С.Л. Василенко

2010-я борозда в просторах мироздания

Удивительная вещь. Считаем–считаем, а до сих пор нет четкого определения обычного натурального ряда (НР). Нет, сам ряд де-факто существует. Но самая точная и педантичная наука математика определяет его аксиоматически с точностью лишь до изоморфизма [1].

Как бы там ни было, но практически каждое число имеет некоторые характерные особенности, или является членом уникальных последовательностей.

В быту разные числа (в основном в первой сотне, за редким исключением) наделяются многими свойствами магического характера. – Вообще-то говоря, довольно странное увлечение человека, если исходить из того, что сами по себе числа – абсолютно абстрактные не существующие в природе образования.

В результате получается нечто отвлеченное и характеризуемое как «абстракция на абстракции, которая абстракцией и погоняет». Но любителей и фанатов нумерологии это нисколько не смущает, и они преданно и увлеченно оперируют числами, наделяя их воистину фантастическими свойствами.

В основном ограничиваются натуральными (целыми положительными свойствами).

Ну, правильно. Кто это будет сидеть, высчитывать десятичные знаки, а потом еще и придавать им "волшебные" свойства.

Все операции предельно просты.

Счет идет на уровне 3–5 классов средней школы.

Вот и вычисляют, не мудрствуя лукаво.

Мы не собираемся агитировать за нумерологию, равно как, и не призываем верить слепо в чудеса и завораживающую магию чисел. Каждый выбирает здесь свой путь.

Наша задача – показать на примере конкретики 2010 широкие и неисчерпаемые возможности практически любого числа, что "размывает" индивидуальные значимости и делает их практически слабо различимыми в плане общих предпочтений.

Так, каждое натуральное число обладает признаком быть четным или нечетным, то есть делиться или не делиться нацело на 2 или пополам.

Это и есть для начала свойства любого положительного целого числа.

Хоть кол на голове теши. Единица традиционно выступает базовым основанием счета, но тесать-то оказывается и нечего. Аксиоматически кол не определяется. Например, по Пеано в качестве кола может выступать "начало" … практически любого возрастающего ряда (тех же четных чисел), лишь бы выполнялось условие "следовать за другим".

И предъявить "1" для идентификации не так просто, как покажется на первый взгляд.

Так, полное имя единицы, которое дается группой французских математиков, объединенных под именем Бурбаки, требует для своей записи десятки тысяч знаков[1] [2, с. 188]. Однако здравый смысл отказывается признать такие понятия как "множество", "мощность" или "конечное" более простыми, чем понятие самого натурального числа.

Здесь имеем типичный пример определения простого через сложное [1], когда мы все больше убеждаемся, что подобные попытки малопродуктивны, и натуральное число следует признать первичным, неопределяемым понятием или категорией математики.

---

[1] Математический термин, обозначенный символом "1", является знакосочетанием из нескольких десятков тысяч знаков (каждый из которых есть один из логических и специальных знаков).

С другой стороны, условному инопланетянину легче объяснить пару или двоицу, например листьев, чем единицу в виде одиноко стоящего дерева.

Кстати, у тех же Бурбаки существует аксиома пары [2, с. 82]

Совсем нетривиальный вопрос, что считать на математическом языке за целое: единицу или двоицу. Удобнее, конечно, остановиться на 1, хотя бы потому что $x \cdot 1 = x/1 = 1$.

В реальной жизни в роли целого более целесообразна двоица:

– в живой природе это разница полов;

– в неживой природе это взаимодействие полей (электромагнитного, гравитационного и др.).

И аксиоматическое построение натурального ряда, на наш взгляд, тоже легче и логичнее начинать именно с двоицы или двойки.

Тройка, семерка, туз... С момента своего зарождения числа всегда были и остаются особым инструментарием человеческих фантазий.

Взять даже наш, сравнительно продвинутый век.

Никто не ворожит на базе интегрально-дифференциального исчисления.

Мало кто колдует на основе топологии.

Никому в голову не приходится гадать в образах абстрактной алгебры.

Числа же – самые доступные, простые и понятные математические образования.

Вот и возятся с ними кому не лень еще со времен Пифагора. Придумывают всякую всячину, напускают туман, наводят "тень на плетень" и т.п.

У некоторых людей просто абсолютная или даже маниакальная вера в числа, сродни религии и даже выше.

Конечно, они обладают массой интереснейших свойств.

Давно выделена и развивается целая «теория чисел, которая занимается изучением свойств целых[2] чисел» [3, с. 7].

С другой стороны, саму идею "оживления" или "очеловечивания" отдельных чисел нельзя отнести к бесполезному занятию.

Со временем она может оказаться весьма полезной при реализации роботов, настроенных на положительно-созидательный результат. Определенные числа-заготовки могут здесь служить своеобразными островками, маячками и точками опоры в океане числовых манипуляций компьютерного мозга.

Так, что *один* ум хорошо, ... а *два* сапога пара. – Но *третий* лишний, ... хоть *семь* раз отмерь. – Конь-то о *четырех* ногах, ... да только *пятое* колесо в телеге.

Этот безумно-безумный шальной мир ... чисел.

С какой бы стороны мы не посмотрели на любое натуральное число, оно обязательно проявит в себе массу всевозможных аккумулированных свойств самого разного толка.

И это только на сегодня. Со временем количество этих качеств может обусловлено возрасти настолько, что каждому отдельно взятому числу можно будет сопоставить миллиарды разноплановых характеристик.

Так что строить какие-либо прогнозы, иллюзии, гипотезы и подобные прожекты лишь на том основании, что конкретное число равно *n*, становится просто наивным детским занятием, на фоне которого спортлото превращается в действо с почти абсолютно предсказуемым результатом.

---

[2] Множество *целых чисел* $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ содержит не только числа натурального ряда, но также нуль и отрицательные целые.

Для лучшего уяснения этого явления, в преддверие наступающего 2010-го года, есть смысл рассмотреть отдельные особенности именно этого числа в небольшом количестве числовых последовательностей, построенных по различным правилам и обладающих увлекательными или просто необычными свойствами.

Одна из целей, которая преследуется, – это продемонстрировать всю нелепость предсказаний глобальных явлений вселенского масштаба исключительно по числовым свойствам порядкового номера года.

Мало того, что данное летоисчисление в некоторой степени условно и является всего лишь одним из многих других, так и каждое в нем число имеет массу особенностей, в равной мере претендующих на придание окраски особенных, уникальных.

В этом контексте все они квалифицируются как "лучшие из лучших номинаций", а потому равны между собой независимо от того сколько в них троек, двоек, шестерок и т.п.

1) Что же это за число 2010? Прежде всего, оно четное. Делится на 3, 5 и 10. Число, составленное из первых двух цифр (20) ровно вдвое больше числа из другой пары цифр (10).

При переводе из иных систем исчисления в 10-ричную оно равно $2010_n \to 2\cdot n^3 + 1\cdot n^1$:

$2010_3 \to 57$	$2010_4 \to 132$	$2010_5 \to 255$	$2010_6 \to 438$
$2010_7 \to 693$	$2010_8 \to 1032$	$2010_9 \to 1467$	$2010_{10} \to 2010$

Сумма цифр равна трем. Оказывается, выделена и такая последовательность:

A119507[3]: 3 12 21 30 111 120 201 210 1020 1101 1110 **2010** 10020 10101 ...

Кроме того, число 2010 в своей записи содержит два сомножителя, которые его же и образуют: 2010 = 201 · 10 (A162305).

2) Рассмотрим теперь целые числа, записанные в факториальной системе счисления.

В работе [4, с. 29] отмечается, что согласно доказанной теореме (Смарандачи) любое натуральное число может быть представлено в факториальной базе ($f_k = k!$, $k \geq 1$) как

$$A = \left(\overline{a_n \ldots a_1 a_0}\right)_{(F)} \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k f_k$$

для всех $a_i = 0, 1, \ldots, k$ и $k \geq 1$.

Интересно, что $a_1 = 0$ или 1, $a_2 = 0, 1$ или 2 и т.д.

Таким образом, в факториальной системе счисления основаниями являются последовательность факториалов $f_k = k!$, и каждое натуральное число x представляется в виде: $x = \sum_{k=1}^{n} a_k k!$, где $0 \leq a_k \leq k$.

Так что число 2010 в переводе в 10-ричную систему означает ровно 50.

А само число 2010 в факториальной базе равно 243300→2·6! + 4·5! + 3·4! + 3·3! = 2010.

A007623: ...1321 2000 2001 **2010** 2011 2020 2021 ...

3) Существует интересное свойство некоторых чисел и их целых степеней делиться нацело на сумму своих же цифр.

Множества таких чисел n, степени которых от 1 до $m \geq 1$ кратны суммам их цифр S_d (а число n^{m+1} уже не делится нацело на сумму своих цифр), составляют отдельные последовательности.

В частности, число 2010 является характерным для случая $m = 6$.

---

[3] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://www.research.att.com/~njas/sequences.

Это хорошо видно на следующем примере.

	S_d	N_1 / S_d
$N_1 = 2010^1 = 2010$	3	670
$N_2 = 2010^2 = 4040100$	9	448900
$N_3 = 2010^3 = 8120601000$	18	451144500
$N_4 = 2010^4 = 16322408010000$	27	604533630000
$N_5 = 2010^5 = 32808040100100000$	27	1215112596300000
$N_6 = 2010^6 = 65944160601201000000$	45	1465425791137800000
$N_7 = 2010^7 = 132547762808414010000000$	63	2103932742990698571428,57..

A135191: ...1530 1710 1848 **2010** 2070 2142 2232 ...

4) 15-трансверсальные числа $a_n = (b_n - 15)n + 15 = (120 - 15)n + 15 = 15(7n + 1)$, где $b_n = C_{n+1}^2 = n(n+1)/2 = 0 + 1 + 2 + ... + n$. В частности, $a_{19} = 2010$.

A139615: ...1695 1800 1905 **2010** 2115 2220 2325 ...

5) Весьма примечательна треугольная матрица (A063967) рекурсивного построения с начальными условиями: диагональ равна 1, диагональ слева от нее и верхняя строка = 0, т.е.

$$a_{i,\,i} = 1, \quad a_{i+1,i} = a_{0,i} = 0, \quad i = \overline{0,\,n}.$$

Рекурсия образуется сложением содержимого двух верхних и пары левых ячеек:

$$a_{i,\,j} = a_{i,\,j-1} + a_{i,\,j-2} + a_{i-1,\,j-1} + a_{i-1,\,j-2}, \quad i = \overline{1,\,n-2}; \quad j = \overline{i+1,\,n}.$$

В первой строке образуются числа Фибоначчи (табл. 1).

Каждый элемент $(i-1,\ j-1)$ матрицы может быть вычислен и по комбинаторной аналитической формуле как сумма:

$$a_{i-1,\,j-1} = \sum_{k=1}^{j} C_k^{j-k} \cdot C_k^i.$$

Таблица 1

Аддитивно-рекурсивная матрица

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
2		0	1	3	7	15	30	58	109	201	365	655	1164
3			0	1	5	16	43	104	235	506	1051	2123	4194
4				0	1	7	29	95	271	705	1717	3979	8870
5					0	1	9	46	179	591	1746	4759	12201
6						0	1	11	67	303	114	3780	11425
7							0	1	13	92	475	**2010**	7405
8								0	1	15	121	703	3309
9									0	1	17	154	995
10										0	1	19	191
11											0	1	21
12												0	1

Каждая новая строчка является как бы продолжением идеи рекурсивно-аддитивного построения ряда: одновременное сложение двух предшествующих ячеек самой строки и еще

двух ячеек предшествующей строки. Эта матрица обладает массой еще неизведанных до конца интереснейших свойств, но ее анализ выходит за рамки наших исследований.

6) Максимальная длина пути шахматной ладьи на доске размером $n \times m$ $(n \le m)$.

Задача (Хартмана) описана в работе М. Гарднера [5, с. 76].

Там есть неточности и неудобство представления для программных расчетов, поэтому формулу для нахождения длины пути представим в несколько преобразованном виде:

$$l = \frac{n\left(3m^2 + n^2 - 10\right)}{6} + v_{4k+2i+j},$$

где $v = (2\ \ 1{,}5\ \ 0\ \ 1\ \ -\ \ 0{,}5\ \ 1)$, $i = n(\mathrm{mod}\,2)$, $j = m(\mathrm{mod}\,2)$, $k = \{0,\ i = j;\ \ \langle n/2\rangle(\mathrm{mod}\,2),\ i \ne j\}$, где $\langle\xi\rangle$ – операция округления числа ξ до ближайшего целого.

Результаты расчетов (табл. 2) показывают, что число 2010 наблюдается дважды, представляя максимальный путь ладьи на следующих полях: 14×15 и 13×16.

Таблица 2

Максимальный путь шахматной ладьи на полях размером $n \times m$

$m \setminus n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	4	8	12	18	24	32	40	50	60	72	84	98	112	128
2	4	8	16	24	36	48	64	80	100	120	144	168	196	224	256
3		14	24	38	54	74	96	122	150	182	216	254	294	338	384
4			38	54	78	102	134	166	206	246	294	342	398	454	518
5				76	104	136	174	216	264	316	374	436	504	576	654
6					136	174	220	270	328	390	460	534	616	702	796
7						218	270	330	396	470	550	638	732	834	942
8							330	396	474	556	650	748	858	972	1098
9								472	558	652	756	868	990	1120	1260
10									652	756	872	996	1132	1276	1432
11										870	996	1134	1282	1442	1612
12											1134	1282	1446	1618	1806
13												1444	1620	1808	2010
14													1808	2010	2228
15														2226	2458
16															2706

Рассматривая поле $\boldsymbol{n \times (n+1)}$, длина пути может быть вычислена аналитически по формулам (A152132):

$$l(n) = \frac{2}{3}n^3 + n^2 - \frac{7}{6}n + \frac{3}{4} - \frac{(-1)^n}{4} - \frac{1}{2}(-1)^{C_{n+1}^2}, \quad l(14) = 2010;$$

$$l(n) = 3l(n-1) - 3l(n-2) + l(n-3) + l(n-4) - 3l(n-5) + 3l(n-6) - l(n-7),$$

$$3{\cdot}1620 - 3{\cdot}1282 + 996 + 756 - 3{\cdot}558 + 3{\cdot}396 - 270 = \mathbf{2010}.$$

Аналогичным образом, на поле $\boldsymbol{n \times (n+3)}$ длина пути также вычисляется аналитически по формулам (A152134):

$$l(n) = \frac{2}{3}n^3 + 3n^2 + 17\frac{n}{6} + \frac{3}{4} + \frac{b_4(n+3)}{4}, \quad l(13) = 2010;$$

где $b_4(n)=\frac{1}{2}[-3\cdot n(\mathrm{mod}\,4)+(n+1)(\mathrm{mod}\,4)+(n+2)(\mathrm{mod}\,4)+(n+3)(\mathrm{mod}\,4)]$ – периодическая функция с периодом 4 и значениями: 3, 1, –1, –3.

7) В десятичной системе исчисления число 2010 относится к последовательности чисел, которые кратны 10, и одновременно содержат 10 в их десятичном представлении:

A121030: ...1710 1810 1910 **2010** 2100 2110 2210 ...

8) Довольно необычна последовательность $a(n)=\left\lceil\frac{x}{y}\right\rceil=\left\lceil\frac{\overline{2^1 2^2 2^4 ... 2^n}}{\overline{123...n}}\right\rceil$,

где x – составное число из первых n увеличивающихся степеней 2^k,
y – первые n натуральных чисел; $\lceil\xi\rceil$ – целая часть от ξ (операнд *floor*).

Например: $a(6)=\left\lceil\frac{\overline{2\,4\,8\,16\,32\,64}}{\overline{1\,2\,3\,4\,5\,6}}\right\rceil=\lceil 2010{,}14\rceil=2010$.

A067097: 2 2 2 20 201 **2010** 201012 20101226 2010122457 201012245610 ...

9) Отношения сумм двух целочисленных последовательностей

$$a(n)=3(n+1)\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-1\right)}{\sum_{k=1}^{n}k}=(n-1)(2n+5);\qquad a(31)=2010.$$

Ряд может быть также определен рекуррентно: $a(1)=0,\ a(n)=a(n-1)+4n+1$.

Его производящая функция имеет вид $G_f=\frac{x^2(-9+5x)}{(-1+x)^3}$ (R. Mathar, 2007).

A130861: ...1647 1764 1885 **2010** 2139 2272 2409...

10) Числа n, имеющие ровно 4 простых сомножителей, из которых максимальный больше или равен $\sqrt{n}$.

Оказывается, выделен и такой ряд, где число 2010 занимает свое почетное место.

Если число непростое, то оно раскладывается на простые сомножители.

Так, число 2010 раскладывается на 4 сомножителя $2010=2\cdot3\cdot5\cdot67$.

Примечательно, что $67^2>2010$. То есть старший сомножитель больше произведения остальных $67>2\cdot3\cdot5=30$ или $67>\sqrt{2010}\approx44{,}8$.

A115958: ...1806 1830 1974 **2010** 2130 2190 2226...

11) Диофантово уравнение Пелля [6] второй степени вида $x^2-my^2=1$, где m – целое положительное число, не являющееся точным квадратом.

Для функции $m(n)=25n^2+2n$ бесконечная последовательность (нетривиальных) решений (x_i, y_i) определяется с помощью рекуррентной формулы $x_n=1250n^2+100n+1$, $y_n=250n+10$. В частности, $y_8=$ **2010**.

A154379 – y_n: 260 510 760 1010 1260 1510 1760 **2010** 2260 2510 ...

12) Диофантово уравнение Пелля вида $x^2 - my^2 = 1$.

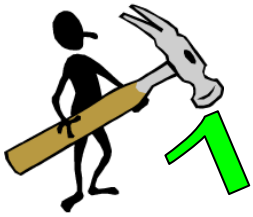
Для функции $m(n) = 9n^2 - n$ бесконечная последовательность (нетривиальных) решений (x_i, y_i) определяется с помощью рекуррентной формулы $x_n = 646n^2 + 72n + 1$, $y_n = 216n + 12$. В частности, $m_{15} = \underline{2010}$.

A154379 – $m(n)$: ...1284 1508 1750 **2010** 2288 2584 2898 ...

13) Диофантово уравнение Пелля вида $x^2 - my^2 = 1$.

Для функции $m(n) = 49n^2 + n$ последовательность решений (x_i, y_i) определяется по рекуррентной формуле $x_n = 49n + 1$, $y_n = 7$. В частности, $x_{41} = \underline{2010}$.

A158066 – x_n: ...1863 1912 1961 **2010** 2059 2108 2157 ...



14) Частная сумма 11-гональных пирамидальных чисел $k(k+1)(3k-2)/2$ равна

$$a(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}(3k-2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(9n+4)}{24} = C_{n+3}^{3}\frac{9n+4}{4}.$$

$$a(7) = \underline{2010}.$$

Производящая функция имеет вид $G_f = \dfrac{1+8x}{(1-x)^5}$.

A051798: …1 13 55 155 350 686 1218 **2010** 3135 4675 6721 ...

15) 21-гональные числа

$$a(n) = \frac{n(19n-17)}{2}, \qquad a(15) = \underline{2010}.$$

Интересна и рекуррентная форма:
$a_n = a_{n-1} + 19n - 37$ с затравочным числом $a_1 = 0$ (V. Librandi, 2009).

A051873: …1266 1495 1743 **2010** 2296 2601 2925 …

16) Разбивка множества натуральных чисел на группы с нахождением сумм:
$S_n = 2n^3 + n$: 1+2; 3+4+5+6; 7+8+9+10+11+12; 13+14+15+16+17+18+19+20, ...

A061317: 3 18 57 132 255 438 693 1032 1467 **2010** 2673 3468 …

17) Произведения простых p_n и составных[4] c_n чисел $a_n = p_n \cdot c_n$ (A067563) в порядке их следования (табл. 3):

---

[4] *Составное число* – натуральное число, большее 1, не являющееся простым. Каждое составное число является произведением двух натуральных чисел больших 1.

Таблица 3

Простые и составные числа с их произведениями

p_n	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73
c_n	4	6	8	9	10	12	14	15	16	18	20	21	22	24	25	26	27	28	30	32	33
a_n	8	18	40	63	110	156	238	285	368	522	620	777	902	1032	1175	1378	1593	1708	**2010**	2272	2409

18) Суммы квадратов пяти последовательных чисел, $a_{18} = 2010$:

$$a_n = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + (n+4)^2 = \sum_{k=0}^{4} (n+k)^2 .$$

A027578: ...1455 1630 1815 **2010** 2215 2430 2655 ...

19) Существует и такая экзотическая последовательность: номера n такие, что 2^n и 2^{n+1} в троичной системе счисления имеют одинаковое количество единиц, а также равное число цифр (длину записи).

A056735: ...1785 1869 1948 **2010** 2181 2408 2563 ...

20) Номера n такие, что генерирующий многочлен Эйлера $E(n) = n^2 + n + 41$ в своем разложении на сомножители содержит квадрат некоторого числа.

A097823: 40 603 798 890 917 1245 1253 1318 1640 1651 1721 **2010** 2069 2251 ...

Например: $E(2010) = 1439 \cdot 53^2$; $E(2251) = 397 \cdot 113^2$.

Примечательно, что в работе [7, с. 262–266] предложено два способа, пригодные для построения из простых чисел магических матриц $n \times n$, в клетках которых содержатся простые числа, генерируемые многочленом Эйлера x^2+x+41.

21) Последовательность n простых чисел за минусом 1 таких, что $n^2 + n + 1$ – простое.

A136240: ...1800 1932 1986 **2010** 2016 2112 2136 ...

22) Целые числа n такие, что $n^3/3$ – средняя величина пары простых чисел, то есть она находится в окружении двух простых чисел.

A152788: ...1446 1500 1836 **2010** 2250 2304 2820, ...

$2010^3/3 = 2706867000 \rightarrow$ (2706866999 и 2706867001) – пара простых чисел.

23) Номера такие, что $7 \cdot 3^n - 2$ простое,

A058605: ... 1150 1575 1879 **2010** 2439 3197 3625 ...

Сразу и не верится, но следующее 960-значное число действительно простое: $7 \cdot 3^{2010} - 2 =$

```
722470346800795984291682889009378294204194275743923127517919226465864493341180 73
257021089191327688449532543050759677706103252374339009037088955050953599081101 27
952219235314372570996012241144401530459323934010831539890755939322804392693556 73
202206402684829158613576637551723134986667681933992682266030809646240716226659 91
259161860194947420667081554085399929887770282642823979772006975265499668927480 58
770804315426963466679223381157960553906529003052483096039451121150434639543685 44
495116422126369315394522090555355424838340700794701889282457651802222330327097 19
392840572682321135706147019016532903962155316049984876054787286689046432247687 70
703168640554179021410698505852345156755779931717545889054595650855824871601055 42
749304277750189588699453777968675772030872436131748799690668114404323208415124 78
895510608194166988177765076087821695267913340865025842289249228859700042640607 51
848813772988569949550887983848986442112117342484660064169084313892831716013333 41
```

24) Последовательность $a_n = a_{n-1} + S^2(\overline{n}) = \sum_{k=1}^{n} S^2(\overline{n})$,

где $a_0 = 0$, $S(\overline{n})$ – сумма цифр числа n. В частности, $a_{44} = 2010$.

A074784: ...1861 1897 1946 **2010** 2091 2191 2312,...

25) Сумма квадратов произведений термов по всем разделениям n на возможные составные (неповторяющиеся) части.

В частности имеем:

$n = 6$: $6^2 + (1\cdot5)^2 + (2\cdot3)^2 + (1\cdot2\cdot3)^2 = 161$;

$n = 9$: $9^2 + (1\cdot8)^2 + (2\cdot7)^2 + (3\cdot6)^2 + (4\cdot5)^2 + (1\cdot2\cdot6)^2 + (1\cdot3\cdot5)^2 + (2\cdot3\cdot4)^2 = 2010$.

A092484: 1 4 13 25 77 161 393 726 **2010** 3850 7874 16791 ...

26) Числа, которые делятся на сумму факториалов их цифр.

Пусть $N = \overline{a_k a_{k-1} ... a_0} = \sum_{j=k}^{0} a_j 10^j$, где a_j – составные цифры числа N.

Сумма факториалов цифр равна $s = \sum_{j=0}^{k} a_j!$

В числовую последовательность a_n включаются те числа N, которые делятся нацело на величину s, то есть $N = 0 (\mathrm{mod}\, s)$. В частности, $a_{33} = \underline{2010}$.

A093325: ...1320 1330 2000 **2010** 2030 2100 2110 ...

27) Любопытно, но существует и такой специфический ряд чисел, который состоит из самых маленьких доступных номеров так, что последняя цифра n и первая цифра $n+1$ дают в сумме 2.

Чтобы стало понятнее, приведем начало этого ряда полностью:

A098176: 1 10 20 21 11 100 200 201 101 110 210 211 111 120 220 221 121 130 230 231 131 140 240 241 141 150 250 251 151 160 260 261 161 170 270 271 171 180 280 281 181 190 290 291 191 1000 **2010** 2011 1001 1010 2020

2... 2... 2... 2 2

28) Похожая и не менее занимательная последовательность. Её элементы $a(n)$ равны наименьшему положительному целому числу, которое еще не использовалось и начинается с последних двух цифр предыдущего элемента $a(n-1)$.

A098753: 10 1010 1011 11 110 1012 12 120 20 **2010** 1013 13 130 30 3010 1014 14, …

Например, после 2010 должно идти число, начинающееся на две последние цифры, то есть 10. Далее идут цифры 13, поскольку 1011 и 1012 уже были.

Наиболее примечательным в этой последовательности является то, что наше исследуемое число появилось не только весьма рано, но и расположено на почетном 10 месте в 10-ричной системе счисления. Вот такие числовые узоры.

29) Самая медленно увеличивающаяся последовательность, в которой разность между числом, сформированным последним парой цифр элемента $a(n-1)$ и числом, составленным из первой пары цифр $a(n)$, равняется 10.

A101244: 0 10 20 100 101 111 211 ... 1808 1809 1909 1910 **2010 ...**

Так, элемент 1808 заканчивается на 08, поэтому следующий элемент начинается с $08 + 10 = 18$. Цифры 09 добавляются из расчета медленного возрастания последовательности так, чтобы следующий элемент начинался с 19 и т.п.

Примечательно, что наше число 2010 занимает здесь почетное 50-е место.

30) Рекуррентный ряд $a_n = 2(n-1)a_{n-1} - (n-1)a_{n-2} = (n-1)(2a_{n-1} - a_{n-2})$ с начальными условиями $(a_0, a_1) = (0, 1)$.

A098753: 0 1 2 6 30 216 **2010** 22824 305466, ...

31) Номера n такие, что сумма s_n простых сомножителей числа n (с их повторением) является "гармонической парой".

Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ – каноническое разложение числа на простые сомножители p_k с их кратностью α_k, которое единственно [3, с. 21].

Найдем сумму произведений простых сомножителей на их кратности $s = \sum_{i=1}^{k} p_i \alpha_i$.

Повторяем операцию разложения только уже для числа s до тех пор, пока не останутся два сомножителя (когда такое возможно) $a < b$.

И далее осуществляется проверка на их совместимость в качестве "гармонической пары" с числом $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$ для целочисленного значения: $a = \left\langle b \cdot \Phi^{-1} \right\rangle$, где $\langle \xi \rangle$ – операция округления числа ξ до ближайшего целого.

Примеры.

$1629 = 3^2 \cdot 181 \to 3 \cdot 2 + 181 = 187 = 11 \cdot 17, \qquad \langle 17 \cdot 0{,}618 \rangle = \langle 10{,}51 \rangle = 11;$

$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \to 2 + 3 + 5 + 67 = 77 = 11 \cdot 7, \qquad \langle 11 \cdot 0{,}618 \rangle = \langle 6{,}8 \rangle = 7.$

A108219: ...1448 1629 1675 **2010** 2144 2379 2412 ...

32) Последовательность $s_n = \left\langle \frac{1}{3}\left(35 + \sum_{k=1}^{n-1} s_k\right) \right\rangle$ с начальным условием $s_1 = 11$.

A120156: ...848 1131 1508 **2010** 2680 3574 4765 ...

33) Биномиальная трансформация $\left[C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right] \times [1, 3, 3, 1; (1, -1), (1, -1), \ldots]$.

Производящая функция равна $G_f = \frac{1+x^4}{(1-x)^4}$.

Аналитическое определение ряда $a_n = \frac{n\left(11+n^2\right)}{3}$.

Примеры:

$a_5 = 36 = (1, 4, 6, 4, 1) \times (1, 3, 3, 1, 1) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 12 + 18 + 4 + 1.$

A140226: 1 4 10 20 36 60 94 140 200 276 370 484 620 780 966 1180 1424 1700 **2010** 2356

34) Возрастающая последовательность такая, что a_{n+1} – наименьшее целое число, которое содержит все цифры a_n, с начальным условием $a_1 = 2$.

A155890: 2 12 21 102 120 201 210 1002 1020 1200 2001 **2010** 2100 10002 10020 ...

35) Сумма s_n строк (слоев) числового треугольника $T_{n,m} = 2nm + n + m - 7, \quad m = \overline{1, n}$

Таблица 4

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	s_n
1	-3												-3
2	0	5											5
3	3	10	17										30
4	6	15	24	33									78
5	9	20	31	42	53								155
6	12	25	38	51	64	77							267
7	15	30	45	60	75	90	105						420
8	18	35	52	69	86	103	120	137					620
9	21	40	59	78	97	116	135	154	173				873
10	24	45	66	87	108	129	150	171	192	213			1185
11	27	50	73	96	119	142	165	188	211	234	257		1562
12	30	55	80	105	130	155	180	205	230	255	280	305	**2010**

Аналитически сумма равна $s_n = \left(2n^3 + 5n^2 - 13\right)/2$; $s_{12} = \underline{2010}$.

A162262: –3 5 30 78 155 267 420 620 873 1185 1562 **2010** 2535 3143 ...

36) Последовательность $P_n = p_n \dfrac{p_{n-1} - 1}{2}$, где p_n – простые числа, $n \geq 2$; $P_{18} = 2010$.

A014302: ...1219 1534 1769 **2010** 2343 2555 2844 ...

37) В работе [8] показано, что любое натуральное число является членом последовательности Фибоначчи с теми или иными начальными условиями. Алгоритм идентификации очень простой. Пусть n номер исходного числа f_n в ряду. Тогда $f_{n+1} = \langle f_n \Phi \rangle$, где $\langle \xi \rangle$ – знак округления ξ до ближайшего целого. Теперь обратным ходом восстанавливаем сам ряд и его начальные условия $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$, $f_{n-2} = f_n - f_{n-1}$ и т. д.

Получаем: $(f_0, f_1) = (18, 48)$, а отсюда и сама обобщенная последовательность:

(18 48) 66 114 180 294 474 768 1242 **2010** 3252 5262 8514 ...

Аналогичным образом определяются начальные условия $(f_0, f_1, f_1) = (6, 9, 14)$ для последовательности Трибоначчи $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}$, а отсюда и сам ряд:

(6 9 14) 29 52 95 176 323 594 1093 **2010** 3697 6800 ... .

38) Рассмотрим ряд, образуемый из наименьших значений k таких, что $k \cdot M_p(n) + 1$ – простое, где $M_p(n)$ – простое число Мерсенна.

Напомним, что простые числа Мерсена – это числа M_p, представимые в виде $2^p - 1$.

Они вызывают особый интерес у математиков, поскольку позволяют находить новые, почитаемые еще с античных времен совершенные числа[5].

Примечательно, что алгоритм построения четных совершенных чисел описан еще в "Началах" Евклида (книга 9, последние предложение № 36) [9, с. 98–100].

---

[5] *Совершенное число* (СЧ) равно сумме всех своих собственных делителей, кроме самого себя. Первое СЧ – 6 (1+2+3=6), следующее – 28 (1+2+4+7+14=28). По мере роста натуральных чисел, СЧ встречаются все реже (A000396): 6, 28, 496, 8128, 33550336, 8589869056, 137438691328, ...

Там было показано, что числа вида $2^{p-1}\left(2^p-1\right)$ являются совершенными, если p и 2^p-1 являются простыми числами (Мерсенна). Позже Эйлер доказал, что все четные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом.

В настоящее время найдено 47 простых чисел Мерсенна (табл. 5).

Таблица 5

Простые числа Мерсенна (http://primes.utm.edu/mersenne/index.html#known)

N	A000043 p	A098556 k	Количество цифр в M_p	A000668 M_p
1	2	2	1	3
2	3	4	1	7
3	5	10	2	31
4	7	4	3	127
5	13	46	4	8191
6	17	12	6	131071
7	19	16	6	524287
8	31	46	10	2147483647
9	61	52	19	2305843009213693951
10	89	136	27	618970019642690137449562111
11	107	166	33	162259276829213363391578010288127
12	127	114	39	170141183460469231731687303715884105727
13	521	336	157	
14	607	154	183	
15	1279	1474	386	
16	2203	156	664	
17	2281	1086	687	
18	3217	1816	969	
19	4253	**2010**	1281	
20	4423	9436	1332	
…	…	…	…	
47(?)	43112609		12 978 189	

Считалочки. Свойства выбранного нами новогоднего числа можно было бы продолжать и дальше. Хотя уже и так становится понятным и очевидным главное: практическое любое число может быть наделено самого разного рода особенностями.

Подобным образом и магические квадраты чисел при их хорошем изучении получают ясные эффективные алгоритмы без всякой напускной магии на основе комбинаторных закономерностей, превращаясь в увлекательный математико-игровой процесс.

Какие моменты в этой связи хотелось бы отметить, особенно в преддверие Нового года? – Сколько существует человек, столько бытуют и самые невероятные предсказания конца света. Но интересно то, что некоторые из них построены на числовом факторе.

Что можно сказать на этот счет тоже категориями чисел? – Слишком ничтожна вероятность, чтобы зародившаяся совсем недавно жизнь на Земле так быстро прекратила свое существование. По космическим меркам это даже меньше, чем мгновение.

У нас чуть ли не каждый год происходит конец света.

Сегодня стало модным прикрываться великим циклом календаря Майя.

Хотя с таким же успехом к этому можно приурочить обратное явление типа на наступления новой эры или эпохи духовного прозрения.

Мы не только не знаем все активные силы, действующие в обществе и природе.

Нам еще не известны и многие законы их развития и взаимодействия.

Хотя нет никаких гарантий против человеческой глупости, помноженной маразм и ядерные арсеналы, или реальной космической аварии в отдаленном будущем.

Ближайшее время в целом благоприятно, и никакие опасности Землю не подстерегают.

Достаточно вспомнить истерику по поводу прошлых небесных тел, которые якобы должны были уничтожить нашу планету. «Даже такой астероид "Апофис". В 2004 году считалось, что вероятность его столкновения с Землей составляет 1 к 50. После пересчета уточнили, что в 2029 вряд ли он столкнется, а вот в 2036 уже вероятность достаточно велика. Но затем и она была понижена до 1 к 45 тысячам, а сейчас – 1 к 12 миллионам»[6].

Да и как ко всему этому относиться серьезно, если предсказания новых концов света, как правило, совпадают с массовыми обострениями душевно неуравновешенных персон.

И все-таки, наступит ли в *n*-м году конец света? – Годом раньше, или годом позже он, конечно, когда-нибудь наступит, и не обязательно буквально. Это может произойти в виде экологической, политико-военной или финансовой катастрофы. Либо как кардинальное изменение отношения людей к жизни и, как следствие, начало нового, качественного иного этапа развития человеческой цивилизации. Да мало ли?

Для устранения числового фактора теоретически можно начать обратный отсчет летоисчисления или перескочить несколько "злополучных" нумерологически неблагоприятных чисел-годов. – Но это ничего не меняет в сущности, поскольку число здесь – не причина, а следствие, выступающее в качестве искусственно образованного фиксатора событий. И не более того.

А что касается нынешних поколений людей, то они слишком высокого о себе мнения, чтобы именно при своей жизни соприкоснуться с судным днем.

По большому счету, это большое (уникальное) событие для человека стать очевидцем практически невероятных событий, ассоциируемых с концом света. – Тем более что никто этого и не заметит.

Но, увы! Не в планах природы разбрасываться подобными вещами налево и направо.

Так что придется ограничиться размеренным движением колеса истории, несмотря на всевозможные пугалки-страшилки, которые все больше от лукавого.

А то, что человек может погубить сам себя, – Вселенная не виновата.

Тем более, для нее это даже меньше, чем эпизод. – Практически никто и ничто в мироздании этого даже не заметят, сколько б мы ни пыжились.

Да и вся возня вокруг подобных вещей, – это больше стремление некоторых индивидуумов привлечь к себе внимание. Поскольку за этим стоит реальная возможность заработать не только на хлеб с маслом. Вот и дурачат друг друга.

Ну, а числа в отдельных случаях выступают просто ширмой.

Этим великолепно в свое время пользовался еще великий Пифагор. Только когда было нужно, он мог спокойно отделять религиозно-приносное от внятного научного понимания.

Числа действительно "правят миром", так как материя количественно выражаема.

Хотя на уровне здравого смысла интуитивно понятно, что в интерпретации числа «количество предметов не означает, скажем, их суммарный вес» [1].

Имея прообраз вездесущего "демона Лапласа" с необъятным компьютерным мозгом, можно теоретически просчитать поведение Вселенной на многие лета вперед. Только человеку это вряд ли под силу. Вот и остается ему гадание на "числовой гуще".

А что числа? – Это абстракция. Хотя их свойства наблюдаемы. И нужно быть глупцом, чтобы этого не замечать.

Но природа живет без чисел. Ей все равно, какими системами счисления ее обсчитывает для своего удобства человек.

---

[6] Караш Ю. Солнце и Юпитер защищают Землю от неминуемой гибели // 28.08.2009. – http://www.vesti.ru/doc.html?id=312602

Большинство договорилось, что следующий год будет 2010-й. Ну, и хорошо.

Только Вселенная не крутится вокруг Земли. Космос живет своей жизнью, и ему вовсе нет дела, что и какими знаками себе рисуют земляне.

Так что, чем бы дитя ни тешилось ... в 2010 году всё будет хорошо.

А человечеству пора уже подумать не столько о дальнейшей насыщенности информационного пространства, сколько о создании специальной системы сдерживания с защитными фильтрами, "числовыми отвалами", "постами на новости" и т.п. Надо полагать, что числовой информационный бум не менее вреден, чем его отсутствие.

Ну, а касательно числа 2010 или ему подобного, не будем забывать, что каждому Новому году, независимо от его номера, предшествует старый год, а "старый конь борозды не испортит". И никакая n-я земная борозда не окажется последней лишь на том основании, что человек ее абстрактно окрестил лишенным особого смысла понятием-образованием n.

Пропахивая очередную борозду в просторах Вселенной, главное чтобы выполнялось "правило трех не": 1) не попадать на минные поля мироздания; 2) не нарушить правила вселенского движения и 3) не забывать о технике безопасности ... при работе на тракторе.

С Новым годом!

Литература.

1. *Успенский В.А.* Семь размышлений на темы философии математики // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.11127, 08.04.2004. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0202/007a/02020021.htm.
2. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.: Мир, 1965. – 456 с.
3. *Виноградов И.М.* Основы теории чисел: 6-е изд., испр. – М.: Техтеорлит, 1952. – 182 с.
4. *Smarandache F.* Definitions, Solved and Unsolved Problems, Conjectures and Theorems in Number Theory and Geometry. – Xiquan Publishing House, 2000. – 84 p. – http://fs.gallup.unm.edu//Definitions-book.pdf.
5. *Gardner M.* Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments. – NY: Freeman and Company, 1986. – p. 76.
6. Бугаенко В.О. Уравнения Пелля. – М.: МЦ МНО, 2001. – 32 с.
7. *Чебраков Ю.В.* Теория магических матриц. – СПб.: Изд-во ВВМ, 2008. – 270 с.
8. *Василенко С.Л.* Идентификация рекуррентных рядов // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15487, 25.08.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161531.htm.
9. *Начала Евклида.* Книги VII–X: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949. – 512 с.