества Хонсбергера.

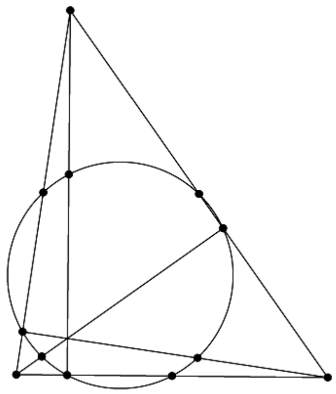


Рис. 5. Окружность Эйлера–Фейербаха

4. В геометрии треугольника известна *окружность девяти точек* (окружность Эйлера–Фейербаха), которая получила такое название из-за следующей теоремы:

основания трех высот произвольного треугольника, *середины трех его сторон* и *середины трех отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром* (точкой пересечения высот треугольника или их продолжений), *лежат все на одной окружности* (рис. 5).

*Теорема Фейербаха***.** Окружность Эйлера (девяти точек произвольного треугольника) касается вписанной и всех трех вневписанных окружностей этого треугольника [17, с. 13].

И подобных характерных точек в треугольниках тысячи [13, 14].

Например, отрезки, соединяющие каждую из вершин треугольника с точкой, в которой противоположная сторона касается соответствующей вневписанной окружности, пересекаются в одной точке Нагеля N (см. рис. 3). Она интересна тем, что отрезок NI, где I – центр вписанной окружности, проходит через центр тяжести G (точка пересечения медиан) треугольника и делится им в отношении $NG : GI = 2 : 1$.

Три отрезка, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная в него окружность касается соответственно противоположных вершинам сторон, пересекаются в точке Жергонна Ge.

Эти две, выбранные нами наугад конкретные точки, удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{b+c-a}{a} : \frac{a+c-b}{b} : \frac{a+b-c}{c} = \csc^2\frac{\alpha}{2} : \csc^2\frac{\beta}{2} : \csc^2\frac{\gamma}{2} \qquad \text{– точка Нагеля;}$$

$$\frac{bc}{b+c-a} : \frac{ac}{a+c-b} : \frac{ab}{a+b-c} = \sec^2\frac{\alpha}{2} : \sec^2\frac{\beta}{2} : \sec^2\frac{\gamma}{2} \qquad \text{– точка Жергонна,}$$

где (a, b, c) и (α, β, γ) – соответственно стороны и внутренние углы произвольного треугольника; csc, sec – тригонометрические функции "косеканс" и "секанс".

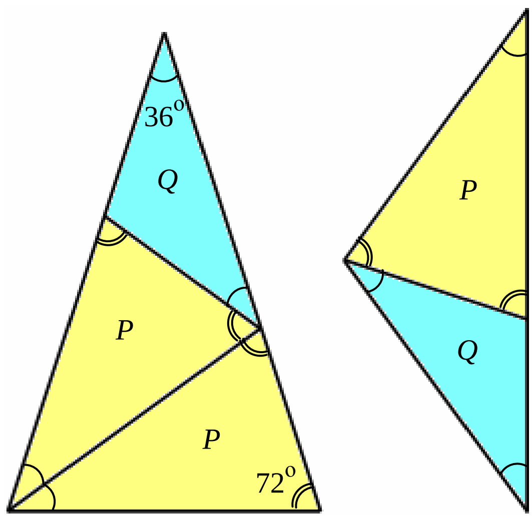
И подобная алгебраическая эквивалентность справедлива для других сотен и тысяч характерных треугольных центров.

Золотоносные треугольники. Во многих работах с пафосом, но часто неубедительно гармонию увязывают с таким замечательным математическим раритетом, как "золотое сечение" (ЗС). Мы не будем опровергать этот "заезженный" и слабо аргументированный миф хотя бы потому, что в мироздании наличествуют миллиарды иных проявлений пропорции, симметрии, эквивалентности и т.п. Это все равно, что в рассмотренном выше контексте искусственно обожествлять какую-либо одну из существующих тысяч особых точек треугольника, каждая из которых по-своему оригинальна и замечательна.

Так, А. Щетников отмечает [18]: «Принято считать, что ЗС применялось древними архитекторами как принцип образования форм при постройке классических храмов ... и якобы придает древним строениям возвышенный и законченный вид». Но «до нашего времени не дошло ни одного античного текста, в котором эта математическая конструкция связывалась бы с архитектурой и ваянием, хотя бы косвенно. И это очень странно. Ведь если бы ЗС служило для древних греков математическим формообразующим принципом, об этом говорилось бы в десятках книг по "философской математике" – подобно тому, как во многих дошедших до нас книгах обсуждаются математические принципы музыкальной гармонии, открытые пифагорейцами. В сохранившихся древнегреческих текстах ЗС рассматривается исключительно в связи с геометрической задачей построения правильного пятиугольника в планиметрии, а также икосаэдра и додекаэдра в стереометрии».

Тем не менее, применительно к треугольникам, ЗС заслуживает отдельного рассмотрения.

Прежде всего, само ЗС тесно связано с теоремой Пифагора. Более того, в работе [19] показано, что «золотое сечение является частным случаем теоремы Пифагора, для прямоугольного треугольника со сторонами равными 1 и 2 условных единиц».



P Q

Рис. 6. Инфляция–дефляция треугольников Робинсона.

Треугольники Робинсона – это два равнобедренных треугольника с углами $P(36^o, 72^o, 72^o)$, $Q(108^o, 36^o, 36^o)$ и длинами сторон соответственно (1, Ф, Ф) и (Ф, 1, 1), где $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

У Воробьева [20, с. 100] они называются *треугольниками золотого сечения* (ЗС).

Эти треугольники иногда называют также гармоническими, поскольку в их основе лежит гармоническая пропорция (синоним ЗС).

Инфляция (склеивание) и дефляция (разрезание) приводит к линейным размерам в Ф раз больше или меньше исходных фигур (рис. 6).

В виду особых гармоничных признаков они используются в задаче на замощение плоскости [21], известной как проблема паркета, а также при размещении композиций по диагонали через центр.

Треугольники Робинсона действительно замечательны в своих свойствах. Но вот в терминологическом аспекте наделения их золотоносностью не все очевидно, и в очередной раз сказывается безудержное подражание мифам.

Во всяком случае, воочию проявляется отсутствие преемственной связи при мягкой (непрерывной) трансформации от линейного отрезка с точкой ЗС к плоскому треугольнику путем бесконечно малого вынесения точки ЗС за пределы единичного отрезка.

В этом смысле рассмотренные выше две фигуры являются скорее исключением, чем общим правилом гармоничности треугольников.

При переходе от линии к плоскости и наоборот продолжение ЗС следует искать, прежде всего, из условия сохранения плавности такого перехода. – Когда точка ЗС на отрезке становится пределом аналогичной точки треугольника при его сворачивании в одну линию, например, если тупой угол $\to 180^o$.

Треугольники Робинсона этим свойством не обладают, а являются отдельным самостоятельным "золотоносным аттрактором". Если и называть их треугольниками ЗС (по Воробьеву), то обязательно с неким уточняющим определением, например, "треугольник ЗС второго рода", подразумевая, что "треугольник ЗС первого рода" – фигура, непосредственно взаимосвязанная с точкой ЗС на отрезке и из нее вытекающая в предельных переходах.

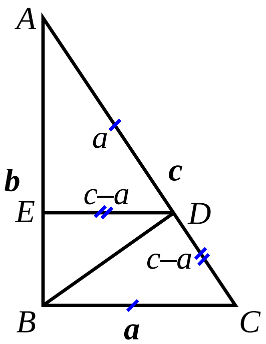


Рис. 7. "Золотой" треугольник Кеплера

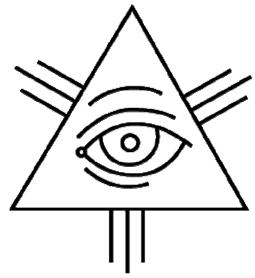
При этом у нас сохраняется преемственность между линией и плоскость. А то, что на плоскости могут появляться самостоятельные объекты со свойствами ЗС, вполне очевидно, поскольку мы вышли на иной уровень размерности, где уже присутствуют не только линейные отношения, но и площадные признаки пропорции.

К "золотоносному аттрактору", имеющему более выраженную преемственно-онтологическую связь с ЗС, можно отнести прямоугольный "золотой" треугольник, описанный в работе [22] на языке пропорций: гипотенуза c так относится к меньшему катету a, как этот катет относится к его дополнению $c-a$ до гипотенузы (рис 7).

Из подобия треугольников Δ ABC и Δ ABD вытекает еще одна альтернативная пропорция: больший катет (высота) b "золотого" треугольника является средним пропорциональным между его гипотенузой c и меньшим катетом a.

В литературе по пирамидам его называют Δ Кеплера или Δ Прайса.

"Зрячий" треугольник. Треугольник издавна служил объектом символики разных культур и верований. Так, общепринятым символом движения является треугольник, внутри которого изображается открытый глаз, называемый у масонов "лучезарная дельта".



Само изображение глаза в треугольнике заимствовано из христианства, где этот знак является символом "Всевидящего Ока".

Он встречается на иконах и культовых сооружениях.

Но еще до христиан был популярен у древних египтян (глаз Хора).

Многие воспринимают это как знак или даже зашифрованное послание тайного общества.

"Всевидящее Око" изображено на деньгах нескольких стран[3]: на оборотной стороне купюры в 1 доллар США (в виде изображения обратной стороны Большой печати США), на 500 украинских гривнах и др.

Возможно, здесь сокрыта вуалью чья-то язвительная шутка-прогноз курса валют.

Как знать!? Но существует и современная символика (см. приложение).

Гармонические треугольники. Не будет большой ошибкой утверждать, что сколь пространна область восприятия гармонии, столь широка сфера восприятия и принятия характеристик гармоничности треугольников.

Главное здесь не вдаваться в частности. А если и акцентировать на них внимание, то не выставлять в качестве обобщения или универсальности.

В определенной мере с этим связаны гармонические пучки линий [23].

Больше 5 лет тему гармоничных треугольников развивает П. Сергиенко. В 2009 г. по этой теме вышла его монография «Начала математики гармоничного мира», в которой он дает свое определение (с. 10):

гармоничный треугольник – такой треугольник, который может бесконечно делиться и умножаться на фрактальные себе треугольники, отношения (деления и умножения) сторон и площадей которых между собой можно записать числовыми константами Ф и ф.

Подобный треугольник может быть отнесен к типу гармоничных фигур, но выставлять его в виде общего определения, на наш взгляд, нельзя. – Весьма узко все сводить к ЗС.

В другой работе [24] область гармоничности еще больше сужается, ограничиваясь только прямоугольными треугольниками (?): «Гармоничный треугольник – это такой прямоугольный треугольник, у которого отношения сторон выражаются посредством всеобщих констант гармонии ф = 0,6180339… и Ф = 1,6180339… Гармоничный треугольник обладает свойствами отношений целостности, т.е. свойствами золотой пропорции... в гармоничном прямоугольном треугольнике гипотенуза относится к большему катету так, как больший катет относится к меньшему катету».

Понятно, что это вполне приемлемый, но все-таки частный случай ("золотой" треугольник Кеплера), не подходящий для универсального определения.

Более общий подход предложен в работе [17, с. 309] для плоских фигур, где *гармоническим многоугольником* называется вписанный в круг многоугольник, в плоскости которого есть точка K, расстояния h_k которой от сторон многоугольника a_k пропорциональны этим сторонам.

Применительно к геометрической фигуре треугольника это означает выбор произвольной точки Р, преобразование вершин АВС в диаметрально противоположные им точки А'В'С' на окружности с центром О, лежащем на прямой линии РО' (рис. 8), и построение так называемой точки Лемуана К (по красным стрелкам), для которой и выполняются пропорциональные соотношения.

---

3 http://ru.wikipedia.org/wiki/Масон.

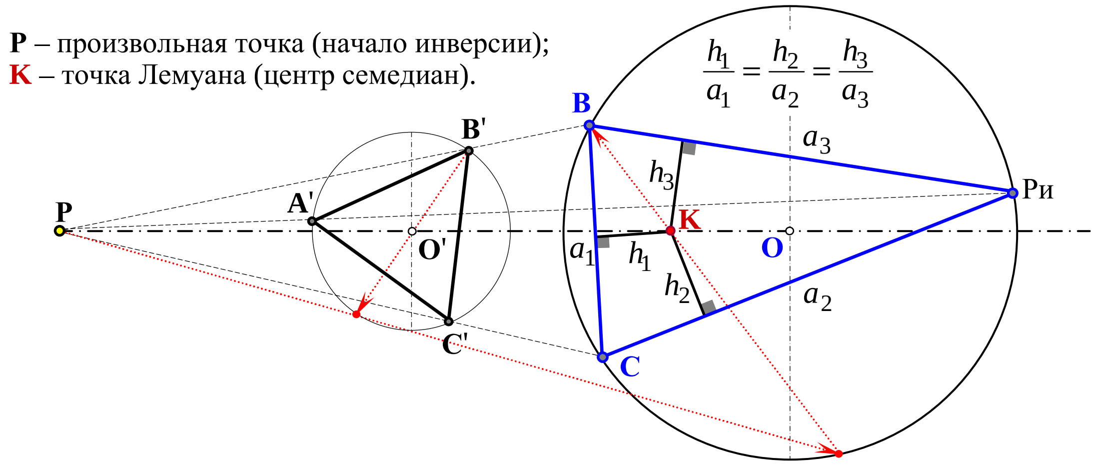


Рис. 8. Геометрическое построение гармонического треугольника ABC
методом инверсии исходного правильного треугольника A'B'C'

Относительно самих сторон Δ ABC при этом трудно сказать что-либо определенное, и необходимо выполнение дополнительных вычислительных процедур.

Гармонические треугольники общего вида. Рассматривая задачу золотого сечения и выполняя правила построения математической пропорции, вполне закономерно расширить их сферу влияния на образующие элементы треугольника.

Такими компонентами могут выступать его углы либо стороны.

Известно, что треугольник однозначно (с точностью до конгруэнтности) определяется по трем сторонам, двум сторонам и углу между ними либо стороне и двум прилежащим углам. Напомним, что в евклидовой геометрии две фигуры называются конгруэнтными (соразмерными, соответствующими, эквивалентными), если одна из них может быть переведена в другую сдвигом, вращением и зеркальным отображением.

Однако углы, даже если будут соотноситься между собой в определенной пропорции, не приведут к жесткой фиксации треугольников без метрической определенности хотя бы одной стороны.

Поэтому ограничимся исследованием взаимоотношений только метрических характеристик, выражаемых через длины сторон треугольника посредством пропорции.

Напомним, пропорция (лат. *proportio* соразмерность, выравненность частей) – равенство отношений числовых величин вида $A/B = C/D$ (A относится к B так же, как C относится к D).

Величины A и D называют *крайними* членами пропорции, B и C – *средними*.

О п р е д е л е н и е. Плоский треугольник называется гармоническим, если квадрат его стороны равен произведению двух других сторон.

На языке формул это означает:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{или} \quad b^2 = ac. \tag{2}$$

Данное определение полностью корреспондируется (сопоставимо) с понятием гармонического четырехугольника [25]: вписанный в окружность четырехугольник называется гармоническим, если произведения длин его противоположных сторон равны.

Только у нас имеет место одно произведение длин одной и той же стороны (ее квадрат), поскольку количество сторон не четыре, а три.

Зададим для определенности одну из сторон, равной отрезку единичной длины, например $c = 1$.

С целью сопоставления асимметрий приведена окружность единичного радиуса и центром в точке (3/2, 0).

Непосредственная зависимость координат y и x имеет вид (рис. 9):

$$y^2 = u + \sqrt{u^2 - (1-x)^4 + x^2}\,, \quad u = \frac{1}{2} - (1-x)^2\,. \tag{3}$$

В частности, приравнивая первую производную нулю $dy/dx = 0$, можно определить численным методом координаты точки, в которой высота гармонического треугольника максимальна: $x = 1{,}35677$ и $y = 1{,}33191$.

Сравнивая диапазоны изменения, можно сделать вывод, что число π в его проявлении через полный разворот угла треугольника соответствует величине

$$(\Phi+1)-(1-\phi) = \Phi + \Phi^{-1} = \sqrt{5}\,.$$

Исследователь древнеегипетской символики И.П.Шмелев пишет: "...Священный треугольник 3:4:5 был получен не эмпирически, а извлечен аналитически на базе канонического квадрата. И в обоих случаях (как степенной инвариант числа 5, ибо 5 = корень из 5^2) выполняет функцию гармонического параметра. Поэтому оба треугольника гармонически инвариантны. Вот почему Гор, формально отождествляемый с числом 5, есть символ гармонии. Миф об Изиде (тройка, т.е. структура), Озирисе (четверка, т.е. ритм) и их сыне Горе (пятерка, т.е. гармоническая связность) начинает приобретать научный статус с позиции числовых функций».

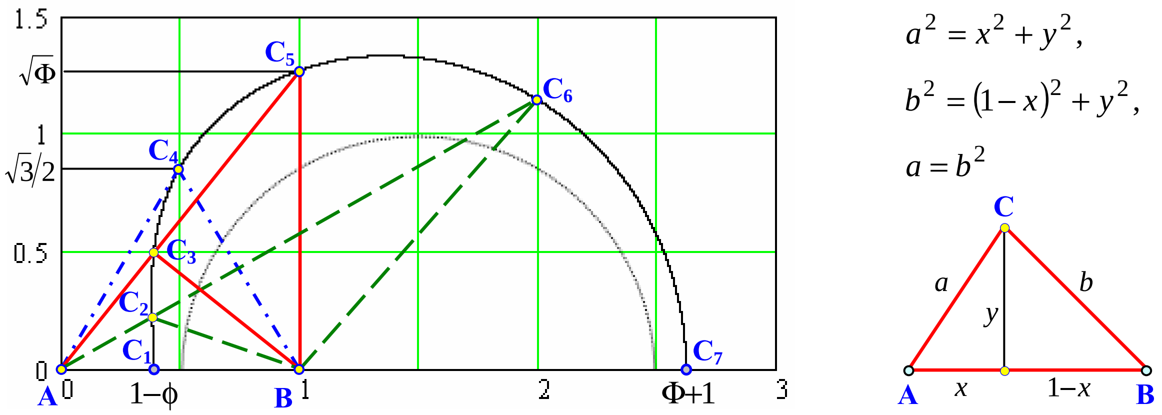


Рис. 9. Резольвента C_1...C_7 гармонических треугольников AC_iB

Непосредственно из диаграммы (см. рис. 9) следует утверждение:

в гармонических треугольниках угловая мера π адекватна линейной мере $\sqrt{5}$.

Кривую C_1...C_7 назовем *резольвентой гармонических треугольников*.

Отметим, что понятие резольвенты (лат. *resolvere* – решать) используется в математике в различных значениях. Все они объединяются основным свойством: решение резольвенты (уравнения) позволяет решить и саму задачу (уравнение или оператор).

Таким образом, задавая точку на резольвенте и соединяя ее с началом координат и точкой $B(1,0)$, получаем неограниченное множество гармонических треугольников.

Рассмотрим гармонические треугольники со сторонами a, b, c, которые соотносятся в пропорции $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$. Положим для определенности $c = 1$.

Условие образование треугольника: $a + b > c$ или $b^2 + b > 1$, то есть $b > \phi$.

Отрезок прямой АВ превращается в треугольник АСВ, то есть добавляется новое измерение и происходит метаморфоза.

Примечательно, что треугольник здесь общего вида. Только в двух частных случаях он становится равнобедренным AC_4B или прямоугольным AC_5B.

Да и почему, собственно говоря, следует считать, что "золотой" треугольник должен быть обязательно прямоугольным или равносторонним? – Это еще один миф, появившийся от слепого подражания и возвеличивания (абсолютизирования) полезных высказываний древних ученых-мыслителей.

Это даже не миф, а устоявшееся догма, вредящая развитию математизации гармонии в ее геометрической интерпретации.

Более того, подобное отношение не имеет непосредственной взаимосвязи с гармонической пропорцией на единичном отрезке, в отличие от резольвенты (см. рис. 9), где эта связь является органически обусловленной по определению.

1. При заданном значении $a \in \left(\Phi^{-2}, \Phi+1\right)$ третья сторона равна $b=\sqrt{a}$, и координаты точки C задаются соотношениями $x=\dfrac{a^2-a+1}{2}$, $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

Вершина C треугольников описывает кривую, которая напоминает лимакону[4] или улитку Паскаля, описываемую уравнением $\left(x^2+y^2-\alpha x\right)^2=\beta^2\left(x^2+y^2\right)$ [26, с. 74].

Алгебраические кривые, хотя и похожи (рис. 10), но все ж не совпадает, хотя бы потому, что в формуле лимаконы присутствуют нечетные степени зависимой переменной, в уравнении (3) – только четные степени.

Заметим, что наличие параметра β и сдвиг по оси x на величину $1{,}5-\alpha$ обеспечивают жесткую взаимную привязку (расположение) графиков по горизонтали (при $y=0$).

Но полной похожести кривых достичь не удается.

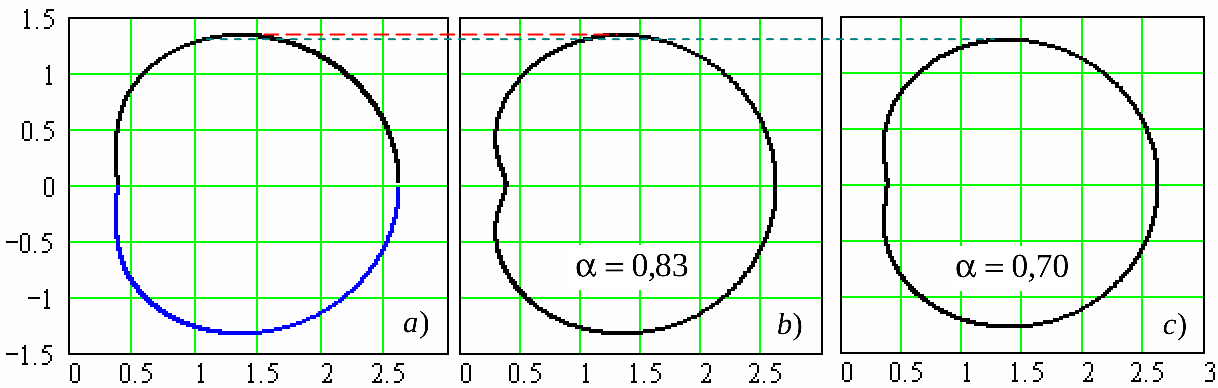


Рис. 10. Плоские алгебраические кривые:

a) резольвента гармонических треугольников;

b) – *c*) улитки Паскаля в параметрическом представлении ($\varphi = 0 \,..\, 2\pi$):

$$y=\sin\varphi\cdot\left(\alpha\cos\varphi+\beta\right),\quad x=\cos\varphi\cdot\left(\alpha\cos\varphi+\beta\right)+1{,}5-\alpha,\quad \beta=\frac{\Phi+\Phi^{-1}}{2}$$

2. При заданной координате x стороны треугольника равны $a=\dfrac{1+\sqrt{8x-1}}{2}$, $b=\sqrt{a}$, координата $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Откуда следует также ограничение $8x-3\ge 0$ или $x\ge\dfrac{3}{3+5}=\dfrac{3}{8}=\dfrac{F_3}{F_5}=0{,}375$, где F_j – числа Фибоначчи. Это, по-видимому, та нижняя граница, после которой совокупность приобретает черты структурированности и системности, но которые еще весьма далеки от гармонической пропорции.

[4] http://mathworld.wolfram.com/Limacon.html.

3. Довольно необычно, но некоторых "золотых" треугольников среди гармонических треугольников мы не находим. Вероятно потому, что треугольник – абстрактная фигура. Возможно и наоборот: проявление идеального ЗС – большая редкость, и каждое из таких проявлений – отдельное уникальное событие.

Так или иначе, но те же треугольники Робинса (см. рис. 6) относятся к самостоятельным "золотоносным аттракторам", не имеющим перманентной связи с числами ЗС на отрезке. А вот "золотой" Δ Кеплера (см. рис. 7) – есть не что иное как частный случай прямоугольного Δ ABC_5 на построенной резольвенте.

В целом на резольвенте можно выделить два характерных участка:

$$1.\ a \le b \le c = 1,\ \frac{c}{b} = \frac{b}{a},\ \alpha = 0 - 60^{\circ}; \qquad C_1C_4.$$

$$2.\ b \le a \le c = 1,\ \frac{c}{a} = \frac{a}{b},\ \alpha = 60 - 0^{\circ}; \qquad C_4C_7.$$

С другой стороны, после прохождения прямоугольного треугольника, можно сказать, что участок C_5C_7 соответствует режиму внешнего деления единичного отрезка AB.

Заметим, что приведенные построения применимы для обычной евклидовой плоскости.

В геометрии Лобачевского для нас, воспитанных на евклидовой геометрии, возникает много непривычного [27]. Например, сумма углов у каждого треугольника своя и притом всегда меньше 180 градусов. Если треугольники подобны, то они равны. Не бывает треугольников сколь угодно большой площади. Это значит, что его площадь не может быть больше некоторого числа, зависящего, разумеется, от выбора единицы площади.

Общее – частное.

Выполняя исследования произвольных форм треугольника, возникает закономерный вопрос об уровне проводимого обобщения задачи. Данная проблематика отнюдь не праздная, и здесь очень важно не ошибиться, в том числе терминологически.

Зачастую велики авторские желания резюмировать или анонсировать изложение словами: «Выполнено обобщение... Получены уникальные соотношения...» и т.п.

Что у нас? – Линия $C_1 – C_7$ на своих границах характеризуется числами ЗС.

Следуя противоречивой логике некоторых авторов, ее можно было бы назвать линией обобщения ЗС. Но это будет примерно похоже на ошибочное понятие обобщенных прямоугольных треугольников. Следуя дальше, все водоемы, уровень в которых измеряется в балтийской системе отсчета, станут обобщенными Балтийскими морями и т.п.

Подобным образом порождается логика обобщения сомнительного толка, в которой иерархические уровни соподчинения переворачиваются с ног на голову.

Изучая треугольники, человек из их огромного множества выделил некоторые частные случаи: прямоугольные (с углом в 90°), равнобедренные (с двумя равными сторонами), равносторонние (все стороны равны) и др.

Во всяком случае, треугольник общего вида в своих частных проявлениях (случаях) включает вышеназванные формы.

Но никто, никогда и нигде не называет произвольные треугольники – обобщенными прямоугольными или обобщенными равносторонними треугольниками.

Человек в процессе познания из общего выделяет частное и дает ему то или иное специфическое (особенное, специальное) название.

Например, молния и летящий самолет издают звук. Но этого мало, чтобы их объединять в одну классификацию по другим несовпадающим признакам.

Полученное нами множество гармонических треугольников объединено под общим началом резольвенты. Пусть таковым и остается.

Оно начинается с "предельного (вырожденного) треугольника" ABC в виде единичного отрезка с соотношением ЗС в точке С. Проходит ряд стадий, включая равнобедренный и прямоугольный треугольники. И по мере прохождения полного угла π снова раскладывается в линейный отрезок, но уже длиной $\sqrt{5}$.

Надо полагать, что фундаментальным в природе ЗС является именно феномен иррационального числа $\sqrt{5}$ с его ярко выраженной особой геометрией, проявляемой в соотношении осей прямоугольных координат $1:2$.

А уже далее при прочих равных условиях оно порождает пару своих уникальных производных – чисел ЗС: $(\sqrt{5}\mp 1)/2=(\phi,\Phi)$.

Так что, если в воздухе "запахло" корнем из пяти или масштабированием "один к двум", ищите гармоническую пропорцию.

Но об этом в следующий раз.

Литература.

1. *Марутаев М.А*. Гармония мироздания – общий закон // Сознание и физическая реальность. – 2005. – Т. 10. – № 6.
2. *Сергиенко П.Я*. Сакральные треугольники, окружность, многоугольники их построение и отношения между их параметрами // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.12746, 23.12.2005. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001b/00160236.htm.
3. *Никомах Геразский*. Теологумены арифметики. – Новосибирск: АНТ, 2007. – http://www.nsu.ru/classics/bibliotheca/Theologoumena.pdf.
4. *Платон*. Тимей. / Собр. соч. в 4-х т. Т 3. – М.: Мысль, 1994. – С. 432–498.
5. *Щетников А.И*. Возникновение теоретической математики и пифагорейская сотериология вспоминания. Пифагорейская гармония: исследования и тексты. Новосибирск: АНТ, 2005. – С. 3–24. – http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Anamnesis.pdf.
6. *Успенский В.А*. Треугольник Паскаля: 2-изд., доп. – М.: Наука, 1979. – 48 с.
7. *Пойа Д*. Математическое открытие: Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 452 с.
8. *Никомах Геразский*. Введение в арифметику. – Новосибирск: АНТ, 2006. – 56 с. – http://www.nsu.ru/classics/bibliotheca/Nicomachus_Arythm.pdf.
9. *Sloane N*. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – http://www.research.att.com/~njas/sequences/index.html.
10. *Pythagorean triple* // From Wikipedia, the free encyclopedia. – 9 June 2010. – http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple.
11. *Адлер А*. Теория геометрических построений: Пер. с нем. Г.М. Фихтенгольца. Изд. 3-е. – Л.: Учпедгиз, 1940. – 232 с. – http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/geometry/adler.htm.
12. *Начала Евклида*. Книги XI-XV / Перевод с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1950. – 332 с.
13. *Kimberling C*. Encyclopedia of Triangle Centers (ETC). – Last update: 04.03.2010. – http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia.
14. *Kimberling C*. Triangle Centers and Central Triangles // Congr. Numer. – 1998. – **129.** – P. 1–295.
15. *Triangle center* // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_center.
16. *Weisstein E.W*. Triangle Center // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/TriangleCenter.html.
17. *Ефремов Д*. Новая геометрия треугольника. – Одесса: Бланкоиздательство М. Шпенцера, 1902. – 350 с. – http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/ngt/ngt.htm.
18. *Щетников А.И*. Золотое сечение в античной математике // Математика. – 2006. – № 18 (608). – http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Golden_section.pdf.
19. *Бакунинский А*. Математика гармонии: позолоченные сечения. – 23.04.2008. – http://www.a3d.ru/architecture/stat/219/.
20. *Воробьев Н.Н*. Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.
21. *Корепин В.Е*. Узоры Пенроуза и квазикристаллы // Квант. – 1987. – № 6. – с. 2–6.
22. *Щетников А.И*. Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Математическое образование. – 2006. – № 3 (38). – С. 59–71. – http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Pyramis.pdf.

23. *Кузьмин Ю.Н.* Метод гармонических пучков // Демиург / Вестник Академии технического творчества. – 2000. – № 1. – http://att-vesti.narod.ru/DEMIURG9.HTM.

24. *Сергиенко П.Я.* Триалектика. Начала математики гармоничного мира (Русский проект) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15356, 21.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321124.htm.

25. *Понарин Я.П.* Гармонический четырехугольник // Квант. – 1991. – № 10. – с. 48–52.

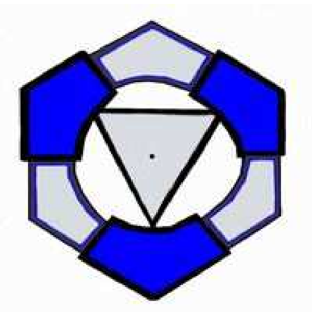
26. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.

27. *Успенский В.А.* Апология математики, или о математике как части духовной культуры // Новый Мир. – 2007. – № 11–12.

Приложение

Из треугольной символики

На наш взгляд представляет интерес не только древняя, но и современная символика, основанная на геометрической фигуре треугольника. Например, символика[5] "*fantom lab*".



Центральным элементом данного символа является точка, символизирующая собой всеобщее организующее начало. Точка расположена в равностороннем (гармоническом) треугольнике.

Вершина треугольника направлена вниз, символизируя собой стремление к углублению и детализации. Одной из сторон треугольник направлен вверх, указывая на стремление объединить всё досягаемое.

Вершины треугольника соединяют три синих сектора. Связи между секторами имеют равную длину, две смежные связи образуют угол в 60 градусов у каждого сектора.

Это символ гармоничной и неразрывной связи.

Центральный элемент точка вписан в круг, который одновременно является ограничивающей стороной секторов шестигранника. Круг является общим для всех секторов многоугольника, и символизирует собой постоянную и всеохватывающую связь. Круг и точка, символически являются одним и тем же, круг указывает на движение в сторону большего разнообразия форм, а точка – стремление к единству в содержании.

Внешний шестигранник разбит на шесть секторов, по три в двух группах.

В каждой группе сектора равны, имея разную внешнюю сторону, сектора подобны по форме, и символизируют собой мирное сосуществование различных сущностей на единой поверхности.

Многоугольник содержит два невидимых треугольника, которые имеют противоположные направления. Графически они не отображаются, но наличие их предполагается. Эти два треугольника являются равными, и символизирует равновесное состояние двух основных энергетических контуров - ментального и эмоционального. Обращаясь в любую вершину многоугольника можно получить эту пару виртуальных треугольников.

Общий смысл графического знака: все имеет единое начало и, стремясь к разнообразным формам, по содержанию стремится к своему источнику;

все едино, равновесно и гармонично.

Последнее, как нельзя подходит к выбранному предмету исследований, что во многом и определило демонстрацию такой образной символики.

---

[5] http://fantom-lab.narod.ru/fantom-lab/Simbol.htm.