С.Л. Василенко

Триномиально-квадратичный код мироздания

В целях природы обуздания,
В целях рассеять неуменья тьму
Берем картину мироздания
И тупо смотрим, что к чему…
А. и Б. Стругацкие

Будем исходить из гипотезы, что в основе процессов во Вселенной лежат свойства фундаментальных числовых констант – величин, значения которых не меняются.

С их помощью описываются, если не все, то подавляющее большинство происходящих явлений. В отличие от коэффициентов физической природы, математические константы определены независимо от каких бы то ни было физических измерений.

Принято считать, что их истинное происхождение до конца неясно, хотя в большинстве случаев они интерпретируются достаточно полно, обосновано и наглядно.

Эти постоянные не изолированы.

По ряду признаков они группируются, порой самым неожиданным способом, а их количество крайне невелико, равно как и фундаментальных законов.

Этот безумный, безумный ... квадратичный мир. Реальный мир по своей сущности квадратичный.

Даже если Природа – колоссальная лаборатория, а Вселенная – гигантская ЭВМ, то все равно в их основе лежит весьма ограниченное количество алгоритмов-закономерностей, один из которых зиждется на "квадратичной концепции" [1].

На это указывает целый ряд наблюдаемых процессов и известных открытий.

Двойственная закономерность – основополагающая структура-канва мироздания.

Квадратичные законы носят универсальный характер.

В частности, дуально-квадратичные схемы позволяют нейтрализовать, а когда нужно и взаимно обогатить, противоположности при их взаимодействии.

Двойственное отношение характеризуется взаимным дополнением пары взаимодействующих величин разной природы, между которыми существуют инвариантные преобразования.

Хорошо известны фундаментальные квадратичные законы: закон всемирного тяготения, закон Кулона, квадратичный эффект Штарка, квадратичный закон красного смещения [2] и другие.

В теории чисел известен *квадратичный закон взаимности* [3] о разрешимости квадратичного сравнения по модулю простого числа. Простейшим его проявлением является следующий факт, известный еще Ферма: простыми делителями чисел $x^2 + 1$ могут быть лишь число 2 и простые числа, принадлежащие арифметической прогрессии $4k + 1$.

Другими словами, сравнение $x^2 + 1 = (\mathrm{mod}\, p)$ по простому модулю $p > 2$ разрешимо в том и только в том случае, когда $p = 1(\mathrm{mod}\ 2^2)$.

К понятиям о квадратичном характере мироздания может быть условно отнесен и дуальный характер подавляющего большинства проявлений как взаимодействие двух полярностей во Вселенной: свет – тьма, добро – зло, "инь-ян" и т.д.

В общей физике есть примеры [4], когда для приведения измерений в соответствие с теорией как бы произвольно вводили коэффициент, равный 2 или 1/2.

Человеческая память рассчитана на хранение информации именно о $2\times2 = 2+2 = 2^2 = 4$ предметах одновременно (по типу кэш-памяти процессора компьютера).

То есть мозг человека способен удерживать устойчиво и синхронно четыре разных потока информации, работая сразу только на 4 направления-вектора.

Квадратичная метрика свойственна и наблюдаемому трехмерному пространству.

Разбросанные в пространстве и явно не лежащие в одной плоскости галактики, тем не менее, образуют двумерную структуру по принципу фрактального устройства, когда пространство становится фрактально-дырчатым [5].

На микроуровне «следствием трехмерности пространства является квадратичный закон распределения орбит в атоме и планетной системе, в соответствии с которым площадь сферы взаимодействия объекта со средой возрастает пропорционально квадрату ее радиуса» [6].

Ключ к пониманию трехмерного характера нашего пространства дает общедоступная по своей формулировке великая теорема Ферма[1]: для любого натурального числа $n > 2$ уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решения в целых числах [7, с. 86].

При $n = 2$ подобные комбинации целых чисел (a, b, c) возможны, и они образуют бесконечное множество пифагоровых троек [8]. То есть квадратичный закон допускает проявление дискретности в непрерывном мире и образование устойчивых составных объектов, таких как атом или планетная система

Несмотря на большую размерность, возможный мир с числом пространственных измерений, большим трех, как ни странно, весьма ограничен в возможностях проявления устойчивости, дискретности.

Действительному миру с достаточно разветвленной иерархической структурой, в принципе необходимо не более и не менее трех пространственных измерений [6].

В этом контексте именно квадратичность делает наш обозримо-ближайший космос максимально приближенным к реально наблюдаемому трехмерному пространству.

Совершенные числа. Вся математика, так или иначе, построена и развивается на основе ключевых представлений о числах. Среди них особое место занимают *совершенные числа* – натуральные числа, равные сумме всех своих собственных делителей (положительных делителей, отличных от самого числа).

Первое совершенное число – 6 (1+2+3=6), следующее – 28 (1+2+4+7+14=28).

По мере роста натурального ряда совершенные числа встречаются все реже (A000396): 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328 ...

Они имеют непосредственное отношение к рассматриваемой теме.

Еще Пифагор заметил интересную взаимосвязь между двоичностью и совершенством.

Двумя столетиями позже Евклид уточнил данное наблюдение и открыл, что совершенные числа всегда кратны двум числам, одно из которых равно степени числа 2, а другое на единицу меньше следующей степени числа 2 [7, с. 27–28]:

$$\begin{aligned} 6 &= 2^1\cdot(2^2 - 1) \\ 28 &= 2^2\cdot(2^3 - 1) \\ 496 &= 2^4\cdot(2^5 - 1) \\ 8128 &= 2^6\cdot(2^7 - 1) \end{aligned}$$

Алгоритм построения четных совершенных чисел описан в предложении 36 книги 9 Начал Евклида [9, с. 98–100].

Впоследствии Л. Эйлер доказал теорему, что все четные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом: четное число S является совершенным тогда и только тогда, когда $S = 2^{p-1}\left(2^p - 1\right)$, где $M_p = 2^p - 1$ простые числа Мерсенна [10].

Отсюда также следует, что совершенное число одновременно есть число треугольное –

---

[1] Ферма также установил, что 26 – единственное число, заключенное между квадратом (5^2) и кубом (3^3) других чисел. – Это своего рода пограничный числовой раздел.

количество кружков, которые могут быть расставлены в форме равностороннего треугольника со стороной n, равно $T_n = n(n+1)/2$ или числу сочетаний из $n+1$ по 2.

Таким образом, мы воочию видим основополагающую роль двойки в формировании совершенных чисел, что полностью обосновывает терминологию об их совершенности (идеальности), вполне обоснованно принятой еще в древние века на интуитивном уровне.

Еще одно наблюдение. Из соотношения $4^2 = 4(\mathrm{mod}\ 6)$ по индукции имеем $4^k = 4(\mathrm{mod}\ 6)$ или $2{\cdot}2^{2k} = 2(\mathrm{mod}\ 6)$. То есть простые числа Мерсенна $M = 2^p - 1$ для нечетных значений p, имеют форму $(6t + 1)$.

Таким образом, совершенные числа S, будучи треугольными, представимы в виде $(6t + 1)(3t + 1) = 9t(2t + 1) + 1$ (L.Beedassy, 2004). Откуда для всех S, кроме первого, следует, что они делятся на 9 с остатком 1, то есть $S = 1(\mathrm{mod}\ 9)$. Другими словами, теософская редукция (нумерологическая сумма) совершенных чисел всегда равна 1.

Одно из больших совершенных чисел содержит в своей десятичной записи 130 тыс. цифр и определяется по формуле $2^{216090}{\cdot}(2^{216091} - 1)$ [7, с. 257].

Простые числа-близнецы. Простые числа-близнецы – это пара простых чисел, отличающихся на 2. Все пары таких чисел, кроме (3, 5), имеют вид $6n \pm 1$.

Первые простые близнецы: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61)…

Наибольшей известной является пара простых чисел[2] $65516468355{\cdot}2^{333333} \pm 1$.

Предполагается, что подобных пар бесконечно много, но это не доказано.

По гипотезе Харди-Литтлвуда[3], количество $\pi_2(x)$ пар простых близнецов, не превосходящих x, асимптотически приближается к величине

$$\pi_2(x) \approx 2C_2 \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t},$$

где $C_2 = \prod_{p>2} \left[1 - (p-1)^{-2}\right] \approx 0{,}6601619...$ – константа простых близнецов.

Даже беглый взгляд на данные соотношения показывает, что в основе простых близнецов лежит двойка и квадратичные закономерности, даже в принятых обозначениях.

Фракталы. В 1979 г. Мандельброт установил, что простейшие нелинейные фракталы задаются квадратичными функциями, по сути, совершив кардинальный прорыв в дальнейшем развитии науки [11].

Он предложил простейший итерационный алгоритм $z_{n+1} = z_n^2 + c$, позволяющий реализовать на комплексной плоскости числовую последовательность, в которой каждый последующий член z_{n+1} равен квадрату предыдущего плюс некоторая константа c.

Предсказать путем анализа место каждой точки практически невозможно, но его можно вычислить. По простоте предпосылки, но богатству следствий и методологических смыслов алгоритм Мандельброта $z \leftarrow z^2 + c$ сравним с гениальной теоремой Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$ или уникальной формулой Эйнштейна $E = mc^2$ [11], в основе которых лежит все та же квадратичные зависимости.

Квадратичные формы. Гаусс разработал (1801) теорию представления чисел квадратичными формами – формами второй степени нескольких переменных.

Каждая квадратичная форма с действительными коэффициентами может быть приведена с помощью невырожденной линейной замены переменных к каноническому виду

---

[2] Caldwell Chris K. – http://primes.utm.edu/primes/page.php?id=89650.

[3] Twin prime / From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime.

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \ldots - x_{p+q}^2$$

Разность $p-q$ между числом положительных и отрицательных членов в этой записи называется *сигнатурой* квадратичной формы. Числа p и q сигнатуры не зависят от способов приведения формы к каноническому виду (закон инерции Сильвестра).

Известно и квадратичное представление натуральных чисел (приложение 2).

Триномиально-квадратичный код. Глобальный квадратичный код задается тройкой математических констант (π, e, Φ).

К ним можно условно присовокупить и пифагорову константу $\sqrt{2}$.

Эти самые знаменитые иррациональные[4] математические константы имеют явные представления [12] в форме бесконечных рядов и цепных дробей (табл. 1).

Таблица 1

Представление фундаментальных математико-квадратичных констант в форме бесконечных рядов и цепных дробей

Наименование	Бесконечный ряд	Цепная бесконечная дробь
Архимедова константа	$\pi = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ [5]	$\pi = 4\left(\frac{1}{1+}\,\frac{1^2}{2+}\,\frac{3^2}{2+}\,\frac{5^2}{2+}\,\frac{7^2}{2+}\ldots\right)$
Основание натурального логарифма	$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$; $\frac{1}{e} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$	$e = 2 + \frac{2}{2+}\,\frac{3}{3+}\,\frac{4}{4+}\,\frac{5}{5+}\,\frac{6}{6+}\ldots$
Золотое сечение	$\Phi = \frac{13}{8} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{n!(n+2)!\,4^{2n+3}}$	$\Phi = 1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\ldots$
Пифагорова константа	$\sqrt{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{n!(n-1)!\,2^{2n-1}}$	$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\ldots$

Заметим, что вопреки установившемуся штампу о "цепном единичном представлении" число Φ имеет любопытное *знакопеременное разложение через двойки* (!)

$$\Phi = 2 - \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2-}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2-}\,\frac{1}{2+}\ldots$$

и еще целый каскад разложений в виде ветвящейся вертикально-горизонтальной структуры цепных (непрерывных) дробей [13].

Что же объединяет вместе эти, казалось бы, далекие и разноплановые числа? – Сплачивает и связывает их в одно целое наличие квадратичных признаков, в частности принадлежность к кривым 2-го порядка (рис. 1). Разными способами, но каждая из кривых второго порядка приводит к фундаментальной математической константе.

Например, для линейной функции её приращение пропорционально приращению аргумента. Вещественная функция выражается графиком в виде прямой линии, откуда и название.

Наши кривые – нелинейные. Но с особыми нелинейными свойствами.

---

[4] Иррациональное число не может быть точно представлено в виде дроби или отношения целых чисел, а его десятичное представление никогда не заканчивается и не является периодическим.

[5] Ряд Грегори (1671).

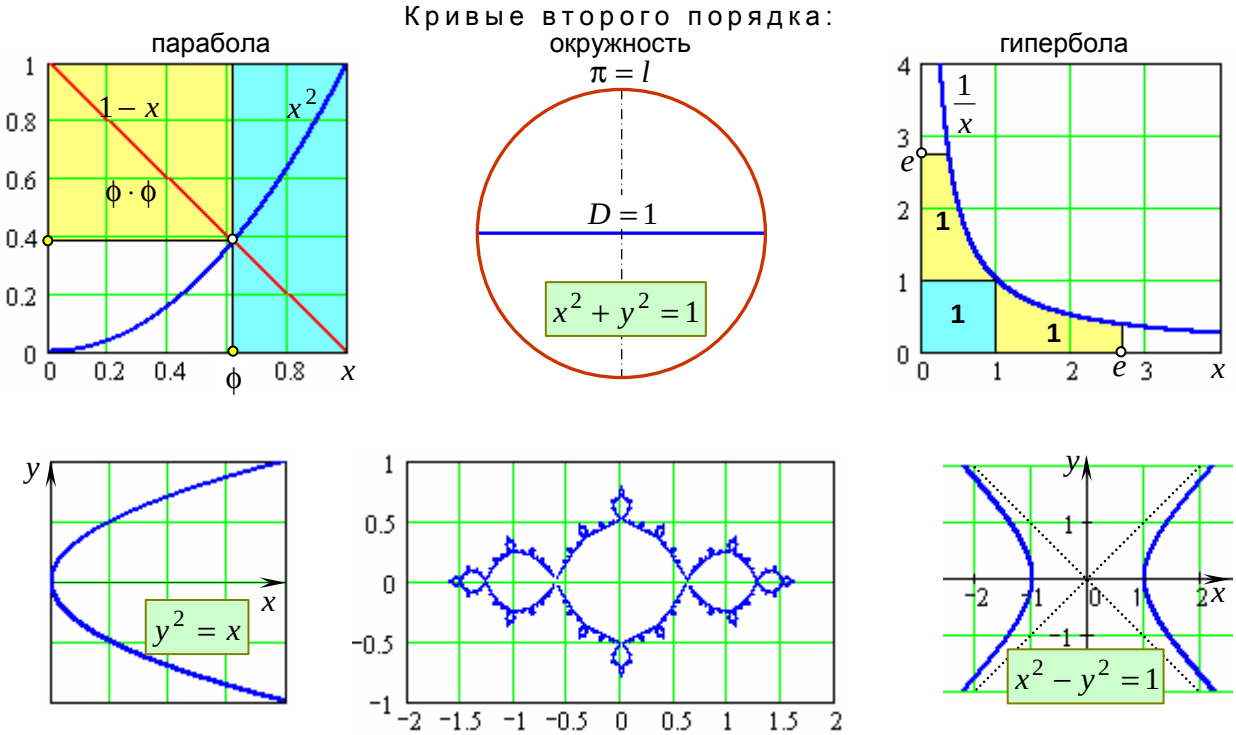


Рис. 1. Аналитико-геометрическая интерпретация "квадратичных корней" у фундаментальных математических констант мироздания (ф, π, е)

На рис. 1 (внизу) также представлено множество Мандельброта на комплексной плоскости для квадратичной функции $f(x) = x^2 + c$.

Чрезвычайно просто оно реализуется по рекурсии

$$x_{t+1} = \pm\sqrt{1 + x_t}\ ,$$

где $x_0 = 0$, а чередование знаков $\pm$ выбирается случайным образом с использование генератора случайных чисел.

Каноническое уравнение любой невырожденной кривой второго порядка при помощи подходящего преобразования начала координат может быть приведено к виду [14, с. 67]

$$y^2 = 2px - \left(1 - \varepsilon^2\right)x^2, \quad p > 0\,.$$

Кривая проходит через начало новой декартовой системы координат с осью симметрии О*x*. Данное уравнение выражает тот факт, что невырожденная кривая второго порядка является геометрическим местом точек, отношение расстояний которых $\varepsilon \geq 0$ (*эксцентриситет*) от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы) постоянно.

В зависимости от значения ε определяется: $\varepsilon = 0$ – окружность, $\varepsilon < 1$ – эллипс, $\varepsilon = 1$ – парабола, $\varepsilon > 1$ – гипербола.

Величина p называется фокальным параметром и равна половине длины хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной к фокальной оси (фокальная хорда).

Если фокус невырожденной кривой второго порядка принят за полюс, ось симметрии – за полярную ось, то уравнение этой кривой в полярных координатах ρ, φ будет иметь вид [14, с. 69] $\rho = p/(1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi)$.

Примечательно, что «кривая второго порядка вполне определяется пятью своими точками, если никакие четыре из них не лежат на одной прямой» [14, с. 69], что также усиливает гипотезу о глобальном проявлении дуально–пентагональных структур [15].

1) Парабола. *Ассоциативный порядок*. Число Фидия Ф = 1,618033989, ф = Φ^{-1}.

Формулу параболы принимает струя воды, бьющая из шланга.

По параболе летит мяч или камень. В механике парабола – это траектория движения материальной точки, брошенной в наклонном или горизонтальном направлении и падающей под действием силы притяжения земли [16].

Двигая точку соприкосновения отрезков влево (вправо), мы уменьшаем (увеличиваем) прямоугольник и увеличиваем (уменьшаем) квадрат. В точке золотого сечения (рис. 1, слева) они становятся равными (предложение 2.11 Евклида) [18].

Отношение частей в пропорции ЗС выражается квадратичной иррациональностью.

2) Гипербола. *Ассоциативное пространство*. Основание натурального логарифма e = 2,718281828…

Впервые к нему пришел шотландский математик Д. Непер (1618). Самого числа он не упоминал, зато выстроил на его основе свои таблицы логарифмов.

Область под графиком $y = 1/x$ на интервале $1 \le x \le e$ равна 1 (рис. 1).

Число e может быть определено как единственное число a, для которого выполняется

$$\int_1^a \frac{dt}{t} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}a^t = a^t .$$

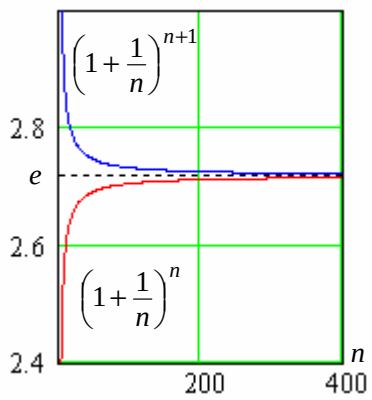


Рис. 2. Число e как предел последовательностей

Данное свойство играет важную роль в решении дифференциальных уравнений

Для него справедливо:

$$e = \arg\left\{\int_1^{x^x} \frac{du}{u} = x\right\} \quad \text{или} \quad \int_1^{e^e} \frac{du}{u} = e .$$

Число e является аттрактором монотонно возрастающей и монотонно убывающей числовых последовательностей [19] (рис. 2) и некоторых других:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} .$$

Будучи также основой функции комплексной переменной, число e отражает два основных закона сохранения: 1) энергии – через однородность времени; 2) импульса – через однородность пространства [20]. По экспоненте с действительным аргументом (без колебаний) идут многие процессы в физике и химии, биологии и экологии, экономике и т.д.

3) Окружность. *Ассоциативное время*. Постоянная[6] Архимеда π = 3,141592654…

Точное авторство открытия неизвестно, возможно, принадлежит древние индусам, грекам или китайцам. Впервые её обозначил греческой буквой π английский математик Уильям Джонс в начале 18 века.

Число π трансцендентно, то есть не может быть корнем какого-либо многочлена с целыми коэффициентами.

Существует невероятно большое количество разных представлений данной константы.

Отметим только некоторые из них.

Известно [21] произведение Валлиса $\pi = 2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^2}{(2n)^2-1}$.

И хотя для вычислительных целей данное соотношение практически малополезно (для нахождения ста знаков π не хватит и ста лет работы суперкомпьютера), оно наглядно

[6] Не путать с числом Архимеда – безразмерной величиной, используемой при нахождении движения жидкости, возникающего из-за неоднородностей её плотности.

показывает дуально-квадратичную природу числа π.

В этой связи весьма любопытна формула Ф.Виета (1540–1603), которая выражает величину π бесконечным числом радикалов [22, с. 133–135]

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\ldots}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdot\ldots.$$

По многим учебникам знакомы квадратичные разложения Эйлера

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots.=\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\ldots,$$

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\ldots,$$

а также формула Кларка [23, с. 751]

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l^2-k^2}{\left(l^2+k^2\right)^2}$$

С числом π связано множество замечательных неравенств. Одно наиболее известное из них (изопериметрическое) связывает площадь и периметр любой плоской фигуры $4\pi S\le p^2$ [22, с. 73], причем равенство достигается только для круга.

Основной триномиально-квадратичный код (Φ,π,e) можно дополнить еще одной, неявно выраженной значимой "гармоникой", связанной с фракталами

4) Фрактал. *Ассоциативный хаос*. Постоянная Фейгенбаума[7] δ = 4,66920016…

Применяется в теории хаоса и катастроф. Число открыл американский физик Митчел Фейгенбаум (1975).

Фрактал Мандельброта в теории хаоса играет примерно ту же роль, что и круг в обычной геометрии, а число δ фактически задает его форму.

Получается, что данная константа несколько похожа на число π, только для хаоса.

Она универсальна, характеризует бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода при переходе к детерминированному хаосу [24, 25] и получается как сходящееся число при решении бесконечного числа итераций рекуррентных уравнений

$$x_{n+1}=ax_n(1-x_n)\quad\text{или}\quad x_{n+1}=a\sin x_n.$$

Фейгенбаум заметил, что значения параметров, соответствующие каждому удвоению периода, сходятся как геометрическая прогрессия.

Физически константа описывает скорость перехода к беспорядку систем, испытывающих удвоение периода (приложение 2), и достаточно универсально характеризует хаотическое поведение многих нелинейных динамических систем [26], таких как турбулентность, рост популяций, колебания и др.

Описанный механизм получил широкое применение и известен *как получение хаоса с помощью удвоения периода* [27, с. 159–164].

Взаимосвязь фундаментальных констант. Число *e* иррационально и трансцендентно. Это первое число, которое не было выведено как трансцендентное специально, его трансцендентность была доказана Эрмитом (1873).

---

[7] Константа описана в последовательности A006890. – The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.

Квадратичная общность происхождения констант порождает самые неожиданные взаимосвязи, которые просто поражают своим математическим изяществом.

Одним из таких тождеств является изумительная по красоте формула Эйлера

$$e^{i\pi}+1=0,$$

которая объединяет сразу 5 констант, включая e, π, 0, 1 и $i=\sqrt{-1}$ – мнимую единицу.

Она опубликована в 1748 году, а ныне высечена над дверью математического отделения парижского Дворца Открытий [22, с. 55].

Другая формула связывает числа e и π через интеграл Пуассона–Гаусса

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\,.$$

Весьма элегантно разложение $e^{\pi}=1+\frac{\pi}{1!}+\frac{\pi^2}{2!}+\ldots+\frac{\pi^n}{n!}+\ldots$

Безусловный интерес представляет числовое тождество Рамануджана с бесконечной суммой и бесконечной цепной дробью [22, с. 63; 28]

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{2}{1+}\,\frac{3}{1+}\,\frac{4}{1+\ldots}=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}\,.$$

Это, возможно, самая красивая формула индийского математика, истинное произведение математического искусства.

Она неожиданно связывает бесконечный ряд и бесконечную цепную дробь.

Примечательно, что ни ряд, ни цепная дробь не выражаются через π, e, но их сумма непостижимым образом оказывается равной $\sqrt{\pi e/2}$!

Эта формула – единственная в своем роде – связывает бесконечный ряд и бесконечную цепную дробь [29].

Всегда изумляли и продолжают удивлять разного рода поиски аналитической связи между двумя уникальными математическим константами π и Φ, которая давно лежит буквально под ногами, выражается простой формулой [14, с. 47]

$$\Phi-1=\phi=2\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

и имеет четкое геометрическое толкование: радиус окружности, описанной вокруг правильного десятиугольника с единичной длиной стороны, равен ровно Φ.

Связь чисел π и Φ выражается и адекватной простой формулой $\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\Phi}{2}$.

Другое отношение между ними устанавливается через бесконечный ряд [30]

$$\frac{\pi}{5\sqrt{\Phi+2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{\Phi^{2n+1}(2n+1)!}\,.$$

Площадь поверхности золотого кубоида (прямоугольного параллелепипеда с ребрами Φ, 1, $\phi=\Phi^{-1}$) относится к площади описанной вокруг него сферы как π/Φ [22, с. 102].

Существует большое множество приближенных формул.

Часть из них можно найти в работе [31].

Так, неплохую оценку (с точностью 10^{-5}) золотого сечения дают формулы [32]:

$$\Phi\approx\sqrt{\frac{5}{6}\pi}\,,\qquad \phi\approx\frac{5e}{7\pi}\,.$$

Любопытна связь (с погрешностью 10^{-8}) и с другими константами: $\Phi \approx -\left[\alpha + \left(\frac{7}{8}\right)^K\right]$,

где $K = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^k} \approx 0{,}915965594..$ – константа Каталана[8] (Слоуэн, A006752),

$\alpha = -2{,}502907875..$ – понижающий параметр или вторая константа Фейгенбаума[9] (Слоуэн, A006891).

В работе [33] приводится простая формула, позволяющая весьма точно вычислить до 10 десятичных знаков постоянной структуры $\alpha^{-1} = 137 + \frac{\delta}{\alpha^{-1} - \delta\pi/2}$.

В работе [34] продемонстрировано соотношение, которое якобы выражает связь двух универсальных констант – золотого сечения и постоянной Фейгенбаума:

$$\delta = \frac{\sqrt{\Phi}}{\sqrt{\Phi} - 1} = \Phi^2 + \Phi^{3/2} = 1 + \Phi + \Phi^{3/2},$$

но точность его настолько мала, что говорить о связи здесь просто не приходится.

Да и вообще подобные приближенные зависимости скорее носят чисто "спортивный интерес" и свидетельствуют об изобретательности их авторов, чем каком-либо теоретико-прикладном использовании. Подобные числовые манипуляции больше похожи на цифровую эквилибристику, благо математика дает большой арсенал чисел и операций, чтобы одни константы приблизить к комбинации других. Так что смысл здесь больше походит на игровые упражнения [22, с. 181].

Совсем другое дело точные соотношения, пусть даже в виде сходящихся рядов.

За ними стоит связь на генетически-числовом уровне, поэтому доверие к ним чрезвычайное большое.

Так, чрезвычайно быстро сходящееся приближение числа π основано на одной из работ Рамануджана [35] по исследованию эллиптических интегралов и, в частности, его просто поразительной формуле (заметим, полученной без привлечения ЭВМ!):

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!\,(1103 + 26390n)}{(n!)^4 \cdot 396^{4n}}. \qquad (1)$$

Один из рекуррентных алгоритмов в этой связи сводится к рекурсии [21; 36, с. 337]:

$$y_0 = \sqrt{2} - 1, \qquad \alpha_0 = 6 - 4\sqrt{2},$$

$$y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_n^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_n^4}}, \qquad \alpha_{n+1} = (1 + y_{n+1})^4 \alpha_n - 2^{2n+3} y_{n+1}\left(1 + y_{n+1} + y_{n+1}^2\right).$$

Сходимость последовательности $1/\alpha_n$ к величине π фантастическая в буквальном смысле слова, с погрешностью, меньшей чем $16 \cdot 4^n \cdot e^{-2\pi \cdot 4^n}$. Уже первое приближение дает 9 знаков, второе – 40, третье – 170, четвертое – 700, десятое – около 3 млн, а пятнадцатое ($n = 15$) – более миллиарда правильных знаков в числе π.

Заметим, что в отличие от исходного ряда (1), его рекурсивное представление содержит

---

[8] *Marichev O, Sondow J, Weisstein E.* Catalan's Constant / From MathWorld. – a Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/CatalansConstant.html.

[9] *Weisstein E.* Feigenbaum Constant / From MathWorld. – a Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/FeigenbaumConstant.html.

в явном виде квадратичные признаки (через 2 и $2^2 = 4$), тем самым воссоздавая преемственную связь числа π с окружностью и порождающим уравнением второго порядка.

Квадратичная физика. Фундаментальные физические постоянные (размерные и безразмерные величины) характеризуют физические свойства окружающего мира в целом и появляются при его математическом описании с помощью теоретической физики.

Хорошо известны фундаментальные квадратичные закономерности, основанные на *законе обратных квадратов* [37]: значение некоторой физической величины в фиксированной точке пространства обратно пропорционально квадрату расстояния от источника поля, которое характеризует эта физическая величина.

Гравитационное взаимодействие описывается законом всемирного тяготения Ньютона (1687), согласно которому сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками массы m_1 и m_2, разделенными расстоянием r, пропорциональна обеим массам и обратно пропорциональна квадрату расстояния [38, с. 514–519] $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} = G\dfrac{m_1}{r}\dfrac{m_2}{r}$,

где $G \approx -6{,}673 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг·с²) – гравитационная постоянная; знак минус означает, что сила, действующая на тело, всегда направлена на тело, то есть гравитационное взаимодействие приводит к притяжению тел.

По закону Кулона (1785) сила взаимодействия двух точечных неподвижных заряженных тел в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей заряды, прямо пропорциональна произведению модулей зарядов q_1, q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними [39, с. 359–360] $F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2} = k\dfrac{q_1}{r}\dfrac{q_2}{r}$,

где k – коэффициент пропорциональности.

Интенсивность света (энергия, приходящаяся на единицу площади в единицу времени) или других линейных волн, исходящих от точечного источника обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника.

Проявление квадратичных свойств может быть интерпретировано как своеобразная "проверка" расстояния в поле (гравитационном, электрическом).

Даже если де-факто оно происходит не по прямой, а например – по геодезической линии в искривленном пространстве.

Постоянная тонкой структуры, характеризующая силу электромагнитного взаимодействия, может быть определена как квадрат отношения элементарного электрического заряда к планковскому заряду $\alpha = \left(e/q_p\right)^2$.

Выводы.

1. В основе мироздания лежит триномиально-квадратичный числовой код [π, *e*, Ф].

2. Числа [π, *e*, Ф] фундаментальны и имеют общее "квадратичное происхождение", которое порождают кривые второго порядка: окружность, гипербола и парабола.

3. Триномиально-квадратичный код дополняется квадратичными законами:

в математике и теории динамических систем: квадратичный закон взаимности, теорема Пифагора, великая теорема Ферма, гауссово представление чисел квадратичными формами, фрактал Мандельброта и др.

в физике: формула Эйнштейна, закон обратных квадратов (гравитация, взаимодействие заряженных тел, интенсивность света).

4. Числа π, *e* уже много раз и самым неожиданным способом показали свой универсально-глобальный характер. А вот с Ф пока незадача. Больше наличествуют слабо обоснованные предположения, чем фактаж. Известная геометрическая задача деления согласно золотому сечению (ЗС), конечно, важна, но этого мало, что, по сути, заводит

теорию в тупик. Поиск ЗС в искусстве или архитектуре вообще не понятен во всех смыслах, так как субъективен, невыразителен, непродуктивен и уводит проблематику в сторону.

Так что нужно возвращаться к истокам.

Необходимы точные связи с другими величинами.

В отличие от π или е, число Ф – нетрансцендентно, являясь корнем алгебраического уравнения $x^2 - x - 1 = 0$.

В связи с этим для Ф существует несколько геометрических представлений.

Последующие исследования в данном направлении представляются в обосновании аддитивной рекурсии по золотой пропорции как генетического кода мироздания в его динамическом развитии.

Литература.

1. *Василенко С.Л.* Квадратичные закономерности // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15664, 21.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161579.htm.
2. *Рвачев В.Л., Авинаш К.* Квадратичный закон красного смещения и неархимедова Вселенная // Радиофизика и Радиоастрономия. – 2001. – Том 6, № 2. – С. 534–537.
3. *Quadratic reciprocity* / From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_reciprocity.
4. *Черепанов О.* Конфликт моделей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15801, 21.02.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161617.htm.
5. *Барашенков В.* Сколько сторон света у нашей Вселенной? // Знание – сила. – 2001. – № 2. – http://www.znanie-sila.ru/online/issue_1193.html.
6. *Митрохин Д.В.* Маятник непонимания / Гл. 3. Стрела времени и концепция игры. – Николаев, 2008. – http://www.scorcher.ru/theory_publisher/show_art.php?id=23.
7. *Сингх С.* Великая теорема Ферма: пер. с англ. – М.: МЦМНО, 2000. – http://ega-math.narod.ru/Singh/FLT.htm.
8. *Pythagorean triple* / From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_triple.
9. *Начала Евклида*. Книги VII–X: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. – 512 с.
10. *Mersenne prime* / From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_prime.
11. *Беляев М.И.* 7.1.1.О хаосе. – http://milogiya.narod.ru/index.htm.
12. *Brian Roselle*. Golden Mean Series. – http://sites.google.com/site/goldenmeanseries.
13. *Василенко С.Л.* Златые цепи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15557, 22.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161546.htm.
14. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.
15. *Василенко С.Л.* Дуально–пентагональные структуры // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15573, 01.10.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161554.htm.
16. *Бронштейн И.Н.* Парабола // Квант. – 1975. – № 4. – С. 9–16.
17. Б2 *Бронштейн И.Н.* Гипербола // Квант. – 1975. – № 3. – С. 16–24.
18. *Василенко С.Л.* "Золотой разговор" с Евклидом // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15649, 12.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm.
19. *Лиманов Л.Г.* О числе *e* и *n*! // Квант. – 1972. – № 5. – С. 14–19.
20. *Горобец Б.С.* Мировые константы в основных законах физики и физиологии // Наука и жизнь. – 2004. – № 2. – http://arbuz.uz/t_e_pi.html.
21. *Борвейн Дж., Борвейн П.* Рамануджан и число π // В мире науки. – 1988. – № 4. –

С. 58–66. – http://www.ega-math.narod.ru/Rama/Rama3.htm.

22. *Жуков А.В.* Вездесущее число "пи". – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.

23. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

24. Постоянная Фейгенбаума // Википедия. Дата обновления: 08.06.2010. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=25247140.

25. *Weisstein E.W.* Feigenbaum Constant / From *MathWorld*. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/FeigenbaumConstant.html.

26. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141 (10). – № 2. – С. 343–374. – http://ufn.ru/ru/articles/1983/10/e.

27. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.

28. *Гигидикин С.Г.* Загадка Рамануджана // Квант. – 1987. – № 10. – С. 14–20, 41.

29. *Левин В.И.* Рамануджан – математический гений Индии. – М.: Знание, 1968. – http://www.ega-math.narod.ru/Rama/Rama2.htm.

30. *Weisstein E.W.* Pi Formulas / From MathWorld. – a Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/PiFormulas.html.

31. *Friedman E.* Problem of the Month (August 2004). – http://www.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0804.html.

32. *Weisstein E.W.* Golden Ratio Approximations / From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatioApproximations.html.

33. *Ольчак А.С.* О возможной связи фундаментальных констант физики: постоянной тонкой структуры и постоянной Фейгенбаума. – Естественные и технические науки. – 2009. – № 2. – С. 19–22.

34. *Шипицын Е.В., Попков В.В.* Двойственность и золотое сечение в теории фракталов и хаоса // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.11073, 18.03.2004. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001a/00160023.htm.

35. *Ramanujan S.* Modular equations and approximations to π // Quart. J. Math. – 1914. – Vol. 45. – P. 350–372.

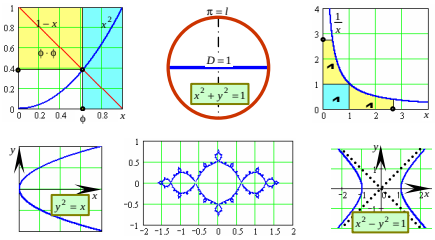
36. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные ряды. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 528 с.

37. *Закон обратных квадратов* // Википедия. Дата обновления: 25.06.2010. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=25713025.

38. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии: Пер. с лат. и прим. А.Н. Крылова. – М.: Наука, 1989. – 688 с. – http://www.math.ru/lib/book/djvu/klassik/newton.djvu.

39. *Яворский Б.М., Детлаф А.А., Лебедев А.К.* Справочник по физике для инженеров и студентов вузов: 4-е изд., перераб., испр. – М.: Мир и образование, 2007. – 1056 с.

© ВаСиЛенко, 2010



Приложение 1

Квадратичное представление натуральных чисел

Линник Ю.В. (1915–1972, Россия) – продолжатель знаменитой Петербургской математической школы, основанной П. Чебышевым, где решались труднейшие задачи теории чисел, по возможности, простейшими методами.

Одним из вопросов теории чисел является представление натуральных чисел квадратичными формами. Эти формы отличаются по числу переменных и называются: при двух переменных – *бинарной*, при трех – *тернарной*, при четырех – *кватернарной*.

Французский математик Лагранж более 100 лет назад доказал, что всякое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более 4 квадратов натуральных чисел. Возник вопрос (английский математик Варинг): сколько надо k-х степеней натуральных чисел, *чтобы представить их суммой всякое натуральное число*.

Проблема Варинга была решена в 1909 г. Д. Гильбертом, но его решение было очень громоздким и малопонятным. Академик Виноградов И.М. (1934) дал новое решение этой проблемы, но оно по-прежнему оставалось очень сложным. Линнику удалось решить эту проблему элементарными средствами (1934), вполне доступными для понимания учащихся.

Самый интересный случай, используемый в кристаллографии, дает *тернарная квадратичная форма*, которая долго не поддавалась крупнейшим математикам мира, – решена Линником (1939).

Пользуясь теорией вероятностей, он решил (1959) проблему, поставленную в 1923 году английскими математиками Харди и Литлвудом, сформулировав ее в виде теоремы:

каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде суммы простого числа и двух квадратов натуральных чисел.

Приложение 2

Квадратичное отображение [10]

Логистическое отображение (также известное, как *квадратичное отображение* или отображение Фейгенбаума) – полиномиальное отображение, показывающее, как хаотически сложное поведение может возникать из очень простых нелинейных уравнений.

Этот дискретный аналог непрерывного логистического уравнения Ферхюльста характеризует факт, что *прирост популяции происходит в дискретные моменты времени*.

Математический вид отображения

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n),$$

где $0 \le x_n \le 1$ – численность популяции в n-м году;

$r > 0$ – параметр, характеризующий скорость размножения (роста) популяции.

Данным нелинейным отображением описывается два эффекта:

- *размножение* популяции со скоростью, пропорциональной ее численности в момент, когда численность популяции (ЧП) мала;
- *конкуренция* (смертность при высокой плотности) за жизненные ресурсы, при которой скорость размножения падает из-за ограничения на "максимальную емкость" среды, в которой обитает популяция.

При некоторых начальных значениях и величинах параметров отображение дает отрицательные значения численности популяции. Подобного недостатка лишена дискретная модель Рикера, которая также демонстрирует хаотическое поведение.

---

[10] Используются материалы: Логистическое отображение // Википедия. Дата обновления: 19.01.2010. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=21468449.

Зависимость поведения от параметра r

$0 < r < 1$ – популяция в конце концов вымирает, независимо от x_0;

$1 < r < 2$ – ЧП быстро выходит на стационарное значение $z = 1 - r^{-1}$, независимо от x_0;

$2 < r < 3$ – ЧП точно так же выходит на стационарное значение z, но вначале будет несколько колебаться вокруг него, а скорость сходимости линейна везде, кроме значения $r = 3$, при котором она крайне мала, меньше линейной;

$3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3{,}45$ – ЧП бесконечно колеблется между двумя значениями, причем их величина не зависит от r;

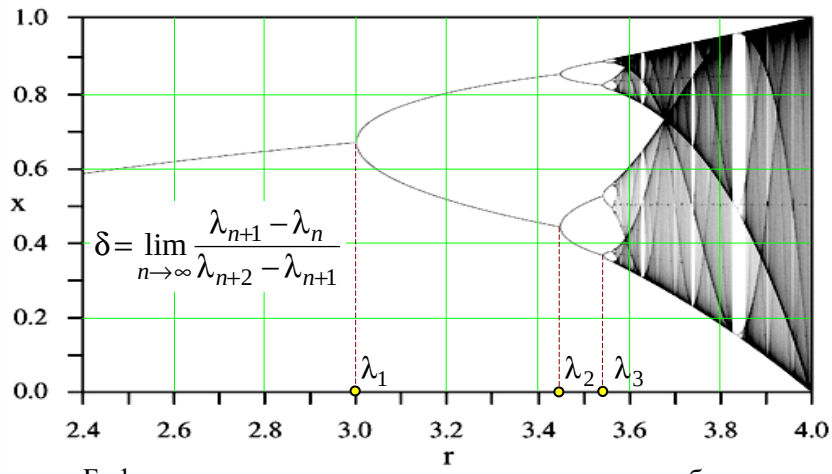
$3{,}45 < r < 3{,}54$ – ЧП бесконечно колеблется между четырьмя значениями;

$3{,}54 < r < 3{,}57$ – ЧП колеблется между 8 значениями, потом 16, 32 и т.д. Длина интервала изменения параметра, при котором наблюдаются колебания между одинаковым количеством значений, уменьшается по мере увеличения r. Отношение между двумя длинами смежных интервалов стремится к константе Фейгенбаума $\delta = 4{,}669....$ Подобное поведение является типичным примером каскада бифуркаций удвоения периода;

$3{,}57 < r < 4$ – большинство значений демонстрируют хаотическое поведение, однако существуют узкие, изолированные "окна значений r" или окна периодичности, при которых система ведет себя регулярно. Так, начиная со значения $1 + \sqrt{8} \approx 3{,}83$, существует интервал параметров r, при котором наблюдаются колебания между тремя значениями, а для больших значений r – между 6, потом 12 и т. д. Фактически, в системе можно найти периодические колебания с любым количеством значений. Последовательность смены количества значений удовлетворяет порядку Шарковского (http://ru.wikipedia.org/?oldid=17591912);

$r = 4$ – значения отображения покидают интервал [0, 1] и расходятся при любых x_0.

Перечисленные свойства отражены на диаграмме $x(r)$ при больших значениях n.



Бифуркационная диаграмма логистического отображения:
универсальная константа δ определяется по точкам бифуркаций удвоения периода

Структура бифуркационной диаграммы фрактальна. Если увеличить область, в частности при r = 3,82 в одном из трех ответвлений, то можно увидеть, что тонкая структура этой области выглядит, как искаженная и размытая версия всей диаграммы.

То же самое верно для любой окрестности нехаотических точек.

Это пример глубокой связи между хаотическими системами и фракталами.

Для $r = 2$ существует точное аналитическое решение: $x_n = \dfrac{1 - (1 - 2x_0)^{2n}}{2}$.