С.Л. Василенко

Центр масс плоских фигур в точках золотого сечения

В работах [1–2] на частных примерах описан любопытный результат по размещению центра тяжести плоской фигуры и предприняты попытки по определению центра масс некоторых идеальных фракталов, как последовательности изменяющихся однородных тел.

Оказывается, что при определенных условиях центр массы материальной пластинчатой формы расположен точно на ее внешней границе в соответствии с пропорциональными соотношениями на основе золотого сечения (ЗС).

Правомерно принять и рассмотреть гипотезу, что это свойство является проявлением более общей закономерности, которая по-новому проливает свет на физическую интерпретацию гармонической пропорции.

Общие теоретические сведения.

Известно, что *центр масс* (центр инерции) в механике – это геометрическая точка, характеризующая движение тела или системы частиц как целого[1].

Центр масс (ЦМ) существует и единствен для любой системы (множества) точек.

В некотором смысле это условная или эквивалентная точка как одна из геометрических характеристик распределения масс в системе.

Понятие о ЦМ отличается от понятия о центре тяжести тем, что последнее имеет смысл только для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести; понятие же о ЦМ не связано ни с каким силовым полем и приемлемо к любой механической системе.

Для твердого тела положения ЦМ и центра тяжести совпадают.

В первом приближении можно ограничиться исследованием однородных пластин, когда «вдоль по фигуре равномерно распределены массы, так что поверхностная плотность их (то есть масса, приходящаяся на единицу площади) постоянна» [3, с. 230].

Центр масс однородной плоской фигуры. Координаты центра масс (центра инерции) плоской фигуры массой m равны $x_\text{c} = M_y / m$, $y_\text{c} = M_x / m$, где M_x, M_y – статические моменты фигуры относительно координатных осей.

Например, для материальной однородной плоской фигуры, которая сверху ограничена кривой, заданной явным уравнением $y = f(x)$, снизу – осью Ox, а слева и справа – прямыми линиями $x = a$ и $x = b$, статические моменты выражаются формулами [3, с. 231]

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx, \qquad M_y = \int_a^b xy\, dx.$$

Для нахождения центра масс плоской фигуры, имеющей сложносоставную форму, достаточно эффективен метод ее разбиения на простые элементы с легко определяемыми координатами. Сложная конфигурация представляется в виде объединения простых фигур, из которых вырезаны некоторые фрагменты.

Таким образом, если однородную материальную пластину можно разбить на конечное число частей с известными положениями центров тяжести, то координаты (положение) ЦМ всей пластины можно вычислить по формулам (метод отрицательных масс) [4–6]:

$$x_\text{c} = S^{-1}\sum\nolimits_i S_i x_i\,, \qquad y_\text{c} = S^{-1}\sum\nolimits_i S_i y_i\,, \qquad S = \sum\nolimits_i S_i\,,$$

где x_i, y_i – координаты ЦМ i-й фигуры площадью S_i, которая берется со знаком "минус", если фигура "вырезается". Число слагаемых в суммах равно количеству частей фигуры.

---

[1] Центр масс // Словари и энциклопедии на Академике. – http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/15967.

Отметим некоторые известные *свойства* [4–6]:

– если однородное тело имеет центр (ось, плоскость) симметрии, то ЦМ совпадает с этим центром (лежит на этой оси, в плоскости);

– если ЦМ отдельных частей тела лежат на одной прямой (плоскости), то и ЦМ лежит на этой прямой (плоскости);

– если тело имеет полости (пустоты), то его можно рассматривать как систему, состоящую из сплошного тела и тел в форме пустот, имеющих отрицательную массу (метод отрицательных масс);

– ЦМ фигур и тел правильной геометрической формы совпадает с геометрическим центром;

– ЦМ правильного многоугольника совпадает с центром поворотной симметрии.

Задача "полумесяца". Пусть тело представляет собой однородную плоскую и тонкую пластину в форме круга радиусом R, из которой вырезается круг радиуса $r < R$.

Исходная фигура (рис. 1) симметрична относительно оси Оx, поэтому ее центр масс находится на этой оси, и его положение полностью определяется координатой

$$x_{\mathrm{c}} = \frac{\pi R^2 \cdot R - \pi r^2 \cdot r}{\pi R^2 - \pi r^2} = \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{(R-r)\left(R^2 + Rr + r^2\right)}{(R-r)(R+r)} = \frac{R^2 + Rr + r^2}{R+r}.$$

Анализ формулы показывает, что с изменением радиуса $r = 0 \div R$ (диаметра $d = 0 \div 2R$) вырезаемого круга центр масс смещается в интервале $x_{\mathrm{c}} = (1 \div 1{,}5)R$.

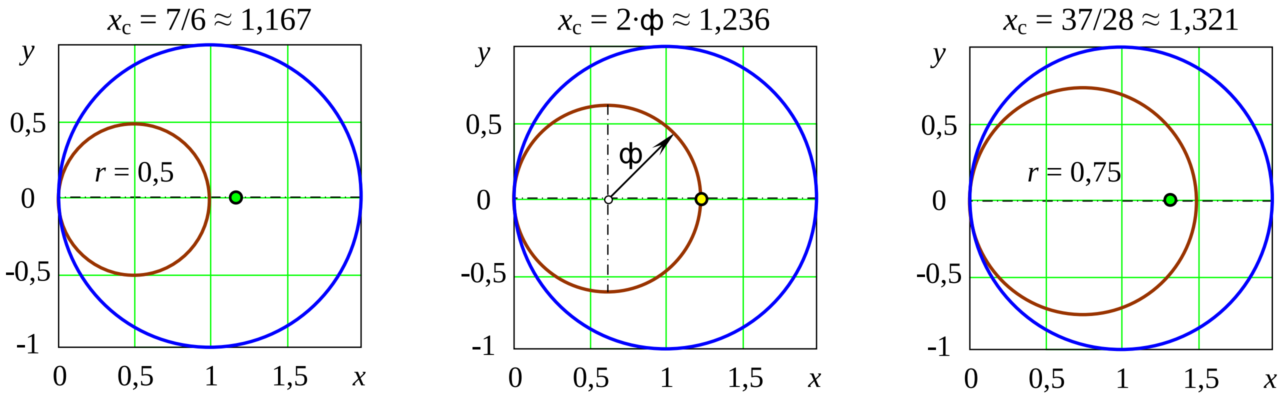

Рис. 1. Смещение центра масс "полумесяца": средний график соответствует ЗС с центром масс на границе круга радиусом $R = 1$ и вырезом r

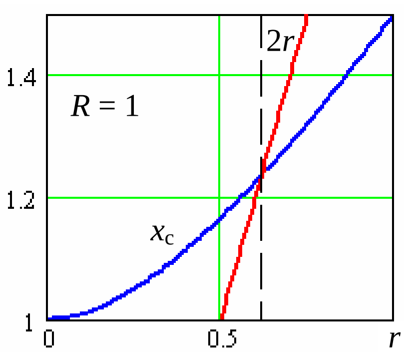

Рис. 2. Движение центра масс в зависимости от радиуса r

Таким образом, в определенный момент центр масс обязательно совмещается с границей самой фигуры (на рис. 2 соответствующие линии пересекаются). Положение этой весьма примечательной точки определяется из уравнения

$$x_{\mathrm{c}} = 2r = \frac{R^2 + Rr + r^2}{R+r}$$

или $r^2 + (r-R)R = 0$, откуда $r = \phi \cdot R$,

где $\phi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$ – число золотого сечения (ЗС), равное длине большей части единичного отрезка, рассекаемого согласно гармонической пропорции.

Таким образом, точка центра масс x_c делит диаметр большого круга в золотом сечении. Примечательно, если радиус вырезаемого круга меньше ϕ, то центр масс оставшейся фигуры находится внутри нее, если больше ϕ, то – вне ее (см. рис. 1).

Положение центра масс точно на границе полумесяца соответствует отношению радиусов $r/R = \phi$, равному числу ЗС.

Другие геометрические фигуры.

<u>*Квадрат*</u> со стороной a (рис. 3).

Центры масс и площади составных фигур равны:

$$(R, r) = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot (1, k); \qquad (S, s) = a^2 \cdot \left(1, k^2\right).$$

Центр масс урезанной фигуры вычисляется по формуле (1):

$$x_c = \frac{SR - sr}{S - r} = \frac{\sqrt{2}a}{2} \frac{1-k^3}{1-k^2} = \frac{\sqrt{2}a}{2} \frac{k(k+1)+1}{k+1}.$$

Эта точка расположена точно границе фигуры $x_c = \sqrt{2}ak$, если $2k(k+1) = k(1+k)+1$ или $k(k+1)-1=0$, откуда $k = \phi$.

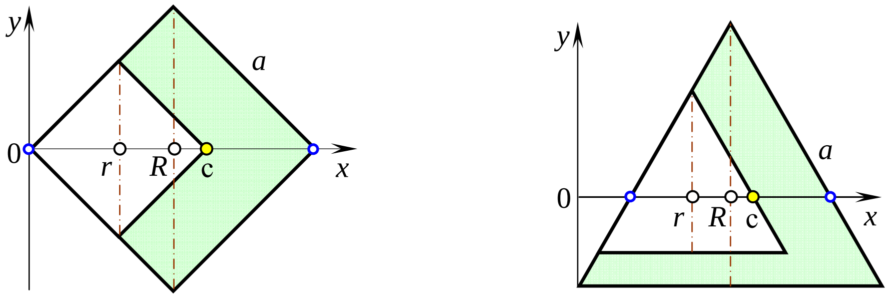

Рис. 3. Примеры вырезов у квадрата и правильного треугольника

Равносторонний <u>*треугольник*</u> со стороной a (рис. 3).

Центры масс и площади составных фигур равны:

$$(R, r) = a\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6} + k\frac{1}{3}\right); \qquad (S, s) = \frac{\sqrt{3}a}{4} \cdot \left(1, k^2\right).$$

Центр масс урезанной фигуры вычисляется как

$$x_c = \frac{SR - sr}{S - s} = \frac{\frac{a}{2} - k^2 r}{1-k^2}.$$

Эта точка расположена точно границе фигуры $x_c = r + \left(r - \frac{a}{6}\right)$ при условии $1 + 4k = \frac{3 - k^2 \cdot (1+2k)}{1-k^2}$ или $k^3 - 2k + 1 = 0$, что равносильно $(k-1)\left(k^2 + k - 1\right) = 0$.

Опуская тривиальный случай $k = 1$, окончательно имеем $k = \phi$.

Подобным образом могут быть выполнены построения с другими, например, правильными n-угольниками (рис. 4).

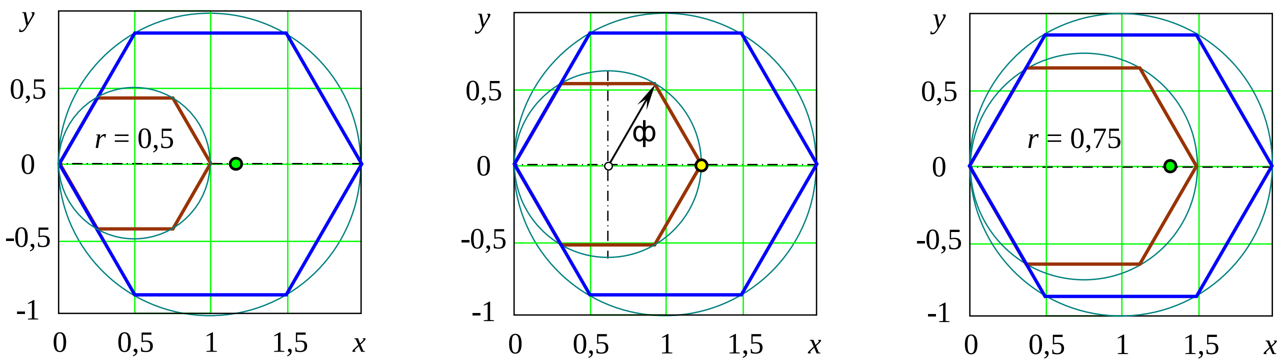

Рис. 4. Смещение центра масс 6-угольника

Аналогичные расчеты выполняются с учетом известных формул:
– площадь правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R, составляет

$$S = \frac{n}{2} R^2 \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

– апофема совпадает с радиусом вписанной окружности и равна $a = R\cos(\pi/n)$.

Теоретическое обобщение.

Рассмотрение изложенных примеров и многих других задач позволяет сделать важное формализованное обобщение, основанное на понятии подобия и осевой симметрии.

Напомним, что *осевая симметрия* рассматривается относительно прямой линии.

Так, координатные формулы осевой симметрии относительно вертикальной оси R имеют вид: $(x', y') = (2R - x, y)$.

Подобие плоских фигур – преобразование, сохраняющее отношение расстояний.

Если изменить (увеличить или уменьшить) все размеры плоской фигуры в одно и то же число раз (отношение подобия), то старая и новая фигуры называются подобными.

Определение. *Подобие* – преобразование F^k евклидова пространства, при котором для любых двух точек a, b и их образов $a' = F^k(a)$, $b' = F^k(b)$ имеет место соотношение $|a'b'| = k|ab|$, где k – положительное число, называемое *коэффициентом подобия*.

В частности, два многоугольника подобны, если их углы равны, а стороны пропорциональны.

В понятиях изображений это рассматривается как масштабирование – изменение размера исходного изображения с сохранением его пропорций.

Подобие фигур является отношением эквивалентности (~), то есть бинарным отношением, для которого выполнены условия рефлексивности $(a \sim a)$, симметричности $(a \sim b) \Rightarrow (b \sim a)$ и транзитивности $(a \sim b) \vee (b \sim c) \Rightarrow (a \sim c)$.

Можно использовать такое обозначение: $\mathrm{F}' \overset{k}{\infty} \mathrm{F}$ – фигура F′ подобна фигуре F с коэффициентом k, и на его основе записать свойство симметричности подобных фигур:

$$(\mathrm{F}' \overset{k}{\infty} \mathrm{F}) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \overset{1/k}{\infty} \mathrm{F}').$$

Если при преобразовании подобия с коэффициентом k плоская фигура F переходит в фигуру F′, то площади фигур S соотносятся с квадратом коэффициента подобия $S_{\mathrm{F}'} = k^2 S_{\mathrm{F}}$. Иначе говоря, площади подобных фигур относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров.

Введем новое определение.

Определение. U_k-фигура (условно "подкова") – плоская форма, образованная выпуклой фигурой с осевой вертикальной симметрией, из которой вырезана подобная ей фигура с коэффициентом подобия $k<1$ так, что их левые точки (края) совпадают, а центры масс находятся на одной горизонтальной прямой (рис. 5).

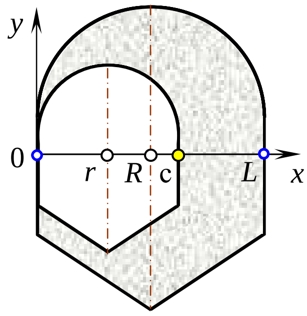

Рис. 5. Пример U_k-фигуры

Выпуклость фигуры означает свойство, при котором любой отрезок с концами в точках данной фигуры целиком принадлежит ей. В нашем случае это требование необходимо для того, чтобы вырезаемая часть не выходила за контуры исходной формы.

Другими словами вырез не содержит пустот, подобен исходной фигуре, а его самая левая точка (край) совмещается с аналогичной точкой (краем) начальной фигуры.

Вертикальность оси симметрии не приводит к потере общности рассуждений и принята для удобства представления материала.

Ограничимся однородной формой, когда поверхностная плотность (масса единицы площади поверхности) постоянна для всех частей фигуры.

Сформулируем и докажем одну важную теорему.

Теорема. Центр масс однородной U_k-фигуры лежит точно на ее геометрическом контуре, если коэффициент подобия k численно равен золотому сечению.

Доказательство. Пусть R – точка центра масс на оси Ox и S – площадь "подковы" с заполненным вырезом.

Тогда $(r, s) = (Rk, Sk^2)$ – аналогичные параметры самого выреза.

Положение центра масс "подковы" определяется по методу отрицательных масс

$$x_\mathrm{c} = \frac{SR - sr}{S - s} = \frac{SR - SRk^3}{S - Sk^2} = R\frac{1-k^3}{1-k^2} = R\frac{1+k+k^2}{1+k} = R\left(k + \frac{1}{k+1}\right).$$

Центр масс лежит точно на границе (геометрическом контуре) плоской фигуры, если $x_\mathrm{c} = Lk$, где L – правая точка (край) "подковы" (см. рис. 5).

Из осевой симметрии исходной образующей фигуры следует $L = 2R$ или $x_\mathrm{c} = 2Rk$.

Приравнивая полученные соотношения x_c, получаем $2Rk = R\left(k + \frac{1}{k+1}\right)$ или $k = \frac{1}{k+1}$, откуда следует $k = \phi = \left(\sqrt{5}-1\right)/2$. Теорема доказана.

Как видно из сопоставления данного рассуждения с вышеприведенным решением задачи о треугольнике, доказательство теоремы даже несколько проще.

Так часто бывает, когда исследование частного случая более сложно, чем аналогичное расширение на общий случай. То есть повышение уровня обобщения не означает обязательное адекватное усложнение теоретического обоснования.

Таким образом, если из однородной плоской фигуры вырезается ей подобная часть, уменьшенная в $k = \phi$ раз, то центр масс образованной фигуры типа "подковы" расположен точно на ее границе. То есть ЗС выступает здесь в роли некоторого пограничного слоя.

На наш взгляд, это весьма впечатляющий результат, возможно, с далеко идущими приложениями и интерпретациями, что позволяет по-новому взглянуть на феномен ЗС.

Основные требования к исходной фигуре: однородность, выпуклость или возможность вырезания подобной уменьшенной фигуры, осевая симметрия.

Положение центра масс U_k-фигуры зависит от коэффициента подобия k:

в пределах фигуры – $\phi < k < 1$;

на ее границе – $k = \phi$;

за пределами фигуры – $0 < k < \phi$.

За счет чего поддерживается равновесие в точке, разно-удаленной от боковых краев? – Здесь налицо такое явление как сохранение баланса: меньшая по размерам сплошная часть (справа) и большая по размерам, но разряженная часть (слева).

В этом смысле возможны некоторые аналогии из общественных отношений.

В частности, меньшая количеством, но сплоченная единством убеждений оппозиция может составить мощный противовес большему по численности, но "вальяжному" правящему большинству с притупляемой бдительностью от упоения властью.

Но это тема отдельного исследования.

А пока ограничимся некоторыми примерами-зарисовками (рис. 6).

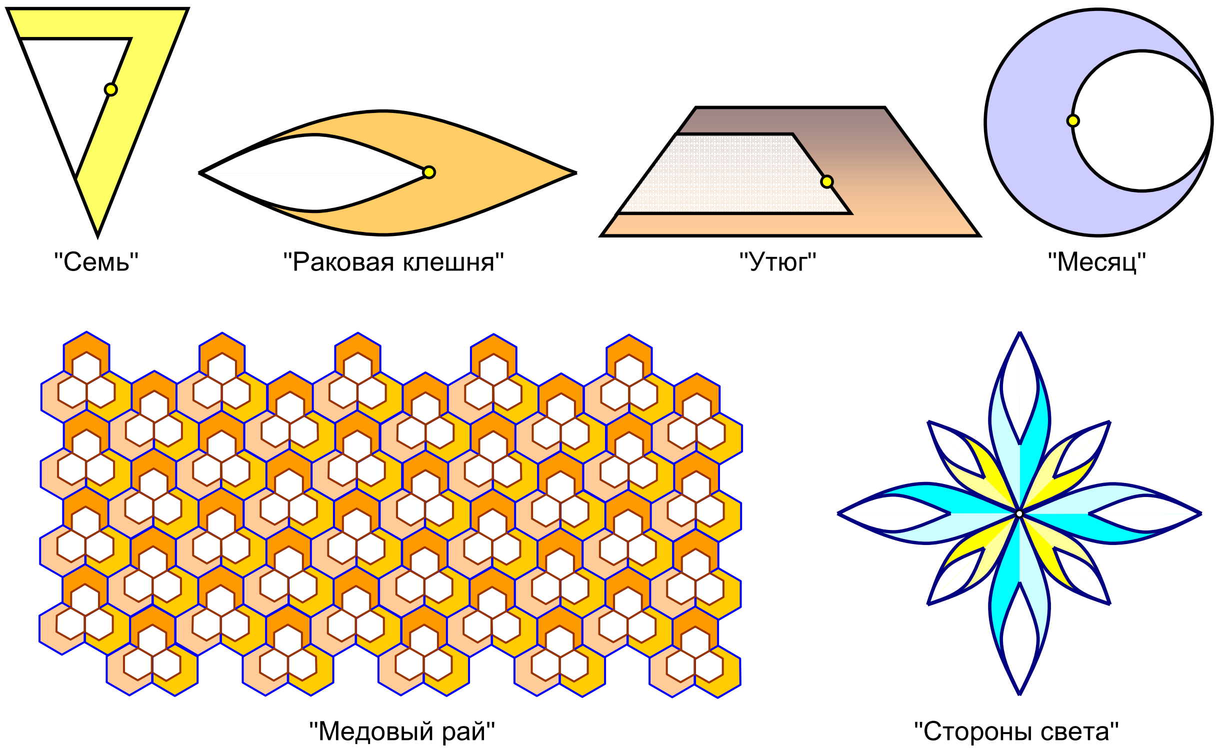

Рис. 6. U-образные фантазии-зарисовки

Выводы. Показано, что центр масс плоской формы, образованной выпуклой фигурой с осевой симметрией, из которой вырезана подобная ей фигура с коэффициентом подобия $k<1$ и совпадающими краями, лежит точно на геометрическом контуре формы, если величина k численно равна золотому сечению.

Литература.

1. *Байрашев К.А.* Золотое сечение в задачах о центре тяжести // Фундаментальные исследования. – 2006. – № 9. – С. 13–17.
2. *Байрашев К.А.*, *Рекотов Р.А.*, *Байрашева В.К.* Определение центра масс фрактальных структур // Фундаментальные исследования. – 2006. – № 7. – С. 18–19.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: 8-е изд. В 3 т. Т. 2. – М.: Физматлит, 2001. – 810 с.
4. *Эрдеди А.А.*, *Эрдеди Н.А.* Теоретическая механика. Сопротивление материалов. – М.: Академия, 2001. – 318 с.
5. *Вереина Л.И.*, *Краснов М.М.* Техническая механика. – М.: Академия, 2004. – 288 с.
6. *Олофинская В.П.* Техническая механика. – М.: Форум Инфа-М, 2005. – 349 с.