С.Л. Василенко

Аналитика и гармония магических квадратов

Только пройдя трудный путь, можно найти легкий метод. – Г. Александров

Волшебные или магические квадраты (МК) известны уже не одно тысячелетие.

Свое название они получили из-за удивительных аддитивных свойств, и издавна почитаются разными народностями.

От этих форм всегда веяло некой тайной, силой и особой привлекательностью.

В условиях отсутствия компьютеров и ограниченного пространства доступных числовых конструкций, магические квадраты десятки веков приводили людей в неописуемый, доходящий до экзальтации восторг, когда они как чуду внимали совершенству незатейливых суммирующих закономерностей.

Сегодня этим уже никого не удивишь. Человек научился строить МК самой разной природы и порядка. И то, что раньше казалось таинством, сегодня представляется ремеслом.

Составление МК превратилось в своеобразное решение числовых кроссвордов, а само словосочетание «магический квадрат» стало научным математическим термином и составляющей комбинаторного анализа.

Многие посвятили лучшие часы своего творчества на то, чтобы как музыку выписывать все новые и новые конфигурации "магических признаков", которым, как потом стало очевидным, нет ни конца, ни края.

Оказалось, что числа могут быть организованы и в другие аналитико-геометрические модели с интересными свойствами [1]: треугольники, звезды, круги, шары и т.п.

Они также безграничны, как и числа в своем невероятном марафоне от нуля до воображаемого финиша, имя которому "пресловутая бесконечность". Никто в мире толком и не знает что это такое. Но самое интересное в этой ситуации – другое: практически ни у кого эти слова не вызывают чувства душевного дискомфорта.

Бесконечность? – Пусть будет бесконечность.

Очень даже удобная точка зрения и подходящий принцип, которые не требуют особых усилий мозговых клеток. Достаточно только принять это должным как догму или на веру.

С развитием вычислительной техники исследования МК в последние десятилетия приобрели второе дыхание. Вполне объяснимо, что наибольшие успехи в развитии теории и практики МК были достигнуты в Европе, США и Японии.

В начале 21 века образовалась достаточно развитая сеть Интернет-ресурсов. Среди них можно выделить сайты МК [2–6], а также описание более сложных фигур, таких как кубы, тессеракты [7] – четырехмерный аналог МК [8–10] и др.

Кроме того, в работе [8] представлена обширная англоязычная библиография, в [9] – вебсайты по квадратам, кубам и гиперкубам[1]. Развивается аналитическая подоснова.

В частности, получило развитие [11] применение теории графов с использованием базы Гильберта для создания целочисленных точек, в том числе на примере известных МК Франклина. Русскоязычная литература, посвященная МК, на этом фоне выглядит менее представительно. Среди исследований можно выделить работы М. Постникова [12], Ю. Чебракова [13, 14], Н. Макаровой [15, 16], Г. Александрова [17–21] и др.

Вполне естественно, что со временем и эти ресурсы покажутся "детской забавой" на фоне многоплановых обобщений в данной сфере.

Не исключено, что и сакраментальный вопрос: "А что они (МК) дают?" – найдет свое логическое продолжение в виде новых теоретических и прикладных разработок.

---

[1] http://homepage2.nifty.com/googol/magcube/en/links.htm.

Пока же «ценность теории построения магических квадратов определяется не только возможностью ее практического использования, для чего именно она была разработана, но также ее способностью воспитывать наш ум, доставлять ему питание, поддерживающее его жизнь, отыскивать новые истины и выяснять их назначение без помощи извне.

С этой точки зрения изучение свойств уже построенных магических квадратов и многоугольников, не требуя сравнительно глубоких знаний, представляют собой превосходную умственную гимнастику, развивающую способность понимать идеи размещения, сочетания, симметрии, классификации, сообщения» [22].

Представляется, что открытие самых увлекательных и необычных закономерностей чисел еще впереди. И в этом контексте МК вполне могут оказать действенную помощь.

Так что совершенствование методов синтеза и анализа МК – не только "пища для ума", но и вполне реальное перспективное направление развития в теории чисел.

Однако оставляя за собой исторически сложившийся и принятый по достоинству термин, магия таблиц уходит на второй план, уступая место трезвым арифметическим расчетам. И одним из главных аспектов здесь становится поиск и совершенствование аналитических методов, позволяющих исследовать МК любой сложности и конфигурации.

Но все ли числа в своем беге к бесконечности одинаково красивы и элегантны?

Всем ли им суждено в равной степени отвечать тем или иным особенностям?

Или все же это удел избранных? – И большей частью, зависит от человека. Поскольку именно люди дают им названия, наделяют характеристиками, возводят на пьедесталы и т.п. Иные просто замалчивают, а другие восхваляют.

Почему-то никому в голову не приходит считать, например, число 34 происками злых сил или кознями фантасмагории на том основании, что оно является удивительной константой "дьявольского магического квадрата" 4×4, слившего воедино сразу несколько десятков изумительно-завораживающих числовых тождеств.

Трудно удержаться от соблазна, чтобы не привести этот шедевр человеческой мысли, которому сродни такие вехи как изобретение часов, колеса, элементов письменности и т.п.

***Разминка. Магический квадрат* 4×4.**

Самый простое построение МК размером 4×4 содержит три мини-этапа (рис. 1):

1. Последовательная нумерация ячеек таблицы.
2. Выделение в ней двух главных диагоналей (зеленый цвет).
3. Две пары симметричного обмена между оставшимися ячейками относительно центра.

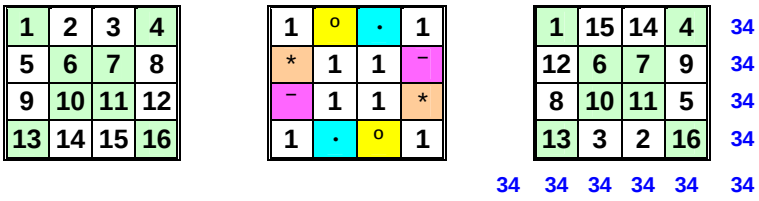


Рис. 1. Синтез ассоциативного магического квадрата 4×4

Подобная схема построения называется также методом Раус-Болла [12, гл. 4; 15, с. 88].

Нетрудно заметить, что синтезирующий алгоритм можно охарактеризовать и несколько иной формой заполнения клеток:

– сначала числа от 1 до 16 последовательно записываются по закрашенным клеткам слева направо и построчно вниз (от левого верхнего угла);

– затем эти же числа последовательно записываются по не закрашенным клеткам справа налево и построчно вверх (от нижнего правого угла).

Ниже будет показано, что такой способ универсален для квадратов порядка $4k$.

Данный объект очень удобен для анализа из-за своей простоты и наглядности.

Он до сих пор не перестает удивлять своими необыкновенными свойствами. Прежде всего, это касается самых неожиданных проявлений магической константы $4\cdot(4^2+1)/2 = 34$.

Одинаковая сумма получается одновременно по многим направлениям (позициям):

– в 4-х столбцах, 4-х строчках и главных диагоналях (основное условие МК);

– в любом из возможных девяти квадратов 2×2, находящихся внутри таблицы;

– в угловых клетках МК: 1+4+13+16 = 34;

– в угловых ячейках любого из четырех квадратов размером 3×3;

– на противоположных сторонах двух центральных прямоугольников 2×4, а именно: 15+14+3+2 = 12+8+9+5 = 34;

– в угловых ячейках двух прямоугольников, расположенных под углом 45^o, 14+9+8+3 = 12+15+2+5 = 34.

Что-либо еще разумно-приемлемое (нехаотическое) для проверки, просто в голову больше не приходит. Кажется, охватили буквально все: рядки и столбики, всевозможные варианты мини-квадратиков, разнообразные диагонали и симметрии.

И везде одна и та же сумма чисел.

Но на этом необычные закономерности не заканчиваются.

Так, в каждом конкретном МК "магическая" сумма имеет характерное деление:

– в любой строке есть пара соседних чисел с одинаковой суммой (у нас 16 и 18);

– в любом столбце есть пара соседних чисел с одинаковой суммой (у нас 13 и 21).

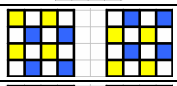
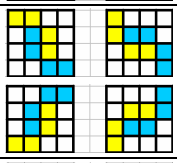
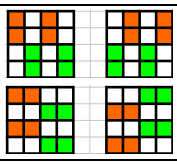
Однако и это не предел. Кульминацией является наличие симметрично-квадратичных свойств, связанных с возведением чисел в квадрат (табл. 1)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 34$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = c\,.$$

Таблица 1

Квадратичные симметрии МК размером 4×4

a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	b_4	c	Макет	Месторасположение ячеек
1	15	14	4	13	3	2	16	438		Крайние и средние строки
12	6	7	9	8	10	11	5	310		
1	12	8	13	4	9	5	16	378		Крайние и средние столбцы
15	6	10	3	14	7	11	2	370		
1	15	12	6	11	5	2	16	406		Угловые квадраты 2×2
14	4	7	9	8	10	13	3	342		
1	14	8	11	6	9	3	16	382		Угловые ячейки квадратов 3×3
12	7	13	2	15	4	10	5	366		
1	15	7	11	16	2	10	6	396		"Скошенные углы"
1	12	10	11	16	5	7	6	366		
4	14	6	10	13	3	11	7	348		
4	9	11	10	13	8	6	7	318		
1	12	14	7	10	3	5	16	390		Угловые ячейки прямоугольников 2×3
15	6	4	9	8	13	11	2	358		
1	15	8	10	7	9	2	16	390		
12	6	13	3	14	4	11	5	358		

То есть, в двух определенным образом расположенных группах по 4 ячейки в каждой, равны между не только суммы чисел, но и суммы их квадратов.

Кроме того, одновременно равны суммы квадратов и кубов чисел в угловых ячейках двух квадратов, расположенных под углом $\sim 30^{o}$ (обход клеток шахматным конем):

$$15^2 + 8^2 + 2^2 + 9^2 = 14^2 + 12^2 + 3^2 + 5^2 = 374 = 11\times 34;$$

$$15^3 + 8^3 + 2^3 + 9^3 = 14^3 + 12^3 + 3^3 + 5^3 = 4624 = 136\times 34.$$

Трудно себе представить, какие мысли рождались и кружились фейерверком в головах наших предков, разглядывающих и анализирующих подобные вещи.

Не случайно за подобными квадратами закрепилось название магических, а их отдельных разновидностей – дьявольских.

Магические квадраты были известны еще в древнем Китае, и считалось, что они могут обладать волшебными свойствами [23].

Это не легкая забава или бессодержательное развлечение.

Подобными числовыми компактами и изучением их свойств довольно серьезно занимался еще великий математик всех времен и народов Л. Эйлер [24].

Для построения МК он предложил [25] использовать представление целых чисел от 0 до n^2-1 в виде сумм $a{\cdot}n + b$, где $a,b = \overline{0,\, n-1}$.

Напомним, что таблица размера $n\times n$, заполненная натуральными числами от 1 до n, (или от 0 до $n-1$) называется латинским квадратом, если в каждой строке и в каждом столбце находится перестановка этих чисел.

Если $[a_{ij}]$ и $[b_{ij}]$ – два латинских квадрата $n\times n$, заполненных числами от 0 до $n-1$, для которых все n^2 пары (a_{ij}, b_{ij}) различны (условие ортогональности), то в квадратной таблице $[na_{ij} + b_{ij}]$ суммы чисел, стоящих в любой строке и в любом столбце, равны одному и тому же числу $n(n^2-1)/2$.

Для квадратов размером 3×3, 4×4, 5×5 Эйлер показал, что условие равенства сумм диагональных суммам по строкам и столбцам при такой конструкции записывается в виде линейных уравнений, выполнение которых можно обеспечить за счет нового обозначения элементов [25].

Обобщенным латинским квадратом порядка n называется квадратная таблица размером $n\times n$, среди n^2 элементов которой неодинаковыми будут только n штук, и любой из n различных элементов внутри этой таблицы встречается ровно n раз [15, с. 61].

Первое упоминание о латинских квадратах (в связи с решением карточных задач) относится к 1723 г.

Систематическое изучение латинских квадратов началось с работ Эйлера [24, 25].

В частности, исходный МК (см. рис. 1) можно получить через латинский квадрат

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Числа МК определяются по формуле, $n = 4$:

$$m_{i,j} = n\left(d_{i,j} - 1\right) + d_{j,i}, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Весьма представительный перечень англоязычной литературы по данной теме можно найти в обзорной статье [5].

Определения.

В процессе развития теории и практики магических форм (фигур) постепенно складывалась и понятийная база в этой сфере.

Вследствие достаточно большого многообразия и разновидностей построений, в последние годы предпринимаются определенные попытки унификации знаний с иерархическим формированием определений и смысловых конструкций, в том числе в виде энциклопедии [26].

Следующие определения можно считать уже классическими положениями.

Магический квадрат (МК) – квадратная таблица (матрица) размером $n \times n$, заполненная n^2 числами таким образом, что их суммы во всех строках, столбцах и на двух главных диагоналях одинаковы.

Нормальный (классический) МК содержит все натуральные числа от 1 до n^2.

Характерная сумма чисел в строках, столбцах и на диагоналях называется магической константой[2], которая в нормальном МК зависит только от n и определяется формулой

$$S = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{n\left(n^2+1\right)}{2}.$$

Значения этих констант составляют последовательность A006003 в OEIS[3].

В ячейках могут содержаться и другие числа, например, одни квадраты[4].

Неполный МК – если на главных диагоналях суммы не равны S.

Пандиагональный (panmagic[5]) или *дьявольский* МК – если с суммой S совпадают и все ломаные диагонали (в обоих направлениях), образующиеся при сворачивании квадрата в тор.

Ассоциативный (симметричный) МК – если сумма любых двух чисел, симметрично (наискось) расположенных относительно центра матрицы, равна $1 + n^2$.

Идеальный (ultramagic) МК [17] – одновременно пандиагональный и ассоциативный. То есть магическая константа S присутствует во всех ломаных диагоналях, а сумма любых двух чисел в центрально противолежащих ячейках равна $1+n^2$. Идеальные МК отличаются строгой симметрией рисунка относительно главных осей. Есть одна особенность: идеальных МК порядка $4k+2$ не существует. Это доказано строго математически.

Совершенный (most-perfect[6]) МК [15, с. 154] – пандиагональный квадрат порядка двойной четности $n = 4k$, в котором:

– в каждом блоке 2×2, а также в угловых ячейках квадрата сумма чисел равна $2(n^2 + 1)$;

– любая пара чисел, расположенных вдоль каждой диагонали друга от друга на расстоянии $n/2$, дает в сумме $(n^2 + 1)$ – свойство комплементарности чисел.

Нетрадиционный МК – содержит не строго натуральный ряд чисел.

Критерии проверки. Формальная проверка матриц на их принадлежность к МК достаточно простая и легко реализуется путем несложного подсчета сумм $\left(i,\ j = \overline{1,\ n}\right)$:

$\sum_j m_{i,j}$ – построчно; $\sum_j m_{j,i}$ – в столбцах; $\sum_j m_{j,j}$, $\sum_j m_{j,n+1-j}$ – на главных диагоналях.

---

[2] http://mathworld.wolfram.com/MagicConstant.html.

[3] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://www.research.att.com/~njas/sequences/ .

[4] http://www.multimagie.com/English/SquaresOfSquares.htm#CB4.

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Panmagic_square.

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Most-perfect_magic_square.

Если состыковать вместе два одинаковых квадрата $m' = \mathrm{stack}(m, m)$, то легко реализуется подсчет сумм и на ломаных диагоналях:

слева–направо – $\sum_j m'_{i,\ j+i-1}$ и справа–налево – $\sum_j m'_{j,\ n+i-j}$.

Исследование ассоциативности осуществляется по всем парам, симметричным относительно центра магического квадрата:

$$\left(m_{i,j} + m_{n+1-i,\ n+1-j}\right) = n^2 + 1, \qquad i = \overline{1,\ n/2}, \quad j = \overline{1,\ n}.$$

Проверка совершенности МК порядка двойной четности $n = 4k$ выполняется на предмет одинаковости сумм в угловых ячейках, а также во всех блоках 2×2:

$$m_{1,1} + m_{n,n} + m_{1,n} + m_{n,1} = m_{i,j} + m_{i,\ j+1} + m_{i+1,\ j} + m_{i+1,\ j+1}, \qquad i, j = \overline{1,\ n-1}.$$

Обычно производится проверка МК на пандиагональность.

В ряде исследовательских задач следует также не забывать о контроле сформированных таблиц на пропуск отдельных чисел или их возможное дублирование.

Делается это достаточно просто.

Данные сортируются в порядке возрастания или убывания, после чего сравниваются соседние числа. Шаг между ними в нормальном МК должен быть равен точно единице.

Формализация построений МК: аналитический подход.

В общем случае схемы построения МК делятся на разные категории в зависимости от того какие значения принимает порядок квадрата: нечетный $2k + 1$, удвоенный нечетный $4k + 2$, учетверенный нечетный $8k + 4$ или двойную четность $4k$.

Универсального метода построения всех квадратов нет, поэтому широко применяются различные схемы и алгоритмы.

Мы в основном ограничимся сравнительно широким множеством магических квадратов, которые допускают аналитические формы реализации.

Собственно в этом и состоит одна из наших главных задач.

Ассоциативный МК порядка двойной четности $n = 4k$.

Рассмотренный вначале квадрат размерностью 4×4 достаточно легко обобщается на любой квадрат $n\times n$ двойной четности $n = 2\cdot2k = 4k$.

Элементы таблица построчно нумеруются последовательно от 1 до n^2 (рис. 2, $n = 8$).

Затем она разбивается от центра на k квадратиков 2×2, "разорванных" по периметру.

Числа в квадратиках, расположенных на главных диагоналях и от них на расстоянии $4k$ остаются, в остальных ячейках они заменяются своими дополнениями до $d = n^2 + 1$.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

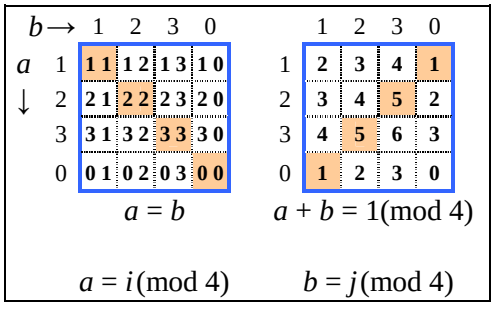


Рис. 2. Схема построения ассоциативного магического квадрата $4k\times4k$

С учетом формального отображения главных диагоналей частных квадратиков по модулю 4 получаем аналитическое представление исходного МК двойной четности $n = 4k$:

$$m_{i,j} = |\ j + n(i-1) - d[1 - \delta(a-b) - \delta(c)]\ |, \qquad i, j = \overline{1, n},$$

где $a = i \pmod 4$, $b = j \pmod 4$, $c = (a + b) \pmod 4 - 1$, $d = n^2 + 1$, $|\xi| \ge 0$;

$\delta(x) = \{\ 1,\ x = 0;\ \ 0,\ x \ne 0\ \}$ – единичная импульсная функция.

Данный МК не является идеальным, поскольку из общего количества $2n$ не выполняется условие сумм по n ломаным диагоналям. И это не потому, что нельзя построить "дьявольский" МК, а потому что таков исходный алгоритм, доставшийся "по наследству" от МК 4-го порядка, где мала свобода выбора (число степеней свободы).

В противовес этому и как бы в порядке компенсации мы имеем оригинальную явную форму задания МК, что выдается весомым аргументом и хорошей подосновой для проведения необходимых теоретических исследований, а также отвечает поставленной задаче аналитического представления (построения) МК.

МК нечетного порядка **$n = 2k + 1$.**

Алгоритм шахматного коня.

Для нечетных значений порядка, не кратных 3, то есть $n = 2k+1 \ne 0 \pmod 3$, идеальный МК эффективно и эффектно выстраивается по незамысловатой схеме [18]:

1. Справа от центральной ячейки помещается единица: $m_{r,r+1} = 1$, $r = (n+1)/2$.

2. Следующие по порядку числа ставятся вниз вместе с ходом шахматного коня. Но если там ячейка уже занята другим числом, то вместо хода конем, осуществляется переход по горизонтали вправо через одну ячейку.

3. При выходе за пределы поля (границы таблицы) перенос чисел осуществляется в ячейку, координаты которой определяются путем применения операции по модулю

$$i \to (i + n) \pmod n, \quad j \to (j + n) \pmod n.$$

```
mod'(r,n) := if(mod(r,n) = 0,n,mod(r,n))
(i  j  t  M_{n,n}) ← ( (n+1)/2  (n+1)/2 + 1  2  0 )
M_{i,j} ← 1
while  t ≤ n^2
    (a  b) ← ( mod'(i + z,n)  mod'(j + 1,n) )
    (a  b) ← (i  mod'(j + 2,n))  if  M_{a,b} > 0
    (M_{a,b}  t  i  j) ← (t  t + 1  a  b)
M
```

Рис. 3. Программа МК "Ход конем"

Такой простой алгоритм легко реализуется программно (рис. 3, $z = 2$).

Если размерность квадрата нечетна и не кратна трем $n \ne 0 \pmod 3$, то он получается идеальным: одновременно пандиагональным и ассоциативным. Кратность трем приводит к нарушению условий по некоторым ломаным диагоналям. Остальные суммы соблюдаются.

Особо отметим прекрасное сочетание комбинаторики и шахматного похода коня по необозримому полю, которое в пределе может быть сколь угодно большим, мыслимо выходящим даже за пределы Земли.

Эдакий "конь во Вселенной".

Хотя четко выраженные закономерности "покрытия поля" при произвольном значении n просматриваются не совсем очевидно. Это объясняется отсутствием строгой периодичности в моментах попадания коня на уже занятые ячейки, когда заполнить все числовое поле аналитико-формульным способом становится непростой задачей.

Да ее полное решение, наверно, не так уж и важно, поскольку с лихвой компенсируется простой процедурой обследования и расстановки чисел–вешек на квадратном поле.

Ради объективности заметим, что данный способ исследован методом машинного эксперимента и показал свою эффективность на обширном материале.

Однако мы не нашли в литературе формального подтверждения его сходимости для любого n (в смысле построения МК).

В данном случае речь идет не столько о самой возможности обхода поля конем, сколько о том, что в результате такого "путешествия" будут получаться идеальные МК.

Исходя из логики движения шахматного коня с перескоком на границах, все же удалось получить аналитическое решение данной задачи.

Формализация обхода поля МК шахматным конем получена с применением метода обратимого квадрата [15, с. 74] – квадратной матрицы x размерностью $n \times n$, последовательно заполненной натуральными числами от 1 до n^2 так, что полученный квадрат обладает свойством ассоциативности.

Соответствующие формулы для построения идеального МК $M = \{ m_{i,j} \}$ имеют вид:

$$m_{i+1,\ j+1} = n[(a + id + jv)\ (\mathrm{mod}'\ n) - 1] + (b + i(n - d) + jv)\ (\mathrm{mod}'\ n), \qquad (2)$$

где

$$(b,\ a) = (3k + 2 \pm d)\ (\mathrm{mod}\ n),$$

$$d = \frac{k + k(\mathrm{mod}\ 2) \cdot (2k + 1)}{2},$$

$$k = \frac{n - 1}{2}, \qquad v = k + 1, \qquad i,\ j = \overline{0,\ 2k}.$$

Функция $y(\mathrm{mod}'\ n)$ – взятие числа y по модулю n с той лишь разницей, что величина $(nk)\ (\mathrm{mod}'\ n) = n$, а не нулю, как для обычного сравнения по модулю.

Такая операция обеспечивает корректность решения на границах квадрата, чтобы не "выскакивать" в несуществующие нулевые ячейки.

Параметры a, b устанавливают начальные индексы ячейки обратимого квадрата (пронумерованного построчно последовательно от 1 до n^2), содержимое которой равно числу в левом углу магического квадрата.

Величина d определяет длину шага (наращивания индекса) при переходе между ячейками обратимого квадрата по вертикали.

Соответствующий шаг по горизонтали равен v.

Некоторые параметры представлены для обозрения в табл. 2.

Таблица 2

Параметры для аналитического синтеза идеальных МК в явном виде методом шахматного коня

n	k	v	d	a	b	$m_{1,1}$
5	2	3	1	5	4	24
7	3	4	5	5	7	35
11	5	6	8	2	5	16
13	6	7	3	12	9	152
17	8	9	4	7	3	105
19	9	10	14	3	8	46
23	11	12	17	15	21	343

Индексы обратимого квадрата x в каждой ячейке средней v-й строки одинаковы, поэтому их можно найти как $a = b = \left(k^2 + k\right) (\mathrm{mod}\, n)$, а расчеты элементов матрицы в формуле (2) соответственно выполнять для элементов $m_{(i+v)\,(\mathrm{mod}'\, n),\ j+1}$.

Имея в наличии аналитический (а не алгоритмически-программный способ) задания МК в явном формульном виде, теперь при желании можно доказывать существование данной формы идеального МК для произвольного нечетного порядка, не кратного трем.

Оставим данную проблему для последующих исследований.

А пока для иллюстрации изложенного подхода ограничимся представлением наиболее простых МК 5, 7 и 13 порядков, а также преобразованного обратимого квадрата x.

24	12	5	18	6
3	16	9	22	15
7	25	13	1	19
11	4	17	10	23
20	8	21	14	2

x_{54}	x_{32}	x_{15}	x_{43}	x_{21}
x_{13}	x_{41}	x_{24}	x_{52}	x_{35}
x_{22}	x_{55}	x_{33}	x_{11}	x_{44}
x_{31}	x_{14}	x_{42}	x_{25}	x_{53}
x_{45}	x_{23}	x_{51}	x_{34}	x_{12}

35	11	36	19	44	27	3
16	48	24	7	32	8	40
4	29	12	37	20	45	28
41	17	49	25	1	33	9
22	5	30	13	38	21	46
10	42	18	43	26	2	34
47	23	6	31	14	39	15

16	88	28	89	40	101	52	113	64	4	76
107	47	119	59	10	71	22	83	23	95	35
77	17	78	29	90	41	102	53	114	65	5
36	108	48	120	60	11	72	12	84	24	96
6	67	18	79	30	91	42	103	54	115	66
97	37	109	49	121	61	1	73	13	85	25
56	7	68	19	80	31	92	43	104	55	116
26	98	38	110	50	111	62	2	74	14	86
117	57	8	69	20	81	32	93	44	105	45
87	27	99	39	100	51	112	63	3	75	15
46	118	58	9	70	21	82	33	94	34	106

Метод "длинношеего коня".

Вышеописанный способ формирования МК не одинок.

Весьма похожая схема обеспечивается аналогичным "походом шахматного слона" по диагоналям [27, с. 17], называемого также методом террас [13, 28] или Баше [12, с. 37].

Алгоритм можно воспроизвести той же программой (см. рис. 3), только с параметром $z = 1$ или $z = n–1$.

Подобный обход описан в работе [12, с. 28–31] как индийский метод с начальной точкой $[i,\ j] = [1,\ (n+1)/2]$ и периодическим переходом по вертикали вниз на одну ячейку, то есть $[a,\ b] = [\mathrm{mod}'(i+1,\ n),\ j]$.

Но здесь уже независимо от величины нечетного порядка n во всех случаях происходит нарушению условий идеальности по ломаным диагоналям.

Нас заинтересовал этот вопрос.

И если с порядком $n = 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ еще боле менее ясно, то почему все-таки "хождение" по диагоналям приводит к такому результату?

И что произойдет при "удлинении коня" или его прыжков более двух клеток?

Результаты экспериментов с варьированием переменных n и z многое прояснили.

В итоге родился алгоритм, который мы назвали методом "длинношеего коня".

Более правильно было бы связать это с высотой или длиной прыжка.

Но очень уж нам нравится уникальнейшее слово в русском языке с тремя подряд идущим буквами "е": длинношеее <существо>.

И особенно его выговаривать на точность произношения.

Как часто и происходит, все оказалось достаточно просто и обусловлено кратностью прохождения конем квадратного поля со стороной n (в данном случае по вертикали).

Разложим натуральное число n на простые сомножители $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$.

Если высота прыжка (шеи) коня z кратна любому из чисел p_r, $r=\overline{1,m}$, то квадрат в полном объеме не строится, а заполняются только его отдельные строки.

Когда число z попадает на прилегающие точки от этих характерных мест, МК не сходится по ломаным диагоналям.

Во всех других случаях получается красивый идеальный МК, объединяющий в себе чудесные комбинаторные свойства в сочетании с разложением чисел на сомножители.

Теперь становится понятным, почему для порядка $n=0 \pmod 3$ не удается построить идеальный МК указанным способом: если от каждого числа, кратного трем, отметить в обе стороны соседние точки натурального ряда, то мы тем самым охватим все целые числа[7].

Иначе говоря, любое целое число либо кратно 3, либо с таковым сопрягается!

А вот для простых чисел n идеальные МК разных типов свободно формируются с произвольной "шеей" z, не равной 1 или $n-1$.

Рассмотрим пример.

Пусть $n = 5\cdot7\cdot17$. Тогда идеальный МК синтезируется для $z = 2, 3, 12, 23, 32, \ldots$

Это хорошо видно из следующей строки-таблицы

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	···

Красным цветом помечены числа z, кратные $p_r \in (5, 7, 17)$, для которых наибольший общий делитель $\gcd(n, z) > 1$, желтым – рядом стоящие с ними числа, зеленым – "свободные" числа, позволяющие сформировать идеальные МК методом "длинношеего коня".

Отметим также, что при $z = t$ и $z = n - t$ магические квадраты изоморфны с точностью до поворота вокруг горизонтальной оси симметрии.

Для составных чисел n по каждому из его простых множителей p_r, $r=\overline{1,m}$ должно соблюдаться "правило двух":

$$2 \le z \pmod{p_r} \le p_r - 2.$$

Например, для $n = 49 = 7^2$ шея может принимать такие значения: $2 \div 5,\ 9 \div 12,\ 16 \div 19$ и др.

Аналитический способ задания длинношеего коня аналогичен формуле (2).

Только длина целочисленного шага d (наращивания индекса по вертикали) определяется из диофантового уравнения или сравнения по модулю

$$zd - k = 0 \pmod n,$$

где n – порядок МК, $k = (n - 1)/2$, z – "шея коня".

Сравнимость по модулю в данном уравнении формально не изменится [29, с. 44], если обе части сравнения и модуль разделить на z, то есть $d - \frac{k}{z} = 0 \left(\bmod \frac{n}{z} \right)$.

Отсюда следует очевидное численное решение данного уравнения: устанавливается исходное значение $d = \frac{k}{z}$, которое затем последовательно увеличивается на величину $\frac{n}{z}$, пока параметр d не станет целым числом.

Ниже представлено несколько МК 11-го порядка с разным "удлинением коня" z.

Довольно гармоничным представляется распределение последнего знака в числах, отмеченных разными цветами при $z = k = 5$.

---

[7] Выявленные закономерности настолько изящны и лаконичны, что мы нисколько не удивимся, если они уже были когда-то описаны в литературе. В любом случае нас радует возможность побыть сопричастными к поднятию завесы с уникальных свойств обычных натуральных чисел.

$z = 2$

16	88	28	89	40	101	52	113	64	4	76
107	47	119	59	10	71	22	83	23	95	35
77	17	78	29	90	41	102	53	114	65	5
36	108	48	120	60	11	72	12	84	24	96
6	67	18	79	30	91	42	103	54	115	66
97	37	109	49	121	61	1	73	13	85	25
56	7	68	19	80	31	92	43	104	55	116
26	98	38	110	50	111	62	2	74	14	86
117	57	8	69	20	81	32	93	44	105	45
87	27	99	39	100	51	112	63	3	75	15
46	118	58	9	70	21	82	33	94	34	106

$z = 3$

87	27	99	39	100	51	112	63	3	75	15
56	7	68	19	80	31	92	43	104	55	116
36	108	48	120	60	11	72	12	84	24	96
16	88	28	89	40	101	52	113	64	4	76
117	57	8	69	20	81	32	93	44	105	45
97	37	109	49	121	61	1	73	13	85	25
77	17	78	29	90	41	102	53	114	65	5
46	118	58	9	70	21	82	33	94	34	106
26	98	38	110	50	111	62	2	74	14	86
6	67	18	79	30	91	42	103	54	115	66
107	47	119	59	10	71	22	83	23	95	35

$z = 4$

117	57	8	69	20	81	32	93	44	105	45
36	108	48	120	60	11	72	12	84	24	96
87	27	99	39	100	51	112	63	3	75	15
6	67	18	79	30	91	42	103	54	115	66
46	118	58	9	70	21	82	33	94	34	106
97	37	109	49	121	61	1	73	13	85	25
16	88	28	89	40	101	52	113	64	4	76
56	7	68	19	80	31	92	43	104	55	116
107	47	119	59	10	71	22	83	23	95	35
26	98	38	110	50	111	62	2	74	14	86
77	17	78	29	90	41	102	53	114	65	5

$z = 5$

36	108	48	120	60	11	72	12	84	24	96
46	118	58	9	70	21	82	33	94	34	106
56	7	68	19	80	31	92	43	104	55	116
77	17	78	29	90	41	102	53	114	65	5
87	27	99	39	100	51	112	63	3	75	15
97	37	109	49	121	61	1	73	13	85	25
107	47	119	59	10	71	22	83	23	95	35
117	57	8	69	20	81	32	93	44	105	45
6	67	18	79	30	91	42	103	54	115	66
16	88	28	89	40	101	52	113	64	4	76
26	98	38	110	50	111	62	2	74	14	86

Аналитика квадратных рамок.

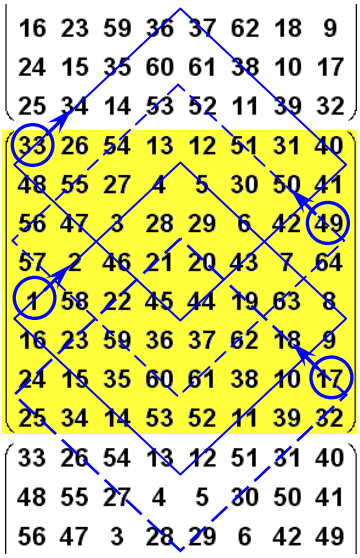


Рис. 4. Обход ячеек МК по методу квадратных рамок

Данный метод описан в работе [15, с. 83–87].

Он несколько похож на метод террас, хотя и отличается от него более простой симметричной визуализацией (рис. 4), что одновременно приводит к усложнению реализации алгоритма.

Можно, конечно, для этой схемы составить машинную программу. Но это не отвечает целям наших исследований.

Поэтому решение задачи представим в полученном нами аналитическом виде:

$$m_{i',j} = (i-1)n + y_i,$$

где $i' = \left(i + n + (-1)^i f_j\right) (\mathrm{mod}'\, n)$, $f_j = |n' - j| - 1(n' - j)$, $n' = n/2 + 1$, $i, j = \overline{1, n}$; $1(x) = \{0,\ x \le 0;\ 1,\ x > 0\}$ – несимметричная единичная функция;

$$y_i = \begin{cases} 1 - j + 2ns_i, & s_i < 2 \\ j - (-1)^{s_i} n, & s_i \ge 2 \end{cases}; \quad s_i = i \ (\mathrm{mod}\ 4).$$

Функция $y(\mathrm{mod}'\, n)$ – модифицированная функция взятия числа y по модулю n.

Она отличается равенством $(nk)(\mathrm{mod}'\, n) = n$ вместо нуля как для обычного модуля, что обеспечивает решение на границах (периметре) квадрата.

Если формулу для i' чуть изменить $i' = \left(i + n/2 + (-1)^i f_j \right) (\mathrm{mod}' n)$, то верхняя и нижняя половинки квадрата меняются местами, а число 1 занимает верхний левый угол.

На наш взгляд, получилась довольно симпатичная запись решения в явном виде, что одновременно способствует простой программной реализации на ЭВМ и выполнению тех или иных доказательств обобщающих утверждений.

Ромб.

Другой простой способ построения МК для нечетного порядка $n = 2k + 1$ заключается в последовательном заполнении ячеек (клеток) $m_{i,j}$ с координатами (i, j) числами, определяемыми аналитически (в явном виде).

Например, приведенная в статье [28] формула подобного вида не отвечает поставленной задаче хотя бы потому, что она приводит к отрицательным числам.

Исследование схемы построения МК по методу ступенчатого ромба позволило выйти на приемлемый результат общего вида, справедливый для любого нечетного порядка

$$m_{i,j} = 1 + an + b \quad \text{или} \quad m_{i,j} = 1 + a + bn,$$

$$a = \left(i - j + \frac{3n-1}{2} \right) (\mathrm{mod}\ n), \quad b = \left(i + j + \frac{n-3}{2} \right) (\mathrm{mod}\ n).$$

Применение этих формул позволяет максимально формализовать процедуру построения МК, сведя к обычному вычислению квадратной матрицы.

Может, кому становится немного грустно от потери элементов таинства, но магия здесь полностью отступает, освобождая место обычной продукции синтетического вида.

Сказка заканчивается. Волшебство остается в грёзах. А в силу вступают закономерности комбинаторики, алгоритмические схемы и аналитические зависимости.

Удивительно скорее другое, что такие незамысловатые формулы, основанные на числовой операции по модулю n, способны генерировать ассоциативный МК любого сколь угодно большого порядка.

И пусть данная схема работает только для нечетных значений n.

Такой порядок всего лишь свидетельствует о том, что для построений формально необходимо наличие центральной ячейки (например, 25 в табл. 3).

Таблица 3

Ассоциативные магические квадраты аналитического типа для нечетного порядка на примере $n = 7$

$1 + an + b$

32	38	44	1	14	20	26
40	46	3	9	15	28	34
48	5	11	17	23	29	42
7	13	19	25	31	37	43
8	21	27	33	39	45	2
16	22	35	41	47	4	10
24	30	36	49	6	12	18

$1 + a + bn$

26	20	14	1	44	38	32
34	28	15	9	3	46	40
42	29	23	17	11	5	48
43	37	31	25	19	13	7
2	45	39	33	27	21	8
10	4	47	41	35	22	16
18	12	6	49	36	30	24

Аналитико-формульная форма построения МК позволяет провести определенные математические доказательства, чем достигается формализованное повышение уровня достоверности получаемых результатов.

Приведем некоторые примеры теоретических обобщений.

Теорема 1. Для любого нечетного n будет ассоциативным магический квадрат

$$m_{i,j} = 1 + n\left[\left(i - j + \frac{3n-1}{2}\right) (\mathrm{mod}\ n)\right] + \left(i + j + \frac{n-3}{2}\right) (\mathrm{mod}\ n).$$

Доказательство. Фиксируя один из двух индексов (i, j) и изменяя другой из них от 1 до n, убеждаемся, что $\left(i - j + \frac{3n-1}{2}\right) (\mathrm{mod}\ n)$ и $\left(i + j + \frac{n-1}{2}\right) (\mathrm{mod}\ n)$ образуют n-мерный вектор, содержащий числа от 0 до $n-1$.

Тогда для любого k-го столбца или строки имеем

$$\sum\nolimits_i m_{i,k} = \sum\nolimits_j m_{k,j} = n + n\frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n\left(n^2-1\right)+2n}{2} = \frac{n\left(n^2+1\right)}{2} = S.$$

Вычисляем суммы чисел, лежащих на главных диагоналях матрицы:

$$\sum\nolimits_i m_{i,i} = \sum\nolimits_i \left[1 + n\left(i - i + \frac{3n-1}{2}\right) (\mathrm{mod}\, n) + \left(i + i + \frac{n-3}{2}\right) (\mathrm{mod}\, n)\right] =$$

$$= n + n\sum\nolimits_i \left(\frac{3n-1}{2}\right) (\mathrm{mod}\, n) + \sum\nolimits_i \left(2i + \frac{n-3}{2}\right) (\mathrm{mod}\, n) = n + n\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = S;$$

$$\sum\nolimits_i m_{n+1-i,\,i} = \sum\nolimits_i \left[1 + n\left(n + 1 - 2i + \frac{3n-1}{2}\right) (\mathrm{mod}\, n) + \left(n + 1 + \frac{n-3}{2}\right) (\mathrm{mod}\, n)\right] =$$

$$= n + n\sum\nolimits_i \left(-2i + \frac{5n-1}{2}\right) (\mathrm{mod}\, n) + \sum\nolimits_i \left(\frac{3n-1}{2}\right) (\mathrm{mod}\, n) = n + n\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = S.$$

То есть все столбы и строки, а также главные диагонали дают магическую константу S, значит, наша таблица – МК.

Проверяем сумму двух произвольных ячеек, зеркальных относительно центра:

$$m_{i,j} + m_{n+1-i,\,n+1-k} = 1 + n\left(i - j + \frac{3n-1}{2}\right) (\mathrm{mod}\ n) + \left(i + j + \frac{n-3}{2}\right) (\mathrm{mod}\ n) +$$

$$1 + n\left(j - i + \frac{3n-1}{2}\right) (\mathrm{mod}\ n) + \left(-i - j + \frac{5n+1}{2}\right) (\mathrm{mod}\ n) =$$

$$= 2 + n(n-1) + (n-1) = n^2 + 1.$$

То есть магический квадрат ассоциативен, что и требовалось доказать.

Можно сказать, что все необходимые свойства идеальности МК сконцентрировались вокруг центральной ячейки, равной $(n^2 + 1)/2$. Ее умножение на 2 дает нам ассоциативность, а n-кратное повторение воспроизводит магическую константу S.

При четных значениях $n = 2k$ подобной ячейки в МК просто нет, что приводит к определенным трудностям в построении таблиц с произвольными размерами.

И тем не менее…

Строго аналитические формы задания МК можно построить и для некоторых четных значений порядка.

Хотя квадрат не получается идеальным или совершенным, главное здесь другое – сама возможность представления МК в явном виде, что создает предпосылки для поиска иных решений.

Теорема 2. Для любого $n = 4k$, кратного четырем, магический квадрат

$$m_{i,j} = \left| j + (i-1)n - \left(n^2 - 1\right) \cdot \left(f_i + f_j\right) (\mathrm{mod}\ 2) \right| \text{ – ассоциативный,}$$

где $f_x = \lceil x/2 \rceil (\mathrm{mod}\ 2)$, $\lceil \xi \rceil$ – целая часть от ξ.

Функция f_x (для удобства записи аргумент приспущен) моделирует целочисленную периодическую последовательность с повторением набора двоичных чисел (0, 1, 1, 0).

Доказательство теоремы 2 немногим отличается от теоремы 1, поэтому не приводится.

Блочные МК больших размеров.

Данный подход называют также методом составных квадратов [15, с. 77].

Пусть мы имеем в распоряжении две уже готовые квадратные магические матрицы: A и B размерностью n_a и n_b соответственно.

На их основе можно составить две большие матрицы блочного типа:

- вхождение матрицы B в каждую ячейку A с весовым коэффициентом $a'_{ij} = a_{ij} - 1$;
- вхождение матрицы A в каждую ячейку B с весовым коэффициентом $b'_{ij} = b_{ij} - 1$.

В обоих случаях методом стыковки получаем $n_a n_b$-мерную квадратную матрицу блочного типа, состоящую из n_a^2 или n_b^2 блоков.

Понятно, что наименьший МК, который можно создать данным способом, является квадрат размерностью 9×9, образованный путем комбинации двух МК 3×3 [30].

Аналитика данного типа МК чрезвычайно проста и заключается в последовательно-блочном конструировании квадратных матриц (на примере $n_a = 4,\ n_b = 3$):

$$\left(\begin{array}{c|c|c} A + b'_{11} & A + b'_{12} & A + b'_{13} \\ \hline A + b'_{21} & A + b'_{22} & A + b'_{23} \\ \hline A + b'_{31} & A + b'_{32} & A + b'_{33} \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{c|c|c|c} B + a'_{11} & B + a'_{12} & B + a'_{13} & B + a'_{14} \\ \hline B + a'_{21} & B + a'_{22} & B + a'_{23} & B + a'_{24} \\ \hline B + a'_{31} & B + a'_{32} & B + a'_{33} & B + a'_{34} \\ \hline B + a'_{41} & B + a'_{42} & B + a'_{43} & B + a'_{44} \end{array}\right).$$

В зависимости от типа исходных матриц блочный МК может быть пандиагональным, ассоциативным и даже идеальным. В частности, две идеальные матрицы A и B формируют идеальный блочный МК.

В явной аналитической форме два блочных магических квадрата имеют вид:

$$m1_{ij} = A_{i\,(\mathrm{mod}'\,n_a),\ \left\lceil \frac{j-1}{n_b} \right\rceil + 1} + a^2 \left[B_{\left\lceil \frac{i-1}{n_a} \right\rceil + 1,\ j\,(\mathrm{mod}'\,n_b)} - 1 \right],$$

$$m2_{ij} = B_{i\,(\mathrm{mod}'\,n_b),\ \left\lceil \frac{j-1}{n_a} \right\rceil + 1} + b^2 \left[A_{\left\lceil \frac{i-1}{n_b} \right\rceil + 1,\ j\,(\mathrm{mod}'\,n_a)} - 1 \right],$$

где $i,\ j = \overline{1,\ n_a n_b}$, $\lceil \xi \rceil$ – целая часть от ξ.

Эти МК принципиально различны, хотя в своей формализованной записи отличаются исключительно взаимной перестановкой больших и маленьких букв a и b.

Для примера на основе двух идеальных квадратов

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 23 & 10 & 14 & 17 \\ 15 & 19 & 2 & 21 & 8 \\ 22 & 6 & 13 & 20 & 4 \\ 18 & 5 & 24 & 7 & 11 \\ 9 & 12 & 16 & 3 & 25 \end{pmatrix}$$

ниже представлен соответствующий идеальный магический квадрат блочного типа.

1	551	226	326	401	23	573	248	348	423	10	560	235	335	410	14	564	239	339	414	17	567	242	342	417
15	565	240	340	415	19	569	244	344	419	2	552	227	327	402	21	571	246	346	421	8	558	233	333	408
22	572	247	347	422	6	556	231	331	406	13	563	238	338	413	20	570	245	345	420	4	554	229	329	404
18	568	243	343	418	5	555	230	330	405	24	574	249	349	424	7	557	232	332	407	11	561	236	336	411
9	559	234	334	409	12	562	237	337	412	16	566	241	341	416	3	553	228	328	403	25	575	250	350	425
351	451	26	501	176	373	473	48	523	198	360	460	35	510	185	364	464	39	514	189	367	467	42	517	192
365	465	40	515	190	369	469	44	519	194	352	452	27	502	177	371	471	46	521	196	358	458	33	508	183
372	472	47	522	197	356	456	31	506	181	363	463	38	513	188	370	470	45	520	195	354	454	29	504	179
368	468	43	518	193	355	455	30	505	180	374	474	49	524	199	357	457	32	507	182	361	461	36	511	186
359	459	34	509	184	362	462	37	512	187	366	466	41	516	191	353	453	28	503	178	375	475	50	525	200
526	126	301	476	76	548	148	323	498	98	535	135	310	485	85	539	139	314	489	89	542	142	317	492	92
540	140	315	490	90	544	144	319	494	94	527	127	302	477	77	546	146	321	496	96	533	133	308	483	83
547	147	322	497	97	531	131	306	481	81	538	138	313	488	88	545	145	320	495	95	529	129	304	479	79
543	143	318	493	93	530	130	305	480	80	549	149	324	499	99	532	132	307	482	82	536	136	311	486	86
534	134	309	484	84	537	137	312	487	87	541	141	316	491	91	528	128	303	478	78	550	150	325	500	100
426	101	576	151	251	448	123	598	173	273	435	110	585	160	260	439	114	589	164	264	442	117	592	167	267
440	115	590	165	265	444	119	594	169	269	427	102	577	152	252	446	121	596	171	271	433	108	583	158	258
447	122	597	172	272	431	106	581	156	256	438	113	588	163	263	445	120	595	170	270	429	104	579	154	254
443	118	593	168	268	430	105	580	155	255	449	124	599	174	274	432	107	582	157	257	436	111	586	161	261
434	109	584	159	259	437	112	587	162	262	441	116	591	166	266	428	103	578	153	253	450	125	600	175	275
201	276	376	51	601	223	298	398	73	623	210	285	385	60	610	214	289	389	64	614	217	292	392	67	617
215	290	390	65	615	219	294	394	69	619	202	277	377	52	602	221	296	396	71	621	208	283	383	58	608
222	297	397	72	622	206	281	381	56	606	213	288	388	63	613	220	295	395	70	620	204	279	379	54	604
218	293	393	68	618	205	280	380	55	605	224	299	399	74	624	207	282	382	57	607	211	286	386	61	611
209	284	384	59	609	212	287	387	62	612	216	291	391	66	616	203	278	378	53	603	225	300	400	75	625

Цепи Александрова. Для построения идеальных МК изобретались различные подходы. Но среди них не было такого, который позволил бы рассчитывать идеальные МК любого конечного порядка с помощью несложной программы (алгоритма, схемы).

В определенной мере этот пробел восполнен при помощи так называемых цепей Александрова [17–21, 31].

Главное их достоинство – повышение уровня формализации в синтезе МК.

По своей сути, это весьма обстоятельное обобщение задачи.

Хотя нужно отметить, что сходимость метода в общем случае (для произвольных значений порядка) не доказана.

Но опыт работы показывает, что метод работает достаточно эффективно в обозримых интервалах значений переменных.

Он позволяет по четкому алгоритму находит идеальный МК заданного порядка n.

Структура МК при этом очень жесткая и не допускает получение разнообразных, но не тривиальных вариаций МК, за счет перестановок чисел в ячейках.

Сначала строится "цепь Александрова" в виде одномерной последовательности целых положительных чисел. Порядок стыковки отдельных звеньев в единую цепь можно найти в следующих работах:

$n = 2k+1 = 3, 5, 7 \ldots$ – http://gromov7043.narod.ru/chain_aleks.html;
$n = 8k+4 = 12, 20, 28 \ldots$ – http://renuar911.narod.ru/IMQ_4k.html;
$n = 8k = 16, 24, 32 \ldots$ – http://renuar911.narod.ru/IMQ_8k.html.

1	139	81	114	104	51	61	79	93	42	32	63
28	66	12	142	77	115	100	54	72	82	89	43
90	44	27	61	7	141	78	116	99	49	67	81
70	77	91	40	30	72	10	137	79	112	102	60
97	55	69	78	92	39	25	67	9	138	80	111
76	114	108	58	65	79	88	42	36	70	5	139
6	140	75	109	103	57	66	80	87	37	31	69
34	65	7	136	78	120	106	53	67	76	90	48
85	43	33	66	8	135	73	115	105	54	68	75
64	78	96	46	29	67	4	138	84	118	101	55
102	56	63	73	91	45	30	68	3	133	79	117
82	113	103	52	66	84	94	41	31	64	6	144

Из образованной цепи по определенным правилам формируются два латинских квадрата A и B. Их объединение по формуле $n(A-1)+B$ приводит к идеальному МК.

Текстовые части машинных программ у Г. Александрова, к сожалению, представлены с трудноуловимыми ошибками, что не позволяет насладиться в полной мере действительно изысканным алгоритмом построения идеальных магических квадратов любой размерности (за исключением $4k+2$). Поэтому для желающих попробовать все самим приводим полные тексты отредактированных программ в распространенной математической среде MathCad (см. приложение).

Аналитика МК двойной четности $\underline{n = 8k}$.

Идеальный МК образуется путем сложения двух латинских квадратов, образованных на основе полученной числовой цепи с использованием процедуры на основе ходов шахматного коня [31]. Действительно, зная цепи Александрова, можно составить два латинских квадрата, объединение которых и дает идеальный МК. Как теперь оказывается, идеальный МК можно создавать даже легче широко распространенных МК!

Процедура такого построения нами полностью формализована.

Сначала в явном виде формируется числовая лента (цепь) как n-мерный вектор p:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_{r+1} \\ p_{r+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ n-1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_{2+i} \\ p_{r+1-i} \\ p_{r+2+i} \\ p_{6k+1+i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r+2i \\ r+2i-1 \\ r-2i+2 \\ 2i+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} r = 4k, \\ i = \overline{1,\, 2k-1}. \end{matrix}$$

Например, для $k = 3$, $n = 24$ находим цепь:

1	24	14	16	18	20	22	21	19	17	15	13	23	2	12	10	8	6	4	3	5	7	9	11

Суммирование латинских квадратов осуществляется по формуле:

$$m_{i,j} = n\left[p_{(h+j-2i)(\mathrm{mod}\ n)} - 1\right] + p_{(h+2j-3i)(\mathrm{mod}\ n)},$$

где $h = 3n+2$. Тройка здесь используется для того, чтобы операция взятия модуля не приводила к отрицательным числам.

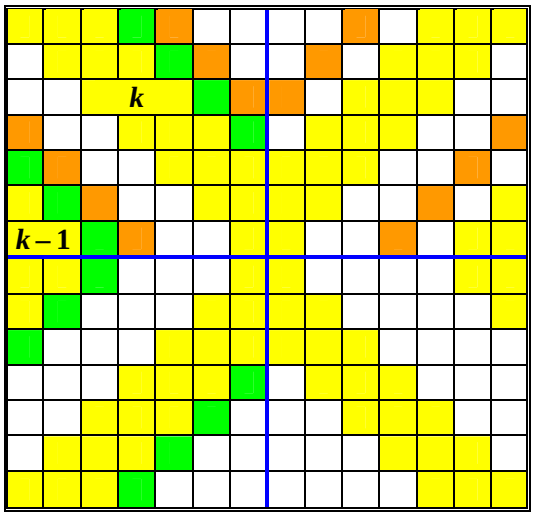
С применением данных соотношений каждое конкретное число МК теперь можно определять как рекуррентно, так и в явном (формульном виде).

Одна незадача: как ни крути, а цепь все-таки сложная.

Кроме того, она жестко структурирована, и в ней отсутствует мобильность или возможность генерирования других модификаций МК.

МК одинарной четности $n = 4k + 2 = 2(2k + 1)$. Это наиболее трудные для построения магические квадраты. Их порядок четный, но не делится на 4. Поэтому четно-нечетный рисунок матрицы данного размера никак не получается симметричным.

Например, в работе [21] предложена интересная схема заполнения. Сначала строится трафарет: от желтого цвета – к зеленому и далее к красному (рис. 5). Затем он регулярным способом пронумеровывается в ячейках с четырех сторон (горизонтально и послойно): с *левого верхнего* угла – белые, с *правого верхнего* – красные, с *нижнего левого* – зеленые и, наконец, *с нижнего правого* – желтые. Вот и вся премудрость.



196	195	194	186	10	6	7	8	9	5	11	185	184	183
15	181	180	179	173	23	21	22	20	24	172	171	170	28
29	30	166	165	164	160	36	35	37	159	158	157	41	42
56	44	45	151	150	149	147	50	146	145	144	54	55	43
127	69	59	60	136	135	134	133	132	131	67	68	58	70
126	114	82	74	75	121	120	119	118	80	81	73	83	113
112	111	101	95	89	90	106	105	93	94	88	96	100	99
98	97	87	102	103	104	92	91	107	108	109	110	86	85
84	72	115	116	117	79	78	77	76	122	123	124	125	71
57	128	129	130	66	65	64	63	62	61	137	138	139	140
141	142	143	53	52	51	49	148	48	47	46	152	153	154
155	156	40	39	38	34	161	162	163	33	32	31	167	168
169	27	26	25	19	174	175	176	177	178	18	17	16	182
14	13	12	4	187	188	189	190	191	192	193	3	2	1

Рис. 5. Макет заполнения магического квадрата одинарной четности 14×14

Что можно сказать? – Наглядно, доступно, логично и красиво.

Одним словом гармонично. Но аналитика здесь просматривается довольно слабо, да и программирование включает много операций и весьма трудоемко.

Для размерности $n = 4k + 2$ представляет интерес также метод четырех квадратов[8].

Метод окаймленных квадратов, $n = 2k + 1$ [15, с. 70–73].

Выбирается исходный магический квадрат A порядка $n-2 = 2k-1$. Матрица A суммируется с числом $2(n-1)$ и помещается по центру в n-мерную матрицу B (рис. 6).

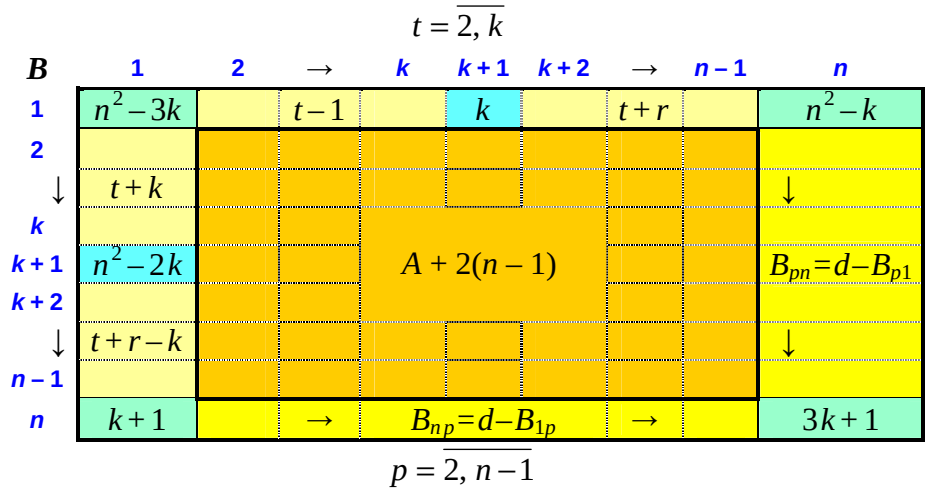


Рис. 6. Схема заполнения матрицы методом окаймленных квадратов порядка $n = 2k + 1$

[8] Макарова Н. – http://www.klassikpoez.narod.ru/mojmetod.htm.

Далее заполняется периметр B: угловые ячейки, а затем произвольным образом по $n-2$ числа в оставшихся ячейках верхней строки и левого столбца:

$$t = \overline{2,\, k}, \quad r = n^2 - 3k - 1.$$

Свободные элементы нижней строки и правого столбца матрицы определяются как дополнения $d = n^2 + 1$ к противолежащим ячейкам относительно осей симметрии

$$B_{pn} = d - B_{p1}, \quad B_{np} = d - B_{1p}, \quad p = \overline{2,\, n-1}.$$

Полученный МК может использоваться в качестве исходного для построения следующего МК (n+2)-го порядка по данной схеме и т.д.

Например, начальный идеальный магический квадрат A 5×5 (рис. 7) легко преобразуется в последовательность МК с интересными свойствами.

Так, квадрат A (синий) по-прежнему характеризуется как идеальный, то есть с центральной симметрией, только нетрадиционный.

На каждом последующем шаге он окаймляется по периметру числами, комплементарными по угловым ячейкам, а также ячейкам относительно вертикальной и горизонтальной осей симметрии так, что их сумма равна удвоенному значению центрального элемента.

А сам этот элемент, исходя из метода построения, определяется начальным значением и в данном случае образует возрастающую последовательность вида $\left(n^2+1\right)/2$, где n – размерность МК.

1	23	10	14	17
15	19	2	21	8
22	6	13	20	4
18	5	24	7	11
9	12	16	3	25

40	1	2	3	41	42	46
5	13	35	22	26	29	45
6	27	31	14	33	20	44
43	34	18	25	32	16	7
38	30	17	36	19	23	12
39	21	24	28	15	37	11
4	49	48	47	9	8	10

69	1	2	3	4	70	71	72	77
6	56	17	18	19	57	58	62	76
7	21	29	51	38	42	45	61	75
8	22	43	47	30	49	36	60	74
73	59	50	34	41	48	32	23	9
66	54	46	33	52	35	39	28	16
67	55	37	40	44	31	53	27	15
68	20	65	64	63	25	24	26	14
5	81	80	79	78	12	11	10	13

Рис. 7. Последовательное наращивание порядка окаймленных МК

Вместо заключения.

Основное внимание нами было уделено по возможности построению аналитических формализованных конструкций магических квадратов (МК).

В виду этого вторая составляющая, а именно красивейшая и одновременно строгая гармония МК осталась менее востребованной и поглотилась галереей формул и чисел.

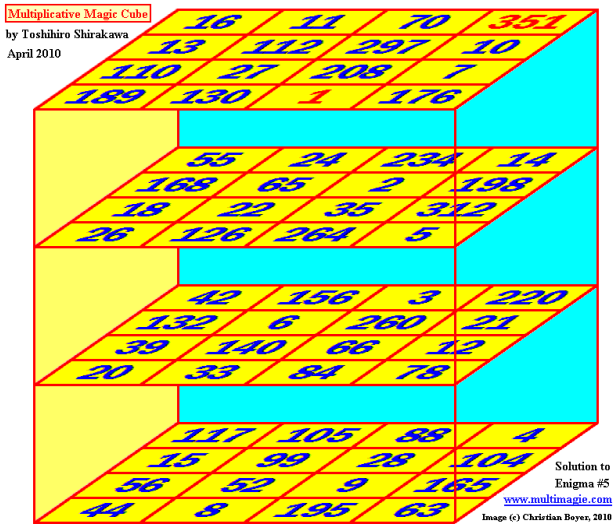
В определенной мере здесь присутствует момент намеренного действа, потому как гармоничность и красота – понятия относительные, и при желании каждый сможет их отыскать на свой вкус и разум.

Математика, магические фигуры, а теперь уже и геометрические тела, интернациональны и уже давно не знают границ.

Поэтому каждая новая разработка, дополняющая уже существующие результаты исследований, будет вносить свой вклад в общее созвучие МК.

Так что красота и великолепие числовых множеств, да еще облекшие формы тождественной точности, будут еще многие годы изумлять воображение человека.

Ну, как тут, например, пройти мимо, не упомянув для популяризации совсем свежий шедевр человеческой мысли: мультипликативный магический куб с магической константой $4\,324\,320 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ (Toshihiro Shirakawa, April, 2010).



Дальнейшие аналитические исследования МК планируется выполнить в области синтеза совершенных идеальных магических квадратов.

Данные числовые формы представляет исключительный интерес, поскольку в них одновременно сосредоточено наибольшее количество уникальных математических свойств.

Литература.

1. *Pickover C.A.* The Zen of Magic Squares, Circles and Stars: An Exhibition of Surprising Structures across Dimensions. – Princeton University Press, 2002.
2. *Suzuki M.* Magic Squares. – Drexel University, 1994–2010. – http://mathforum.org/te/exchange/hosted/suzuki/MagicSquare.html.
3. *Boyer C.* – Multimagic squares. – Last updated April 2010. – http://www.multimagie.com/indexengl.htm.
4. *Trump W.* Notes on Magic Squares and Cubes. – Nurnberg, Germany. Last modified 04-2007. – http://www.trump.de/magic-squares/.
5. *Weisstein E.W.* Magic Circles. – From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/topics/MagicFigures.html.
6. *Alejandre S.* Magic Squares. – Drexel University, 1994–2010. – http://mathforum.org/alejandre/magic.square.html.
7. *Hendricks J.R.* Magic Squares to Tesseract by Computer, Self-published, 1998.
8. *Heinz H.* Magic Squares, Magic Stars & Other Patterns. – Last updated Nov 2009. – http://www.magic-squares.net/.
9. *Nakamura M.* Magic Cubes and Tesseracts. – Last updated Nov 2009. – http://homepage2.nifty.com/googol/magcube/en/.
10. *Campbell D.H., Campbell K.A.* Welcome to Magic Cube Generator. – Last updated April 2009. – http://home.earthlink.net/~dwanecampbel/index.html.
11. *Ahmed M.* Algebraic Combinatorics of Magic Squares // Ph.D. thesis, University of California, Davis, 2004.
12. *Постников М.М.* Магические квадраты. – 2-е изд. – М.: Кн. дом "Либроком", 2010. – http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/numtheory.htm.

13. *Чебраков Ю.В*. Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ. – СПб.: СПб гос. техн. ун-т, 1995. – 388 с.

14. *Чебраков Ю.В*. Теория магических матриц. – СПб.: Изд-во ВВМ, 2008. – 270 с. – http://chebrakov.narod.ru/.

15. *Макарова Н.В*. Волшебный мир магических квадратов. – Саратов, 2009. – 180 с. – http://narod.ru/disk/5834353000/Magic_squares.pdf.html.

16. *Макарова Н.В*. Совершенные магические квадраты. – 2008. – http://klassikpoez.narod.ru/soversh.htm.

17. *Александров Г*. Идеальные магические квадраты. – http://renuar911.narod.ru/IDEAL_MSa.mht; http://renuar911.narod.ru/IMS_Alexandrov.html.

18. *Александров Г*. Метод построения идеального магического квадрата нечетного порядка. – 2007. – http://renuar911.narod.ru/ideal_mk.html.

19. *Александров Г*. Идеальный совершенный магический квадрат четного порядка. – 2008. – http://renuar911.narod.ru/ideal_sov.html.

20. *Александров Г*. Идеальный нетрадиционный магический квадрат порядка $n = 4k + 2$. – 2008. – http://renuar911.narod.ru/ideal_netra.html.

21. *Александров Г*. Магические квадраты порядка одинарной четности. – 2006. – http://www.arbuz.uz/s_mk1.html.

22. *Лукоянов В.П.*, *Лукоянов В.В.*, *Джаясекара Ш.П*. Модифицированные квадраты Бенджамина Франклина[9] // Дух времени. Научный журнал для всех. – С. 20–23. – http://www.spiritoftime.net/pdf-files/Spirit_of_time_ALL.pdf.

23. *Зубков А.М*. Эйлер и комбинаторика // Современные проблемы математики / Математический ин-т им. В.А. Стеклова РАН. – М.: МИАН, 2008. – Вып. 11. – Сб. докл. конф. «Леонард Эйлер и современная математика» (МИАН, 17 мая 2007 года). – С. 5 – 18. – http://www.mi.ras.ru/spm/pdf/011.pdf.

24. *Hebeisen C*. Euler and magic squares (De quadratis magicis). – 2006. – http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0408/0408230v6.pdf.

25. *Euler L*. On magic squares. Delivered to the St. Petersburg Academy October 17, 1776. Originally published as De quadratis magicis, Commentationes Arithmeticae **2** (1849), 593–602. – http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0408/0408230v6.pdf.

26. *Winkel A*. The Magic Encyclopedia. – http://www.magichypercubes.com/Encyclopedia/index.html.

27. *Andrews W.S*. Magic Squares and Cubes. – Open court publish company, 1908. – http://www.amazon.com/Magic-Squares-Cubes-W-Andrews/dp/1596050373#reader_1596050373.

28. *Magic square*. In Wikipedia, The Free Encyclopedia. – April, 2010. – http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square.

29. *Виноградов И.М*. Основы теории чисел: 6-е изд., испр. – М.: Техтеорлит, 1952. – 182 с.

30. *Hartley M*. "Making Big Magic Squares".

31. *Цепи* Александрова – прорыв в теории магических квадратов http://www.liveinternet.ru/users/3369559/post120832503/.

32. *Магический квадрат* // Википедия. Дата обновления: 06.04.2010. URL: http://ru.wikipedia.org/?oldid=23572121.

© ВаСиЛенко

[9] Бенджамин Франклин (1706–1790) – американский общественный деятель, дипломат и ученый.

***Приложение* 1**. Тексты программ по цепям Александрова.

```
MkA(n) := | (i  j  p) ← if[mod(n,2) = 1, (⌊(n-1)/2⌋  ⌊(n+1)/2⌋  L1(n)), (1  1  L4(n))]
          | for k ∈ 1..n
          |   if k > 1
          |     (i  j) ← if[mod(n,2) = 1, (i+2  j), (i-1  j-1+n)]
          |     (i  j) ← (i + n·if(i < 1, 1, 0)   j + n·if(j < 1, 1, 0))
          |   for t ∈ 1..n
          |     (i  j) ← (i+1  j+2)  if t > 1
          |     (i  j) ← (if(i ≠ n, mod(i,n), i)   if(j ≠ n, mod(j,n), j))
          |     M_{i,j} ← (p_k - 1)·n + p_t
          | M
```

```
L1(n) := | (n1  s  s0  v  o) ← (⌊(n+1)/2⌋  21  0  2  mod(n,12))
         | (p1  p2  p_{n1+1}) ← (1  n  n1)
         | (t5  t7  t9) ← (3  6  2)
         | (p3  pn) ← (2  4)  if n = 5
         | (p3  p4  p6  pn) ← (3  6  2  5)  if n = 7
         | (p3  p4  p5  p7  p8  pn) ← (3  6  2  8  4  7)  if n = 9
         | if n > 9
         |   (t11  t13  t15  t17  t19  t21) ← (5  7  4  8  12  9)
         |   for k ∈ 1..n1
         |     for i ∈ 1..6
         |       (s  ts) ← (s+2  6k + t_{9+2·i})
         |   t_{n-4} ← t_{n-4} - 2  if o = 11
         |   tn ← tn - 3  if o = 1 ∨ o = 7
         |   for i ∈ 5,7..n
         |     (s0  v) ← (s0+1  v+1)
         |     (pv  r_{s0}) ← (ti  1+n-ti)
         |   v ← v + 1
         |   for i ∈ n, n-2..5
         |     (v  pv  s0) ← (v+1  r_{s0}  s0-1)
         | for k ∈ 1..⌊(n-3)/2⌋
         |   p_{n+1-k} ← n + 1 - p_{k+2}
         | p
```

```
L4(n) := (p1 p2 k r v) ← (1 n (n − 4)/8 n/2 + 2 n/4 − 1)
         (pr m) ← (2 if(n = 12, k − 1, k − 2))
         if mod(n, 8) ≠ 0
           for i ∈ 0..m
             pr+1+i ← r − 4·i
           (s r2) ← (r − 5 r + k)
           pr2 ← s
           for i ∈ 0..m
             pr2+i ← s − 4·i
           t ← r2 + k − 1
           (pt pt+1 pt+2 pt+3 r4) ← (8 4 3 6 t + 4)
           for i ∈ 0..m
             pr4+i ← 5 + 4·i
           for i ∈ 0..m
             pn−i ← r − 2 − 4·i
         for i ∈ 1..v                    if mod(n, 8) = 0
           pr+i ← n/2 − 2·(i − 1)
           for j ∈ 1..v
             pr+i+j ← 1 + 2·j
         for i ∈ 3..r − 1
           pi ← n + 1 − pn+3−i
         p
```

Построение идеальных магических квадратов $n \times n$ по цепям Александрова в среде MathCad:
L1(n) – нечетные $n = 2k+1$; L4(n) – кратные четырем и восьми $n = 8k+4$, $n = 8k$