С.Л. Василенко

Синтез квазисовершенных идеальных магических квадратов

В статье [1] исследован ряд аналитических методов построения магических квадратов (МК) сколь угодно большого порядка (размерности). Определение элементов МК в явном виде позволяет максимально формализовать вычислительные процедуры и непосредственно находить содержимое любой ячейки квадратной матрицы.

Целью настоящей работы является распространение указанного подхода для синтеза квазисовершенных идеальных магических квадратов (СИМК).

Основные сведения по терминологии.

Магический квадрат (МК) – квадратная таблица (матрица) размером $n \times n$, заполненная n^2 числами таким образом, что суммы чисел во всех ее строках, столбцах и на двух главных диагоналях одинаковы. Характерная сумма чисел в строках, столбцах и на диагоналях называется магической константой.

Традиционный (классический) МК содержит все натуральные числа от 1 до n^2.

Пандиагональный (panmagic) или *дьявольский* МК – если с суммой S совпадают и все ломаные диагонали (в обоих направлениях), образующиеся при сворачивании квадрата в тор.

Ассоциативный (симметричный) МК – если сумма любых двух чисел, симметрично (наискось) расположенных относительно центра матрицы, равна $1 + n^2$.

Идеальный (ultramagic) МК [2] – одновременно пандиагональный и ассоциативный. То есть магическая константа присутствует во всех ломаных диагоналях, а сумма любых двух чисел в центрально противолежащих ячейках равна $1+n^2$. Идеальные МК отличаются строгой симметрией рисунка относительно главных осей. Идеальных МК порядка $4k+2$ не существует. Это доказано строго математически.

Совершенный (most-perfect) МК [3, с. 154] – пандиагональный квадрат (обычно порядка двойной четности $n = 4k$), в котором:

– в каждом блоке 2×2, а также в угловых ячейках квадрата сумма чисел одинакова и для традиционного (классического) МК равна $2(n^2 + 1)$;

– любая пара чисел, расположенных вдоль каждой диагонали друг от друга на расстоянии $n/2$, дает в сумме одну и ту же величину, которая в традиционном МК равна $(n^2 + 1)$ – свойство комплементарности чисел.

Числовые формы СИМК представляет исключительный интерес. В них одновременно сосредоточено наибольшее количество уникальных числовых свойств. Поэтому особое внимание может быть сосредоточено на поиске решений, допускающих наряду с замечательными особенностями магических квадратов (МК) и возможности их аналитического представления. Можно высказать мысль, что подобное сочетание гармонии и математики является одной из главных задач синтеза общих структур, подобных МК.

Нечто подобное мы наблюдаем при создании фракталов, когда незамысловатые формулы комплексной переменной в комбинировании со случайным (вероятностным) поиском на заданном участке плоскости приводит к изумляющим глаз и гармонически насыщенным геометрическим образам.

Как отмечалось выше, в идеальном МК таблица $n \times n$ заполняется неповторяющимися числами так, что во всех строках, столбцах и диагоналях (включая ломаные) суммы чисел равны магической константе, а сумма любой пары центрально симметричных ячеек равна одной и той же величине.

Для $n = 2k + 1$ и $n = 4k$ ($k = 2, 3, 4,\ldots$) идеальный МК удается заполнить всеми числами от 1 до n^2. При $n = 4k + 2$ идеальные МК также существуют, но числа в них уже не являются частью начального натурального ряда. Поэтому такие идеальные МК могут быть только нетрадиционными [4].

Один из методов создания и подсчет СИМК можно найти в работе [5].

Общее количество существенно различимых (с точностью до поворотов и отражений) совершенных МК порядка $4k$ образуют числовую последовательность A051235 [6].

Так, для $n = 36$ существует около $2{,}7 \times 10^{44}$ нетривиально различимых СИМК [7].

Квазисовершенные идеальные МК проще всего строить при помощи ортогональных латинских квадратов [8, с. 261–282]. Важным обстоятельством здесь является доказанная теорема, что для всякого $n > 6$ существует пара ортогональных латинских квадратов порядка n [8, с. 277]. Весь вопрос теперь сводится к поиску таких подходящих пар.

А их нахождение, как оказывается, не такое уж и простое.

Одни из первых попыток обобщения совершенных МК можно найти в работах [3, 9]. Идеальные МК произвольного порядка (за исключением $4k + 2$) легко воссоздаются с помощью "цепей Александрова" [2, 10], хотя их формирование никак нельзя отнести к прозрачным и логически обоснованным процедурам.

В своих последних изысканиях русский исследователь Г. Александров [11, 12] вышел на понимание внутренних механизмов, присущих МК с одновременным проявлением совершенных и идеальных свойств (согласно принятой терминологии), чем внес весомый вклад в создание прикладной теории и практики построения МК произвольного порядка.

Эти первые попытки в поисках целостного подхода в построении СИМК требуют своего дальнейшего осмысления, развития плодотворных идей на формализованном уровне, универсализации и создания единой подосновы, включая аналитический блок.

Ниже описывается такой общий подход к построению наиболее простых латинских квадратов, позволяющих находить СИМК любого четного порядка $n \geq 6$.

Уже найденные формы и алгоритмы синтеза МК представляются сравнительно простыми и даже очевидными. Однако их поиску предшествовал скрупулезный и длительный анализ многочисленных форм и выбору среди них наиболее приемлемых для выполнения несложных вычислительных расчетов.

1) Для n, кратного четырем (двойной четности), задаем исходные векторы $\bar{b}$ и $\bar{s}$:

$\underline{n = 8k}$: $\quad \bar{b} = (-), \quad \bar{s} = (1 \quad 4 \quad 6 \quad 7),$

$\underline{n = 8k + 4}$: $\quad \bar{b} = (1 \quad 3), \quad \bar{s} = (7 \quad 8 \quad 9 \quad 10).$

Базовый набор данных $\bar{b}$ латинского квадрата, который назовем *производящим вектором*, образуется путем последовательного присоединения к нему (stack) вектора $\bar{s}$, элементы которого с каждым шагом увеличиваются на 8 (рис. 1) согласно принятой кратности k

$$\bar{b} = \text{stack}\left(\bar{b},\, \bar{s} + 8t\right), \quad t = \overline{0,\, k-1}.$$

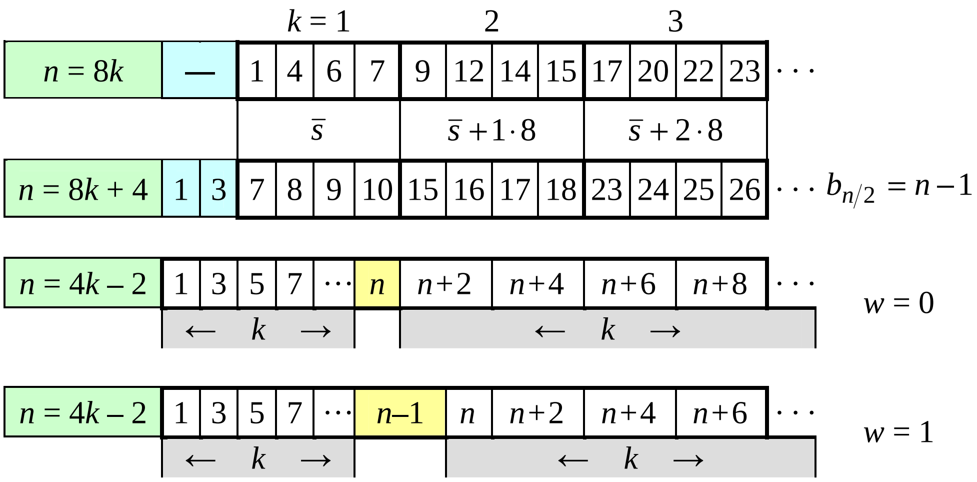

Рис. 1. Схемы построения производящих векторов латинского квадрата

Для порядка n, кратного 4, последний элемент данного вектора должен быть всегда нечетным. За счет этого образуется двойственная пара чисел с единицей.

Поэтому, если $n = 8k - 4$, то последний элемент приравнивается $b_{n/2} = n - 1$. Например, для $n = 20$ получаем $\overline{b} = (1\ \ 3\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 15\ \ 16\ \ 17\ \ 19)$ – с заменой в конце: $18 \to n - 1 = 19$.

2) Для порядка <u>$n = 4k - 2$</u> одинарной четности половинка вектора $\overline{b}$ нечетна, а значит, содержит средний элемент, относительно которого в обе стороны и формируется производящий $(2k+1)$-мерный вектор с четным ($w = 0$) либо нечетным ($w = 1$) элементом посередине (см. рис. 1):

$$b_{k+1} = n - w, \quad (b_i\ \ b_{i+k+1}) = (2i - 1\ \ n - 2w + 2i), \quad i = \overline{1, k}\,.$$

Например, для $n = 22$ $(k = 5)$ имеем:

$$w = 0 \ \rightarrow\ \overline{b} = (1\ \ 3\ \ 5\ \ 7\ \ 9\ \ 22\ \ 24\ \ 26\ \ 28\ \ 30\ \ 32);$$

$$w = 1 \ \rightarrow\ \overline{b} = (1\ \ 3\ \ 5\ \ 7\ \ 9\ \ 21\ \ 22\ \ 24\ \ 26\ \ 28\ \ 30).$$

Латинский квадрат L создается очень просто по формулам:

$$L^{\langle 2m-1\rangle} = \overline{b}, \quad L^{\langle 2m\rangle} = n + 1 - \overline{b}, \quad m = \overline{1, n/2}\,,$$

где $L^{\langle\xi\rangle}$ – ξ-й столбец матрицы L, а производящий вектор $\overline{b}$ достраивается до длины n по правилу зеркальной симметрии $b_{n/2+1-i} = b_i, \quad i = \overline{1, n/2}$.

Тогда СИМК $\{m_{i,j}\}$ строится по несложному правилу:

$$m_{i,j} = c\left(L_{i,j} - 1\right) + L_{j,i}, \quad i, j = \overline{1, n}\,,$$

где

$$c = \max\left(\overline{b}\right) + 1 = n\left(1 + \frac{n\ (\mathrm{mod}\ 4)}{4}\right).$$

Для $n = 4k - 2$ от значения c дополнительно вычитается величина, равная $2w$.

По своей сути параметр c представляет собой сумму единицы (как начального элемента натурального ряда) и максимального числа в производящем векторе $\overline{b}$.

Поскольку вся информативно-насыщеная часть латинского квадрата L полностью сосредоточена в производящем векторе $\overline{b}$, то сам квадарт можно и не строить, а расчеты выполнять непосредственно через элементы вектора $\overline{b}$ и двумерную функцию $f(x, y)$:

$$m_{i,j} = c\left[f(i, j+1) - 1\right] + f(j, i+1),$$

$$f(x, y) = \left|b_x - c' \cdot y(\mathrm{mod}\ 2)\right|, \quad c' = c + 1\,.$$

Отметим, что иногда встречается эквивалентная форма представления МК через латинские квадраты $m_{i,j} = cL_{i,j} + L_{j,i} + 1$, если исходный набор чисел в них составлен не в диапазоне $1 \div n^2$, а в интервале от 0 до $(n^2 - 1)$.

Программная реализация изложенного алгоритма на ПВМ практически тривиальная.

Машинные эксперименты выполнены на обширнейшем материале при миллионных значениях порядка МК. Простые схемы построения производящих векторов и явная запись содержимого ячеек МК в целом позволяют расширить теоретическую базу с необходимыми обоснованиями и доказательствами ключевых положений.

На данном этапе можно ограничиться кратким изложением отдельных признаков "СИМКов".

Некоторые свойства квазисовершенных идеальных МК (четного порядка).

1. По приведенной схеме построения производящих векторов латинского квадрата порядка $n = 4k - 2$ (6, 10, 14, ...) образуется нетрадиционный СИМК с пропуском части чисел натурального ряда так, что максимальное число, задействованное в построении МК, равно

$$\max(m_{i,j}) = \left(\frac{3}{2}n - 2w\right)^2$$

вместо n^2 как в обычном классическом МК.

Величина w характеризует четность $(w = 0)$ или нечетность $(w = 1)$ элемента посередине производящего вектора $\overline{b}$ (см. рис. 1)

2. Производящий (базовый) вектор $\overline{b}$ формирует нам первую строчку МК.

Например,

$n = 14$, $\overline{b} = (1\ 3\ 5\ 13\ 14\ 16\ 18)$, $4k - 2$

1	345	5	355	14	358	18	360	16	356	13	347	3	343
57	321	53	311	44	308	40	306	42	310	45	319	55	323

$n = 16$, $\overline{b} = (1\ 4\ 6\ 7\ 9\ 12\ 14\ 15)$, $8k$

1	244	6	247	9	252	14	255	15	254	12	249	7	246	4	241
64	205	59	202	56	197	51	194	50	195	53	200	58	203	61	208

$n = 20$, $\overline{b} = (1\ 3\ 7\ 8\ 9\ 10\ 15\ 16\ 17\ 19)$, $8k + 4$

1	383	7	388	9	390	15	396	17	399	19	397	16	395	10	389	8	387	3	381
60	358	54	353	52	351	46	345	44	342	42	344	45	346	51	352	53	354	58	360

Рассматривая магический квадрат как числовую матрицу $M = \{m_{i,j}\},\ i, j = \overline{1, n}$, можно отметить его некоторые полезные свойства:

3. Прибавление к M постоянной приводит к новому, только нетрадиционному СИМК.

4. Умножение M на постоянную приводит к новому, только нетрадиционному СИМК.

5. Определитель идеального квазисовершенного МК и любого выделенного в нем квадратика $k \times k$ $(k \geq 4)$ равен нулю.

6. В идеальном квазисовершенном МК порядка n сумма чисел любого выделенного квадратика $2k \times 2k$ равна $\frac{4k^2}{n}S$, где S – магическая постоянная.

7. В идеальном квазисовершенном МК порядка $n = 4k$, $n = 4k - 2$ для столбцов и строк, симметричных относительно осей квадрата выполняются соотношения для сумм квадратов, кубов и четвертых степеней:

$$\sum_i m_{i,j}^2 = \sum_i m_{i,\,n+1-j}^2, \qquad \sum_i m_{j,i}^2 = \sum_i m_{j,\,n+1-i}^2, \quad j = \overline{1, n}.$$

$$\frac{\left|\sum_i m_{i,j}^3 - \sum_i m_{i,\,n+1-j}^3\right|}{\left|\sum_i m_{j,i}^3 - \sum_i m_{n+1-j,\,i}^3\right|} = n^3, \qquad \frac{\left|\sum_i m_{i,j}^4 - \sum_i m_{i,n+1-j}^4\right|}{\left|\sum_i m_{j,i}^4 - \sum_i m_{n+1-j,\,i}^4\right|} = n^3, \qquad n = 4k,$$

$$\frac{\left|\sum_i m_{i,j}^3 - \sum_i m_{i,n+1-j}^3\right|}{\left|\sum_i m_{j,i}^3 - \sum_i m_{n+1-j,\,i}^3\right|} = \left(\frac{3}{2}n\right)^3, \quad \frac{\left|\sum_i m_{i,j}^4 - \sum_i m_{i,\,n+1-j}^4\right|}{\left|\sum_i m_{j,i}^4 - \sum_i m_{n+1-j,\,i}^4\right|} = \left(\frac{3}{2}n\right)^3, \ n = 4k-2, \quad w = 0.$$

Как бы там ни было, но аналитическое представление позволяет изучать магические квадраты таких огромных размеров, которые просто не поддаются обычному человеческому созерцанию или визуализации.

Кто-то спросит: «А зачем все это нужно?» – Вопрос не праздный.

Действительно «какой смысл, вставать спозаранку и сидеть целый день с удочкой на берегу, когда можно, не вылезая из постели, просто так снять трубку и заказать рыбу в магазине... Никакое научное положение, ни одно наблюдение, ни одна идея не существуют сами по себе... Следя за эволюцией научных идей, мы сами приобщаемся к азарту и упоению великой битвы с непознанным» [13].

А гармония квазисовершенных идеальных магических квадратов не просто поразительна. В них не только выполняются все свойства идеальных МК, но и сумма четырех чисел любого блока 2×2 одинакова и для традиционного случая равна $2(n^2+1)$.

Их внутренняя красота наполнена нескончаемым фейерверком формально-арифметических закономерностей, что рано или поздно найдет свое адекватное отражение в моделировании мироздания, причем возможно самым неожиданным способом.

Это вопрос лишь времени...

Литература.

1. *Василенко С.Л.* Аналитика и гармония магических квадратов // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15931, 24.05.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161648.htm.
2. *Александров Г.* Идеальные магические квадраты. – http://renuar911.narod.ru/IDEAL_MSa.mht; http://renuar911.narod.ru/IMS_Alexandrov.html.
3. *Макарова Н.В.* Волшебный мир магических квадратов. – Саратов, 2009. – 180 с. – http://narod.ru/disk/5834353000/Magic_squares.pdf.html.
4. *Александров Г.* Идеальный совершенный магический квадрат четного порядка. – 2008. – http://renuar911.narod.ru/ideal_sov.html.
5. *Kathleen Ollerenshaw*, *David S. Bree*. Most-perfect Pandiagonal Magic Squares: Their Construction and Enumeration. – Institute of Mathematics and its Applications, 1998. – 186 p.
6. *Neil J. A. Sloane*. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://www.research.att.com/~njas/sequences/A051235.
7. *Most-perfect* magic square // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Most-perfect_magic_square.
8. *Холл М.* Комбинаторика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1970. – 424 с.
9. *Макарова Н.В.* Совершенные магические квадраты. – 2008. – http://klassikpoez.narod.ru/soversh.htm.
10. Цепи Александрова – прорыв в теории магических квадратов http://www.liveinternet.ru/users/3369559/post120832503/.
11. *Александров Г.* Метод построения идеального магического квадрата нечетного порядка. – 2007. – http://renuar911.narod.ru/ideal_mk.html.
12. *Александров Г.* Идеальный нетрадиционный магический квадрат порядка $n = 4k + 2$. – 2008. – http://renuar911.narod.ru/ideal_netra.html.
13. *Азимов А.* Зачем нужна история науки? // Химия и жизнь. – 1976. – № 10.

Приложение

Примеры квазисовершенных идеальных магических квадратов

n = 6

1	78	8	80	6	73
54	31	47	29	49	36
64	15	71	17	69	10
72	13	65	11	67	18
46	33	53	35	51	28
9	76	2	74	4	81

n = 8

1	60	6	63	7	62	4	57
32	37	27	34	26	35	29	40
41	20	46	23	47	22	44	17
56	13	51	10	50	11	53	16
49	12	54	15	55	14	52	9
48	21	43	18	42	19	45	24
25	36	30	39	31	38	28	33
8	61	3	58	2	59	5	64

n = 10

1	213	10	222	14	224	12	220	3	211
45	193	36	184	32	182	34	186	43	195
136	78	145	87	149	89	147	85	138	76
180	58	171	49	167	47	169	51	178	60
196	18	205	27	209	29	207	25	198	16
210	28	201	19	197	17	199	21	208	30
166	48	175	57	179	59	177	55	168	46
150	88	141	79	137	77	139	81	148	90
31	183	40	192	44	194	42	190	33	181
15	223	6	214	2	212	4	216	13	225

n = 12

1	135	7	140	9	143	11	141	8	139	3	133
36	118	30	113	28	110	26	112	29	114	34	120
73	63	79	68	81	71	83	69	80	67	75	61
96	58	90	53	88	50	86	52	89	54	94	60
97	39	103	44	105	47	107	45	104	43	99	37
132	22	126	17	124	14	122	16	125	18	130	24
121	15	127	20	129	23	131	21	128	19	123	13
108	46	102	41	100	38	98	40	101	42	106	48
85	51	91	56	93	59	95	57	92	55	87	49
84	70	78	65	76	62	74	64	77	66	82	72
25	111	31	116	33	119	35	117	32	115	27	109
12	142	6	137	4	134	2	136	5	138	10	144

n = 14

1	423	5	434	16	438	20	440	18	436	14	425	3	421
63	397	59	386	48	382	44	380	46	384	50	395	61	399
85	339	89	350	100	354	104	356	102	352	98	341	87	337
294	166	290	155	279	151	275	149	277	153	281	164	292	168
316	108	320	119	331	123	335	125	333	121	329	110	318	106
378	82	374	71	363	67	359	65	361	69	365	80	376	84
400	24	404	35	415	39	419	41	417	37	413	26	402	22
420	40	416	29	405	25	401	23	403	27	407	38	418	42
358	66	362	77	373	81	377	83	375	79	371	68	360	64
336	124	332	113	321	109	317	107	319	111	323	122	334	126
274	150	278	161	289	165	293	167	291	163	287	152	276	148
105	355	101	344	90	340	86	338	88	342	92	353	103	357
43	381	47	392	58	396	62	398	60	394	56	383	45	379
21	439	17	428	6	424	2	422	4	426	8	437	19	441

n = 16

1	244	6	247	9	252	14	255	15	254	12	249	7	246	4	241
64	205	59	202	56	197	51	194	50	195	53	200	58	203	61	208
81	164	86	167	89	172	94	175	95	174	92	169	87	166	84	161
112	157	107	154	104	149	99	146	98	147	101	152	106	155	109	160
129	116	134	119	137	124	142	127	143	126	140	121	135	118	132	113
192	77	187	74	184	69	179	66	178	67	181	72	186	75	189	80
209	36	214	39	217	44	222	47	223	46	220	41	215	38	212	33
240	29	235	26	232	21	227	18	226	19	229	24	234	27	237	32
225	20	230	23	233	28	238	31	239	30	236	25	231	22	228	17
224	45	219	42	216	37	211	34	210	35	213	40	218	43	221	48
177	68	182	71	185	76	190	79	191	78	188	73	183	70	180	65
144	125	139	122	136	117	131	114	130	115	133	120	138	123	141	128
97	148	102	151	105	156	110	159	111	158	108	153	103	150	100	145
96	173	91	170	88	165	83	162	82	163	85	168	90	171	93	176
49	196	54	199	57	204	62	207	63	206	60	201	55	198	52	193
16	253	11	250	8	245	3	242	2	243	5	248	10	251	13	256

***n* = 20**

1	383	7	388	9	390	15	396	17	399	19	397	16	395	10	389	8	387	3	381
60	358	54	353	52	351	46	345	44	342	42	344	45	346	51	352	53	354	58	360
121	263	127	268	129	270	135	276	137	279	139	277	136	275	130	269	128	267	123	261
160	258	154	253	152	251	146	245	144	242	142	244	145	246	151	252	153	254	158	260
161	223	167	228	169	230	175	236	177	239	179	237	176	235	170	229	168	227	163	221
200	218	194	213	192	211	186	205	184	202	182	204	185	206	191	212	193	214	198	220
281	103	287	108	289	110	295	116	297	119	299	117	296	115	290	109	288	107	283	101
320	98	314	93	312	91	306	85	304	82	302	84	305	86	311	92	313	94	318	100
321	63	327	68	329	70	335	76	337	79	339	77	336	75	330	69	328	67	323	61
380	38	374	33	372	31	366	25	364	22	362	24	365	26	371	32	373	34	378	40
361	23	367	28	369	30	375	36	377	39	379	37	376	35	370	29	368	27	363	21
340	78	334	73	332	71	326	65	324	62	322	64	325	66	331	72	333	74	338	80
301	83	307	88	309	90	315	96	317	99	319	97	316	95	310	89	308	87	303	81
300	118	294	113	292	111	286	105	284	102	282	104	285	106	291	112	293	114	298	120
181	203	187	208	189	210	195	216	197	219	199	217	196	215	190	209	188	207	183	201
180	238	174	233	172	231	166	225	164	222	162	224	165	226	171	232	173	234	178	240
141	243	147	248	149	250	155	256	157	259	159	257	156	255	150	249	148	247	143	241
140	278	134	273	132	271	126	265	124	262	122	264	125	266	131	272	133	274	138	280
41	343	47	348	49	350	55	356	57	359	59	357	56	355	50	349	48	347	43	341
20	398	14	393	12	391	6	385	4	382	2	384	5	386	11	392	13	394	18	400

***n* = 24**

1	556	6	559	9	564	14	567	17	572	22	575	23	574	20	569	15	566	12	561	7	558	4	553
96	501	91	498	88	493	83	490	80	485	75	482	74	483	77	488	82	491	85	496	90	499	93	504
121	436	126	439	129	444	134	447	137	452	142	455	143	454	140	449	135	446	132	441	127	438	124	433
168	429	163	426	160	421	155	418	152	413	147	410	146	411	149	416	154	419	157	424	162	427	165	432
193	364	198	367	201	372	206	375	209	380	214	383	215	382	212	377	207	374	204	369	199	366	196	361
288	309	283	306	280	301	275	298	272	293	267	290	266	291	269	296	274	299	277	304	282	307	285	312
313	244	318	247	321	252	326	255	329	260	334	263	335	262	332	257	327	254	324	249	319	246	316	241
360	237	355	234	352	229	347	226	344	221	339	218	338	219	341	224	346	227	349	232	354	235	357	240
385	172	390	175	393	180	398	183	401	188	406	191	407	190	404	185	399	182	396	177	391	174	388	169
480	117	475	114	472	109	467	106	464	101	459	98	458	99	461	104	466	107	469	112	474	115	477	120
505	52	510	55	513	60	518	63	521	68	526	71	527	70	524	65	519	62	516	57	511	54	508	49
552	45	547	42	544	37	539	34	536	29	531	26	530	27	533	32	538	35	541	40	546	43	549	48
529	28	534	31	537	36	542	39	545	44	550	47	551	46	548	41	543	38	540	33	535	30	532	25
528	69	523	66	520	61	515	58	512	53	507	50	506	51	509	56	514	59	517	64	522	67	525	72
457	100	462	103	465	108	470	111	473	116	478	119	479	118	476	113	471	110	468	105	463	102	460	97
408	189	403	186	400	181	395	178	392	173	387	170	386	171	389	176	394	179	397	184	402	187	405	192
337	220	342	223	345	228	350	231	353	236	358	239	359	238	356	233	351	230	348	225	343	222	340	217
336	261	331	258	328	253	323	250	320	245	315	242	314	243	317	248	322	251	325	256	330	259	333	264
265	292	270	295	273	300	278	303	281	308	286	311	287	310	284	305	279	302	276	297	271	294	268	289
216	381	211	378	208	373	203	370	200	365	195	362	194	363	197	368	202	371	205	376	210	379	213	384
145	412	150	415	153	420	158	423	161	428	166	431	167	430	164	425	159	422	156	417	151	414	148	409
144	453	139	450	136	445	131	442	128	437	123	434	122	435	125	440	130	443	133	448	138	451	141	456
73	484	78	487	81	492	86	495	89	500	94	503	95	502	92	497	87	494	84	489	79	486	76	481
24	573	19	570	16	565	11	562	8	557	3	554	2	555	5	560	10	563	13	568	18	571	21	576