Олег Черепанов

ДРЕВНИЕ ТАЙНЫ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

Натуральные числа создал бог, а все прочее – дело рук человеческих.
Л. Кронекер

Бог изощрен, но не злонамерен.
А. Эйнштейн

Целые положительные числа антропоморфны, то есть придуманы людьми на заре цивилизации для удовлетворения потребности в счете как простейшем измерении. А в природе чисел нет, хотя ее закономерности имеют количественный характер. Однако искусственное происхождение числа, как элемента арифметики, не мешает углубленному изучению числового ряда и даже преподносит сюрпризы в виде открытий, сделанных еще математиками древности. Так, например, факт существования чисел, не имеющих иных делителей, кроме самого себя и единицы, поставил задачу выделения простых из множества натуральных. Решил задачу Эратосфен с помощью решета, отсеивающего простые, меньшие натурального числа N, вычеркиванием составных, кратных простым, не превышающим $\sqrt{N}$ [1].

Известны и другие методы, выстраивающие ряд 2, 3, 5, 7, 11, 13,…, члены которого составляют основу множества натуральных чисел, поскольку входят в них как сомножители, не исключая самих себя. Ведь всякое простое можно умножить на единицу сколь угодно раз. Но так называемые простые, как кости скелета последовательности целых положительных чисел, разбросаны по числовой оси без видимого порядка, так как до сих пор не найдена общая формула простого числа. И скорее всего ее не существует. Да и зачем она нужна? Хотя после появления первых ЭВМ периодически приходят сообщения о фантастическом количестве цифр в очередном с трудом найденном простом числе, большим, чем любое известное до него.

И погоня за бесконечностью никогда не завершится, как это следует из табличного алгоритма [2], позволяющего последовательно инициализировать все простые, начиная с единственного среди них четного числа 2. Причем предлагаемый алгоритм альтернативен решету Эратосфена и его можно реализовать в программе Excel как упражнение, огорчая оптимистов, считающих, что все-то они знают, и не радуя пессимистов, уверенных, что истина непостижима. А раз так, то ее как бы и нет.

●	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	…
3	0														
5	2	0													
7	1	2	0												
9	0	4	2												
11	2	1	4	0											
13	1	3	6	2	0										
15	0	0	1	4	2										
17	2	2	3	6	4	0									
19	1	4	5	8	6	2	0								
21	0	1	0	10	8	4	2								
23	2	3	2	1	10	6	4	0							
25	1	0	4	3	12	8	6	2							
27	0	2	6	5	1	10	8	4							
29	2	4	1	7	3	12	10	6	0						
31	1	1	3	9	5	14	12	8	2	0					
33	0	3	5	0	7	16	14	10	4	2					
35	2	0	0	2	9	1	16	12	6	4					
37	1	2	2	4	11	3	18	14	8	6	0				
39	0	4	4	6	0	5	1	16	10	8	2				
41	2	1	6	8	2	7	3	18	12	10	4	0			
43	1	3	1	10	4	9	5	20	14	12	6	2	0		
45	0	0	3	1	6	11	7	22	16	14	8	4	2		
47	2	2	5	3	8	13	9	1	18	16	10	6	4	0	
49	1	4	0	5	10	15	11	3	20	18	12	8	6	2	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Первый столбец приведенной таблицы содержит нечетные числа $2n+1$, где $n=1,2,3,...$, следующие друг за другом сверху вниз. Второй столбец увенчан числом 3, как известно, простым по определению. А под ним стоят остатки от деления на 3 нечетных чисел из первого столбца. И вообще, в каждом столбце под заглавным нулем, обозначающим ступеньку таблицы, представлены остатки от деления нечетных чисел в началах строк на простое число над нулем.

Всматриваясь в таблицу, нетрудно заметить периодичность среди чисел-остатков. И действительно, между двумя нулями по вертикали выстроились сначала все четные числа, меньшие простого числа p из верхней строки, а затем все нечетные. Это значит, что начатый нулем столбец можно продлить размножением периода между двумя нулями до самого низа таблицы Excel. И если строка с нечетным числом в начале, проверяемым на простоту, не содержит нулевого остатка от его деления на предшествующие простые, то надо ввести нуль в первую пустую ячейку данной строки и скопировать ее начальное число в верхнюю ячейку столбца как простое.

Затем под конечным нулем строки, озаглавленной нечетным числом $2n+1=p$ формируется ряд остатков от деления на него нечетных чисел $(2n+1)>p$. После этого проверяем на наличие нулей следующую строку. И если в ней есть хоть один нуль, то переходим к строке ниже. Ясно, что отсутствие нулей показывает, что в начале строки стоит простое число. Поэтому вводим нуль в первую пустую ячейку данной строки и копируем озаглавливающее ее число в верхнюю ячейку столбца как очередное простое.

Описанную процедуру можно запрограммировать и повторять до предела, ограничивающего таблицу Excel. Таков алгоритм последовательной инициализации простых, альтернативный решету Эратосфена, в том числе по скорости вычислений.

Прогуливаясь вдоль числовой оси с равноотстоящими друг от друга целыми числами и выделенными из них простыми, бессистемно расставленными провидением, нетрудно заметить, что каждое натуральное число повторяется, выступая под показателем степени $n=2,3,4,...$ означающим количество его умножений на самого себя. При этом степень мультипликации может быть любым числом натурального ряда, например, простым, а последовательность мультипликаций какого либо натурального представляет собой ряд с увеличивающимся интервалом между членами, следующими один за другим в порядке возрастания.

Аддитивность первых степеней чисел x и y натурального ряда является его свойством и выражена тождеством $x+y=z$. При этом известны тождества $x^2+y^2=z^2$, где x, y и z – целые числа, но нет аналогичного тождества из натуральных x, y и z в степени больше второй. Так утверждает Большая теорема Ферма [3]. И хотя ее полное доказательство отнюдь не элементарно, Большая теорема $x^n+y^n=z^n$ подтверждена [4] для всех показателей степени $n>2$ вида $p-1$, где p – простое, равное 5 и выше. И Пьер Ферма это определенно знал, так как частичное доказательство Большой теоремы основано на его Малой теореме [5]: $a^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$. То есть, всякое натуральное число a, взаимно простое с числом p, после возведения в степень $p-1$ делится на p с остатком 1.

Покажем, как Малая теорема способствует доказательству Большой, представленной в виде уравнения $x^{p-1}+y^{p-1}=z^{p-1}$.

Если существуют целые числа x, y и z, удовлетворяющие данному уравнению, то они должны удовлетворять эквивалентному уравнению $(x^{p-1}-1)+(y^{p-1}-1)=z^{p-1}-2$, которое разделим на p: $\frac{x^{p-1}-1}{p}+\frac{y^{p-1}-1}{p}=\frac{z^{p-1}-2}{p}$.

Согласно Малой теореме левая часть предполагаемого тождества при всех натуральных x и y, таких, что $(x,p)=(y,p)=1$, будет суммой двух целых чисел, то есть числом целым. Правая же часть ни при каком натуральном z целым числом не будет, так как если $(z,p)=1$, то $z^{p-1}-2$ делится на p с остатком $p-1$, а если $(z,p)\neq 1$, то с остатком $p-2$. Это значит, что уравнение $x^{p-1}+y^{p-1}=z^{p-1}$ не имеет решения в целых числах при $p\geq 5$.

А теперь вспомним, что Малая теорема Ферма обобщена Эйлером [6]: $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\bmod m)$, где $\varphi(m)$ – арифметическая функция, значение которой равно количеству натуральных чисел, не превосходящих числа m и взаимно простых с m. Тогда аналогичным приемом можно доказать, что уравнение $x^{\varphi(m)}+y^{\varphi(m)}=z^{\varphi(m)}$ при $\varphi(m)>2$ и $m>4$ не имеет решений в целых положительных числах. При этом показатели вида $n=\varphi(m)$ могут быть как простыми, так и составными, что существенно расширяет их круг по отношению к $n=p-1$.

Заметим, что в свою очередь теорема Эйлера является частным случаем других теорем. Поэтому есть надежда получить элементарное доказательство Большой теоремы Ферма. Но так как она верна, то тут, как глубинная тайна натурального ряда, возникает следующий вопрос: почему аддитивны лишь первые степени целых положительных чисел и вторые степени некоторых из них? Нет ли тут намека на арифметику, как-то и чем-то отличающуюся от Диофантовой?

Так сложилось исторически, что геометрия представляется нам дисциплиной, близкой к физике, а арифметика и алгебра обслуживают ее в случаях, когда надо выполнить какие-то вычисления. С этой целью буквы, обозначающие углы, длины, площади, объемы и т. д. заменяют числами. Но при этом забывают, что элементы арифметики дискретны, тогда как образы геометрии непрерывны. И цена такой забывчивости невероятно высока. Ведь при проверке оказывается, что символы геометрии и обозначения арифметики разделяет пропасть, ставящая под сомнение объективность математики букв и цифр, началом которой является поштучный счет как простейшее измерение.

Известно, что масштаб длины назначают общим согласием, а выбранному отрезку присваивают единичное значение. Так аксиоматически обозначают начало пути в физику от измерений через геометрию и арифметику. Покажем, что первые математические дисциплины не стыкуемы в принципе и образ числовой оси с точками-числами, являющийся базой метода координат, не фрагментируется масштабным отрезком на равные части. То есть, на прямой, проведенной карандашом по линейке, можно с помощью циркуля последовательно откладывать одинаковые отрезки, а нанесенные метки обозначать числами натурального ряда. Однако геометрические построения не имеют никакого отношения к арифметической операции сложения единиц.

В рамках математической логики вообразим конечный отрезок, у которого, как нам кажется, есть серединная точка, делящая его длину на две равные части. Геометро-арифметическую двойственность мыслимого образа выразим обозначением центра симметрии числом 1. Тогда крайние точки выделенного фрагмента числовой оси можно обозначить числами 0 и 2 и считать его длину равной двум единицам. Однако равенство частей a и b отрезка $c=2$ никак не определить строго, что в [7] названо главной проблемой Гильберта.

Допустим, что $a=1$ и $b=1$ и при этом фрагмент a включает все действительные числа-точки от 0 до 1, а фрагмент b содержит все числа-точки от 1 до 2. То есть, $a\subseteq[0,1]$ и $b\subseteq[1,2]$. Но в таком случае сумма $a+b$ будет больше отрезка c на одну точку, так как точка-число 1 входит в нее дважды.

Предположим, что $a\subseteq[0,1)$ и $b\subseteq(1,2]$. Тогда сумма $a+b$ будет меньше отрезка c, так как точка-число 1 исключена из него символически.

А если $a\subseteq[0,1]$ и $b\subseteq(1,2]$, то $a+b=c$, но $a\neq b$ и кроме того a и b нельзя складывать, так как эти образы различны семантически. Ведь a является отрезком, а b полуинтервалом.

Таким образом, деление отрезка пополам не выполнимо с точки зрения арифметики и геометрически условно, поскольку проблема принадлежности серединной точки логически не разрешима, если считать, что данная точка существует хотя бы в воображении. Напротив, безо всякого сомнения реальна операция аддитивного деления $2=1+1$ как способа аксиоматизации единиц, может быть принадлежащих математике, свободной от букв и цифр, которой пользуется зрительная система мозга. Тем более, что уже имеются физико-метрологические предпосылки секстетной недиофантовой арифметики [8].

1. Виноградов И. М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1965. С. 18.

2. Черепанов О. А. Где начало того конца? Об альтернативе законам Ньютона и постулатам Эйнштейна. – М.: «Гончаръ», 1994. – 184 с.

3. Постников М. М. Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел. – М.: Наука, 1982.

4. Черепанов О. А. Задачи наших читателей. //Квант. – 1986. – №6. – С. 19. – №10. – С. 64.

5. Математический энциклопедический словарь. – М.: «Советская энциклопедия», 1988. – С. 607.

6. Там же. – С. 642.

7. Черепанов О. А. Обоснование «золотой» арифметики: главная проблема Гильберта и парадокс Пифагора. // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15363, 24.06.2009 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321127.htm)

8. Черепанов О. А. Физико-метрологические предпосылки секстетной недиофантовой арифметики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15817, 07.03.2010 (www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/1620-chr.pdf)