Грант Аракелян

24 КАК ЧИСЛО ПРИРОДЫ

Мир чисел удивителен и заманчив. Математическая теория чисел, изучающая формальные свойства главным образом целых чисел, вправе считаться одной из наиболее важных и интригующих областей научного исследования. Но особую значимость числа приобретают именно тогда, когда их соотносят с явлениями окружающего мира либо с воображаемыми реалиями. На каждом шагу приходится иметь дело с числами, числовыми соотношениями и конструкциями, отражающими различные стороны нашей деятельности: от якобы предопределяющей судьбу человека даты рождения и даты смерти до физических параметров Вселенной, от числовой мистики и суеверий до точных формул естественных наук, от сомнительных нумерологических совпадений до удивительных пропорций в природе и искусстве. Одни числа встречаются при этом довольно часто, другие реже, третьи изредка, четвертые не встречаются практически никогда. Числа, встречающиеся чаще других, это выделенные величины, константы бесконечного числового континуума, играющие большую роль в науке и технике, в оккультизме, в искусстве и повседневной жизни. Все наиболее значительные выделенные числа можно разбить на три группы с несколькими подгруппами в каждой.

1. *Математически выделенные числа:*
а) фундаментальные математические константы (ФМК)
б) математические константы (МК)
в) члены важнейших числовых последовательностей

2. *Выделенные числа природы:*
а) фундаментальные физические постоянные (ФФП)
б) физические постоянные (ФП)
в) числа выделенные в тех или иных разделах естествознания

3. *Сакральные числа:*
а) математической магии
б) мистики чисел

В интересах дальнейшего изложения дадим предельно краткую характеристику отдельных групп и подгрупп. Наиболее значительна, по крайней мере с точки зрения оснований науки, группа выделенных математических величин. Фундаментальные математические константы, такие как знаменитые числа π и e, относятся к категории первичных, основополагающих элементов математического и вообще научного знания. Это по сути исходные величины, "кирпичики", посредством которых может быть естественным образом построен континуум действительных и комплексных чисел **[1**, 123−129**]**; с помощью ФМК должны по идее строиться и безразмерные фундаментальные физические постоянные. Помимо нескольких ФМК **[2]** и их простых комбинаций, вроде допустим $e^{2\pi}$, $\pi^2/\sqrt{2}$, e^{γ} (γ – постоянная Эйлера), существует множество не столь универсальных математических констант (МК) частного типа, играющих важную роль в отдельных разделах математики и ее приложениях. Это например ϕ – число золотого сечения, K – постоянная Хинчина, α и δ – постоянные Фейгенбаума и несколько сотен, других величин **[3]**. Математика богата и бесконечными числовыми последовательностями, среди которых наибольшей пожалуй известностью пользуются множество простых чисел, ряды Фибоначчи, Эйлера, Бернулли, Мерсенна, биномиальные коэффициенты и совершенные числа. При большом желании члены таких последовательностей также могут быть причислены к категории математически выделенных чисел, с той однако оговоркой, что в каждом подобном случае более важен принцип, положенный в основу образования данной последовательности, чем конкретное значение того или иного ее члена.

Список выделенных чисел природы естественно возглавляют ФФП, играющие исключительную роль в науке и составляющие признанную основу физической теории. Разумеется здесь речь может идти лишь о безразмерных величинах вроде постоянной тонкой структуры $\alpha = \hbar c/e^2 \approx 1/137$. Все безразмерные ФФП содержательно являются природными величинами, а формально – математическими числами **[4]**, точные значения которых пытаются определить без малого уже сто лет **[5]**. Истинную, "независимую" ФФП порой очень сложно или даже невозможно отличить от просто ФП, поскольку четких критериев фундаментальности физической постоянной нет; в одних случаях ФП могут считаться комбинациями нескольких ФФП, в других же случаях это скорее вопрос соглашения. Выделенными природными постоянными, хотя и не столь высокого ранга как признанные ФФП и ФП, вправе считаться и многие естественнонаучные, преимущественно физические величины, такие как "магические" числа 2, 8, 20, 28, 50, 82, 114, 126, 184 для протонов и нейтронов, отвечающие наиболее устойчивым состояниям атомных ядер.

Впрочем магическими обычно называют числа, которым приписывается мистическая сила, придается некий сакральный смысл, совершенно не обязательно связанный с реалиями математической а тем более естественнонаучной теории. Числовая магия с очевидным математическим уклоном явно просматривается например в случае совершенных чисел 6, 28, 496, 8128, …, равных сумме всех своих делителей или, скажем пары дружественных чисел

220 и 284 (древний Египет, Пифагор, Платон, Евклид, Библия), каждое из которых равно сумме делителей другого. Однако в большинстве случаев (вторая подгруппа группы сакральных чисел) числовая мистика это совершенно особый мир, который малопонятен и едва ли приемлем с точки зрения рационального мышления. Магия первых тринадцати чисел, магия 40, 666 (“число зверя” в Апокалипсисе), 108 (сакральное число буддизма) и т. д. обычно прямо не соотносится с арифметикой этих чисел; формальная сторона дела здесь на заднем плане либо и вовсе не заметна.

Завершая беглый обзор различных типов выделенных чисел, отметим также, что одно и то же число может быть одновременно и математической и физической величиной, и природным и магическим числом. Не останавливаясь на этом, займемся наконец числом 24. Точнее, семейством числа 24, понимая под этим ограниченные множества величин типа $A = n \cdot 24^k$ и $B = f(A)$, где переменные могут независимо друг от друга принимать значения n = 1/4, 1/2, 2, 3, 4, …; k = 1, 2, 3, а f есть некая математическая функция, к примеру экспонента. Интерес к данному семейству разумеется не случаен, но прежде чем обратиться к существу вынесенной в заголовок проблемы, кратко представим некоторые общеизвестные факты.

Среди ФМК и МК целых чисел вообще очень мало и число 24 с его простейшими гомологами здесь, похоже, не отмечено. В известных числовых последовательностях, которые в своем классическом варианте представляют собой упорядоченные бесконечные ряды целых или рациональных чисел, можно найти почти любое целое число из первой сотни, и тот факт, что допустим последовательность совершенных чисел начинается с шестерки, мало что значит. Следует поэтому признать, что математически числа типа A ничем особенно не выделяются даже среди других целых чисел. Есть правда одно небольшое “но”. Дело в том, что у чисел типа A много делителей и с практической точки зрения это немалое преимущество. Не случайно многие считали и считают, что в качестве основания позиционной системы счисления число 12, имеющее четыре (не считая единицы и самого числа) делителя, гораздо удобнее 10, имеющего лишь два делителя. Впрочем двенадцатеричная система счисления частично применяется в системах мер весов и длины разных стран, а также в общепринятом делении суток на часы. Обычное время вообще фактически измеряется посредством сразу трех систем счисления: сутки делятся на часы по двенадцатеричной системе, часы на минуты и минуты на секунды по древней вавилонской системе, основу которой составляет имеющее больше всего делителей среди чисел первой сотни 60, наконец доли секунды определяются по десятеричной системе.

Не выделенное математически, по крайней мере явно, число 24, точнее его гомолог 12, относится к наиболее известным сакральным числам. Это однако отдельная тема, далекая от интересующей нас проблемы выделенности числа 24 в физической теории. Сейчас мы предпримем шесть маленьких путешествий в основном по малоизвестным, а то и вовсе неизвестным разделам физической теории, призванных в итоге утвердить число 24 – центральный член семейства чисел типа A и B – в качестве одной из ФФП.

1. Великое объединение и группа симметрии $SU(5)$

Начнем наши путешествия с популярного сегодня маршрута, связанного с гипотезой "великого синтеза" сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий **[6]**. В основе Великого объединения (ВО) лежит идея объединения трех фундаментальных взаимодействий в единое калибровочное взаимодействие. Известно, что сильное взаимодействие характеризуется локальной цветовой симметрией $SU(3)_c$, слабое – симметрией $SU(2)$, электромагнитное – симметрией $U(1)$, а объединенное электрослабое взаимодействие обладает группой локальной симметрии $SU(2)\otimes U(1)$. В основе ВО лежит гипотеза, что сильное и электрослабое взаимодействия являются частью единого калибровочного взаимодействия с более широкой группой локальной симметрии G, описываемого константой α_{GUT}. В точке $m_{\mathrm{GUT}} \sim 10^{16}$ Гэв на оси абсцисс с переходом от бóльших масс к меньшим единая константа α_{GUT} в результате нарушения симметрии группы G расчленяется на три компонента, которые медленно расходятся по логарифмическому закону. Определению численного значения безразмерной константы α_{GUT} мы посвятим свое второе путешествие, что же касается выбора группы симметрии G, он обусловлен следующими требованиями: 1) искомая группа должна содержать произведение $SU(3)_c\otimes SU(2)\otimes U(1)$ в качестве подгруппы; 2) группа G должна иметь представления, в которые могут быть включены кварки и лептоны трех поколений; 3) группа G минимальна среди всех имеющихся возможностей. Единственной группой, отвечающей всем трем требованиям, является знаменитая группа симметрии $SU(5)$, содержащая как раз 24 генератора, каждому из которых отвечает свой векторный бозон: фотон γ, $W^{\pm}$- и Z^0-бозоны, 8 глюонов и 12 X- и Y-частиц – в общей сложности 24 частицы **[6, 7]**. Таково и общее число кварков, лептонов и их античастиц: 12 фермионов трех поколений (u, d, e^-, ν_e), (c, s, μ^-, ν_μ), (t, b, τ^-, ν_τ) и столько же античастиц. Следовательно $SU(5)$ это минимальная группа симметрии для 48 фундаментальных частиц, включающей 24 бозона и 24 фермиона. Кроме того спонтанное нарушение этой симметрии до группы $SU(3)_c\otimes SU(2)\otimes U(1)$ происходит посредством образования так называемого вакуумного конденсата 24-плета хиггсовых полей. Следует однако заметить, что стандартная модель ВО, основанная на минимальной группе $SU(5)$, приводит к серьезным трудностям; выбор подходящей группы, если он вообще возможен, очень сложен и ясности в этом вопросе нет пока никакой. В отличие же от бозонов все 24 фермиона экспериментально обнаружены и измерены, а существование именно трех, а не более поколений лептонов доказывается теоретически с хорошей точностью, притом независимо от моделей ВО.

Можно следовательно констатировать, что количество кварков и лептонов (вместе с их античастицами) трех поколений в любом случае равно 24 и даже в случае обнаружения новых сверхтяжелых кварков и лептонов это число сохранит свой статус константы для данной группы фундаментальных частиц. Что касается бозонов, а также хиггсовых полей, то ситуация здесь достаточно неопределенна. Число 24 может считаться константой числа фундаментальных бозонов лишь с той степенью уверенности, с какой вообще можно считать справедливой гипотезу Великого объединения, и в той мере, в какой количество указанных частиц определяется математическими характеристиками группы симметрии $SU(5)$.

2. Константа α_{GUT} Великого объединения

Второе путешествие, как и обещано, посвящено константе α_{GUT}. В рамках существующих моделей ВО нахождение точного математического значения этой величины не представляется сегодня возможным, а вот приблизительная – в пределах десятых долей процента – оценка числа α_{GUT} достижима. Этим мы сейчас и займемся, применяя стандартные методы **[8]**, используя последние экспериментальные данные **[9]** и опуская некоторые детали, подробно изложенные в разделе 5.19 монографии **[10]**. Согласно основной концепции ВО электромагнитное, слабое и сильное взаимодействия, характеризуемые соответствующим образом нормированными функциями $\alpha_1(\mu)$, $\alpha_2(\mu)$, $\alpha_3(\mu)$, сходятся при значении массы $\mu = m_{\mathrm{GUT}} \sim 10^{16}$ Гэв/c^2 к магической точке $\alpha_{\mathrm{GUT}}(m_{\mathrm{GUT}})$. Конкретно имеются в виду функции

$$\alpha_1^{-1} = \frac{1}{\alpha_1(\mu)} = \frac{3\cos^2\theta_{\mathrm{W}}}{5\alpha} \quad (2.1)$$

$$\alpha_2^{-1} = \frac{1}{\alpha_2(\mu)} = \frac{\sin^2\theta_{\mathrm{W}}}{\alpha} \quad (2.2)$$

$$\alpha_3^{-1} = \frac{1}{\alpha_3} = \frac{1}{\alpha_s} \quad (2.3)$$

которые должны по теории сойтись в точке $\alpha_{\mathrm{GUT}}^{-1}(\mu = m_{\mathrm{GUT}})$. Движение к магической точке происходит по общему закону

$$\alpha_j^{-1}(m_{\mathrm{GUT}}) = \alpha_j^{-1}(m_{\mathrm{Z}}) - \frac{b_j}{2\pi}\ln\frac{m_{\mathrm{GUT}}}{m_{\mathrm{Z}}}, \qquad j = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

с безразмерными множителями b_j, зависящими от модельных допущений, в частности от количества хиггсовских дуплетов. Обозначая число поколений фундаментальных частиц через n_{F}, приведем значения b_1, b_2, b_3 для модели $SU(5)$ с одним дуплетом хиггсов и для модели $SUSY\ SU(5)$ с двумя хиггсовскими дуплетами.

Таблица 1

Значения коэффициентов b_j
в моделях с одним и двумя дуплетами хиггсонов

$\boldsymbol{b_j}$	$\boldsymbol{SU(5)}$	$\boldsymbol{SUSY\ SU(5)}$
$\boldsymbol{b_1}$	$\frac{4}{3}n_{\mathrm{F}}+\frac{1}{10}$	$2n_{\mathrm{F}}+\frac{3}{5}$
$\boldsymbol{b_2}$	$-\frac{22}{3}+\frac{4}{3}n_{\mathrm{F}}+\frac{1}{3}$	$-6+2n_{\mathrm{F}}+1$
$\boldsymbol{b_3}$	$-11+\frac{4}{3}n_{\mathrm{F}}$	$-9+2n_{\mathrm{F}}$

Магическую точку ВО можно конечно найти по любому из трех уравнений системы (2.4), но результат зависит от числа n_{Φ}, поэтому нужно учесть разные варианты. Поскольку $\alpha_{\mathrm{GUT}}^{-1}$ число по определению положительное, физически допустимы лишь значения $n_{\Phi} \le 5$, а поскольку число поколений фундаментальных частиц не меньше трех, остаются следующие возможности:

$$n_{\Phi}=3 \quad \alpha_{\mathrm{GUT}}^{-1} \approx 24{,}3 \tag{2.5}$$

$$n_{\Phi}=4 \quad \alpha_{\mathrm{GUT}}^{-1} \approx 13{,}8 \tag{2.6}$$

$$n_{\Phi}=5 \quad \alpha_{\mathrm{GUT}}^{-1} \approx 3{,}2 \tag{2.7}$$

Надо выбрать одно значение из трех, это не так сложно. Дело не только в том, что последние два числа очень далеки от ожидаемых значений магической точки, не выходящих согласно различным оценкам за пределы интервала $20 < \alpha_{\mathrm{GUT}}^{-1} < 50$, или $0{,}02 < \alpha_{\mathrm{GUT}} < 0{,}05$. Группа $SU(5)$, содержащая 24 генератора, связана именно с *тремя* поколениями лептонов и кварков; есть немало теоретических и эмпирических оснований, см. **[11]**, считать, что n_{Φ} действительно равно 3. Особых сомнений на этот счет нет, анализ астрономических и космологических пределов фактически полностью исключает возможность существования четвертого нейтрино **[12]**.

Остается осмыслить число $\approx 24{,}3$ при условии, что модель ВО в представленном здесь варианте верна и что $\alpha_{\mathrm{GUT}}^{-1}$ такая же реальность физического мира как уже устоявшиеся, признанные безразмерные ФФП. Понятно, что абсолютная погрешность ее определения довольно велика, поскольку все теоретические расчеты производились лишь в первом приближении, без учета пороговых эффектов вблизи точек, соответствующих частицам с массами $m_{\mathrm{Z}} < m < m_{\mathrm{GUT}}$. С большей или меньшей уверенностью можно лишь сказать, что анализ наиболее популярной модели Великого объединения $SUSY\ SU(5)$ приводит к показанному на рисунке значению константы $\alpha_{\mathrm{GUT}}^{-1}$, близкому или даже равному 24.

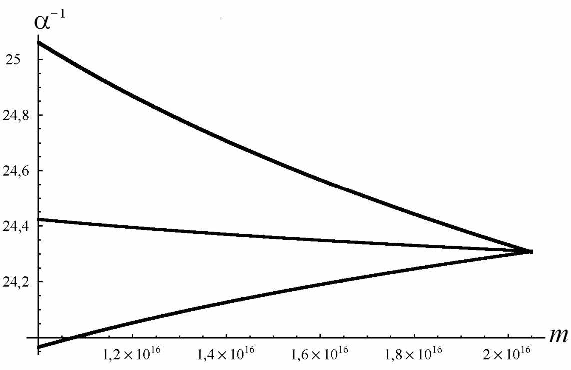

Рис. 1
Последний отрезок пересекающихся в точке $\alpha_{\mathrm{GUT}}^{-1}$
констант трех взаимодействий

Разумеется все вычисления производились строго в рамках данной модели; ничего нами здесь не убавлено и не прибавлено, а число $\alpha_{\mathrm{GUT}}^{-1} \approx 24$ не противоречит имеющимся в литературе по Великому объединению и симметрии $SUSY\ SU(5)$ результатам конкретных вычислений, см. например **[13]**. Как бы то ни было можно думать, что число 24 идеально подходит на роль магического числа модели, где ставится как раз задача объединения 24 фермионов и 24 бозонов посредством 24 хиггсонов. Где еще им объединяться, как не в точке 24? Притом в этой точке выполняются сразу шесть равенств

$$\alpha_1^{-1} = \alpha_2^{-1} = \alpha_3^{-1} = \alpha_{\mathrm{s}}^{-1} = \alpha_{\mathrm{W}}^{-1} = \alpha_{\mathrm{GUT}}^{-1} = 24$$

Не является ли тогда Великое объединение теорией ФФП 24 в той мере, в какой квантовая электродинамика является теорией постоянной Зоммерфельда $\alpha^{-1} \approx 137$? Выглядит заманчиво и красиво, а может слишком красиво, чтобы быть правдой. Желаемое обычно редко совпадает с действительным, по крайней мере в области физической теории. В любом случае только будущее покажет, верна ли вообще идея объединения констант связи трех фундаментальных взаимодействий в одной точке на пути к суперобъединению, включающему и гравитацию. А если верна, происходит ли объединение по схеме $SUSY\ SU(5)$ и чему равно число $\alpha_{\mathrm{GUT}}^{-1}$ на самом деле.

3. Истинное значение постоянной Ферми

Покинув ВО, продолжим наше рассмотрение теперь уже в рамках теории ЛМФ, впервые представленной в готовом виде в работе **[2]**, а в более полном и завершенном варианте – в готовящейся к изданию капитальной монографии **[10]**. Здесь нас интересует лишь то, что непосредственно соотносится с числом 24 и его гомологами, однако без хотя бы схематичного знакомства с основными положениями и некоторыми полученными в теории результатами обойтись невозможно. В основу теории ЛМФ положена идея формального и содержательного единства математической *логики*, аксиоматической *математики* и фундаментальной *физики*; отсюда и аббревиатура ЛМФ. Схематически фундаментальную теорию со всем ее окружением удобно изобразить в виде дерева: атмосфера – философия, почва – методология, корни – логика, ствол – чистая математика, ветви – фундаментальная физика, крона – остальная физика, плоды дерева – приложения физики в науке и технике. Формализм теории ЛМФ состоит из пяти последовательно строящихся одна за другой частей: логических постулатов и математических аксиом **AG**, функциональных уравнений **E**, физических кодов **C** и системы измерения физических величин **A**. Из всего пятичленного формализма **AGECA** теории ЛМФ нам требуются лишь сведения, касающиеся последней ее составляющей **A** и частично **E**. Решением системы функциональных уравнений **E**, использующей только исходные ресурсы логико-математической системы **AG**, является система основных математических функций и ФМК. Это функции экспоненты и логарифма и константы e, π, i, 2, γ, W(1), ^{3}, которые вместе с аксиоматически заданным нулем образуют систему из восьми первичных математических чисел. Последние две величины – постоянные суперпозиции – суть результат решения функционального уравнения

$$\mathbf{E}_5 = \lim_{n \to \infty} S(S(\ldots S(x)\ldots) = \text{const}$$

где символом S обозначены неизвестные функции, бесконечная суперпозиция которых должна привести к константам не равным другим, а x означает произвольно взятое действительное или мнимое число. Это уравнение, являющееся частью системы из пяти функциональных уравнений **E**, имеет два решения в области элементарных функций: экспонента e^{-x} с константой Ламберта W(1) = 0,56714 32904… и функция $\cos x = (e^{x} + e^{-x})/2$ с константой ^{3} = 0,739085 13321…, которую нетрудно определить с любой степенью точности из трансцендентного уравнения $\cos x = x$. Постоянная суперпозиции ^{3} играет важную роль в построении безразмерной системы измерения физических величин (**A**-системы), а в конечном счете и в утверждении числа 24 как одной из ФФП. Идея **A**-системы состоит в приведении физических величин к форме математического числа, а для этого необходимо во-первых построить систему измерения физических величин, основанную не на граммах, сантиметрах, секундах и т.п., а исключительно на ФФП, и во-вторых свести все физические константы к математическим. Не вдаваясь в какие либо подробности приведем список исходных соотношений **А**-системы:

$$k_{\mathrm{A}} \equiv 1/\ln 2, \quad c_{\mathrm{A}} \equiv \alpha^{-1}, \quad m_{\mathrm{eA}} \equiv \text{з}/\pi^{2}, \quad \hbar_{\mathrm{A}} \equiv \pi^{2}\alpha^{2}/\text{з} \qquad (3.1)$$

где индекс А указывает на принадлежность к **А**-системе, k постоянная Больцмана, c скорость света в вакууме, α^{-1} постоянная Зоммерфельда, или величина обратная постоянной тонкой структуры, m_{e} масса электрона, $\hbar$ постоянная Планка. Это по предположению истинные выражения констант k, c, m_{e}, $\hbar$, позволяющие найти по крайней мере истинное значение любой физической величины с определенной степенью точности. Если какая-либо физическая величина имеет допустим в системе LMTθ (L длина, M масса, T время, θ температура в Кельвинах) численное значение $B_{\mathrm{LMT\theta}}$ и размерность $\mathrm{L}^{p}\mathrm{M}^{q}\mathrm{T}^{r}\theta^{s}$, то в **А**-системе ее значение B_{A} определяется из общей формулы

$$B_{\mathrm{LMT\Theta}} = B_{\mathrm{A}}\, l_{\mathrm{A}}^{p}\, m_{\mathrm{A}}^{q}\, t_{\mathrm{A}}^{r}\, \theta_{\mathrm{A}}^{t} \qquad (3.2)$$

где l_{A}, m_{A}, t_{A}, θ_{A} однозначно определяемые коэффициенты перехода от системы LMTθ к **А**-системе, или наоборот. Константа Ферми, вычисляемая через среднее время жизни мюона τ_{μ} по довольно сложной и постоянно совершенствуемой формуле **[14]**, имеет размерность $\text{см}^{5}\text{г}\cdot\text{с}^{-2}$ в системе СГС, но обычно приводится во внесистемных единицах ГэВ^{-2}. Перевод в систему СГС и применение формулы (3.1) приводит к выражению

$$G_{\mathrm{FA}} = \frac{64\pi^{13}}{\text{з}^{5}} \cdot \frac{R_{\infty}^{3}\alpha}{m_{\mathrm{e}}c^{2}}\, G_{\mathrm{F}} = 1{,}425\,144\,(13)\cdot 10^{-21} \ \ (9{,}1\,\mathrm{ppm}) \qquad (3.3)$$

для истинного значения константы Ферми. На первый взгляд кажется, что значение константы Ферми свидетельствует лишь об относительной малости этого числа на шкале физических величин и больше ничем особенно не примечательно. Однако представление константы в экспоненциальной форме приводит к совершенно удивительному результату

$$G_{\mathrm{FA}} = \mathrm{e}^{-48{,}000\,015(16)} \ \ (0{,}3\,\mathrm{ppm}) \qquad (3.4)$$

Особо отметим, что выражение $G_{\mathrm{FA}} \cong \mathrm{e}^{-48}$ получается чисто механически, как прямое следствие трех последних – для c, m_{e} и $\hbar$ – исходных соотношений (3.1) **А**-системы, составленных вне всякой зависимости с константой Ферми. Но что такое константа G_{F}, входящая во многие уравнения субатомной физики? По своему физическому смыслу это величина, характеризующая интенсивность взаимодействий частиц, которая как известно непосредственно связана с понятием вероятности протекания данного процесса, описываемого функцией типа e^{-x}. Вспомним теперь, что число фундаментальных фермионов n_F – кварков и лептонов – равно 24, а число фундаментальных бозонов n_B согласно модели *SUSY SU*(5) также равно 24. В сумме это как раз 48. Чудо свершилось: константа, математически определяемая посредством функции типа e^{-x} и относящаяся к n_F = 24 фундаментальным фермионам и n_B = 24 фундаментальным бозонам, оказалась равной, притом с точностью порядка 10^{-7}, как раз $e^{-(n_F + n_B)}$:

$$G_{FA} \cong e^{-(24\,+\,24)} \qquad (3.5)$$

Этот поистине удивительный результат может расцениваться и как прямое подтверждение справедливости **А**-системы, следовательно и теории ЛМФ в целом, и как серьезный аргумент в пользу существования трех поколений фермионов, в пользу правильности минимальной модели ВО *SUSY SU*(5) с 24 бозонами. В любом случае с интересующей нас точки зрения есть достаточно веские основания говорить о числе 24 как об одной из ФФП, выражающей количество фундаментальных фермионов и бозонов определенного типа.

4. Постоянная Зоммерфельда

В случае константы Ферми чисто механический перевод размерного значения в безразмерное А-значение оказался достаточным для получения истинного математического выражения для G_F. Но не так просто обстоит дело во многих других случаях. Теория ЛМФ определяет лишь общие принципы, конструктивные правила и начальные элементы построения безразмерной, или приведенной по формуле (3.2) к безразмерному виду, физической константы. Однако и при таких ограничениях обычно всё еще остается множество допустимых вариантов построения той или иной ФФП из исходных ФМК. Среди безразмерных ФП, поиск точного математического значения которых ведется уже многие годы, особое место занимает величина α^{-1}. Константа α впервые появилась в 1916 г. в формуле Зоммерфельда для тонкой структуры уровней атома водорода и потому получила название “постоянной тонкой структуры”, хотя по справедливости ее следовало бы назвать именем первооткрывателя. Как бы то ни было, многие включая Борна, Дирака, Вейля, Вихмана **[4**; **15]** считают константу α^{-1} одной из важнейших, если не основной константой физической теории. А поиск точного значения “таинственного” по выражению Борна числа 137 уже давно не дает многим покоя, побуждая искать решение в нумерологии, в модификациях существующей физической теории, во вновь создаваемых, порой весьма экстравагантных физических моделях и теориях, в потайных уголках числовой математики и даже в Библии, в эзотерике древних, в мистике, в пропорциях египетских пирамид, в числовой магии. Не останавливаясь на этом **[**см. **1**; **2**; **5**; **15**; **16]**, сразу перейдем к определению числа α^{-1} в соответствии с правилами и рекомендациями теории ЛМФ. Нынешнее уравнение для α^{-1} составлено на базе ранее предложенного **[1**, 136, 146; см. также **16**, 46−50**]** уравнения $\cos x = x$, дающего лишь грубое приближение

$$2\pi\cdot 22 - \arccos(1/\mathrm{e}) = 137{,}036\,007\,939...$$

к современному рекомендованному эмпирическому значению

$$\alpha^{-1}(2002) = 137{,}035\,999\,11(46)$$

Искомая переменная x непосредственно связана с ФМК математическими формами $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}x}$, $\mathrm{e}^{x-2\pi n}$, $\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$, x^2, а само уравнение построено по принципу “главный член плюс тонкая структура плюс сверхтонкая структура”:

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{x-2\pi n}}{x^2} - \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} = \frac{1}{\mathrm{e}} \tag{4.1}$$

При $n = 22$ имеется решение

$$x = \alpha^{-1} = 137{,}035\,999\,452\ldots \tag{4.2}$$

в хорошем согласии с $\alpha^{-1}(2002)$. Но при чем здесь, естественно спросить, число 24, тем более что единственной помимо ФМК e, π, i, 2 и их простейшей комбинации $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} \equiv 1$ величиной, фигурирующей в последнем уравнении, является число 22? Заметим, что в соответствии с канонами теории ЛМФ уравнение для константы такого уровня как постоянная Зоммерфельда не может содержать в себе ничего кроме ФМК и разве что других безразмерных ФМК. Отсюда следует, что если величина $n = 22$ всего лишь обеспечивающий хорошее приближение к экспериментальному значению и ничем другим не аргументированный подгоночный параметр, то одного этого достаточно чтобы уравнением (4.1) проблема теоретического определения постоянной α^{-1} решенной считаться не могла. Конкретно говоря, стоит задача обоснования параметра 22 посредством числа 24. Задача эта решается исследованием функции

$$f(x, n) = \cos(x) + \frac{\mathrm{e}^{x-2\pi n}}{x^2} - \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} - \mathrm{e}^{-1}$$

выявляющей требуемую функциональную зависимость. Наглядное представление о поведении функции $f(x, n)$ для различных n дает ее график, построенный для случая $n = 10$.

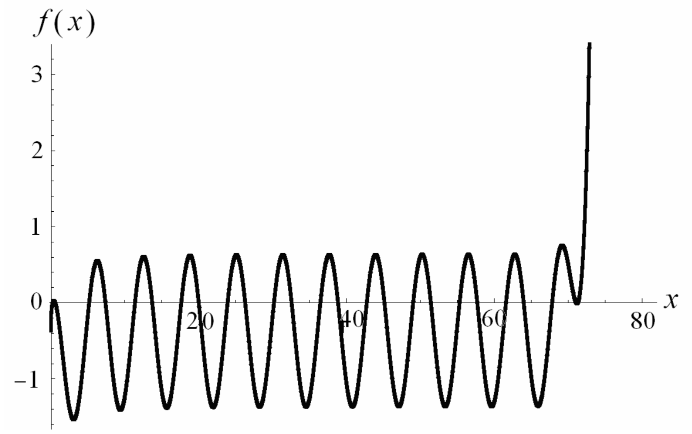

Рис. 2
График функции $f(x,\, n)$ для $n = 10$

Вначале $f(x,\, n)$ ведет себя как почтипериодическая функция с периодом, который с увеличением n стремится к 2π, затем, начиная с некоторого места – когда x уже значительно превышает $2\pi n$, кривая резко уходит вверх, стремясь к бесконечности. Значение $n = 10$ выбрано здесь не случайно, поскольку как оказывается именно с этого значения между n и числом периодов n_λ имеет место соотношение

$$n_\lambda = n + 2 \tag{4.3}$$

А при любом $n > 20$ и каждый раз в конце 22-го периода данное уравнение имеет корень близкий 137. При этом для всех $n > 22$ все эти корни лишь незначительно отличаются друг от друга и очень далеки от эмпирического ориентира $\alpha^{-1}(2002)$. Еще дальше отстоит от последнего корень при $n = 21$. Следовательно задача нахождения близкого к экспериментальному корня уравнения технически решается достаточно просто: значение $x_{n=22}$ безальтернативно. Можно констатировать, что уравнение (4.1) при значении параметра $n = 22$ и в 22-ом же периоде имеет решение полностью согласующееся с принятым экспериментальным значением.

Между тем основными характеристиками частичнопериодической с ограниченным числом n_λ периодов функции являются предельное значение λ длины периода и целое число n_λ. Поскольку для данной функции λ стремится к 2π, остается разобраться с числом n_λ, однозначно определяющим по формуле (4.3) значение параметра n. При условии что таков и номер периода, в котором содержится решение $n_N = n$, единственный нуждающийся в объяснении параметр это целое число n_λ. Для полной ясности еще раз зафиксируем, что заданием общего числа периодов функции $f(x,\, n)$ начиная со значения $n_\lambda \geq 12 = 24/2$ определяется: *а*) общее число действительных корней уравнения (4.1), равное $2n_\lambda + 1$; *б*) параметр уравнения $n = n_\lambda - 2$ и равный ему номер периода n_N, в котором содержится близкий к α^{-1} корень; *в*) номер этого корня, равный $2n_N + 1$. Словом, задавая лишь максимальное число $n_\lambda = 24$ периодов исследуемой функции и при условии равенства $n_N = n$, приходим к однозначно определяющему α^{-1} уравнению, которое может быть уже записано уже в виде

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + \frac{e^{x-\lambda n(24)}}{x^2} - e^{-\sqrt{x}} = \frac{1}{e} \tag{4.4}$$

не содержащем подгоночных параметров. Искомая переменная x, ФМК e, i, 2, предельное значение $\lambda = 2\pi$ длины периода и число 24, определяющее параметр равный номеру периода, в котором содержится решение, – вот все, что требуется в действительности. Разумеется можно было с самого начала записать требуемое уравнение в таком виде, но мы стремились наглядно показать внутреннюю связь числа 24 с константой Зоммерфельда из анализа функции $f(x, n)$.

Следует также добавить, что степень надежности изложенных в настоящем разделе результатов объективно ниже чем в предыдущем, поскольку там результат получался в формализме теории ЛМФ чисто автоматически, без каких-либо дополнительных допущений. Полагая всё же уравнение (4.1) истинной формой определения постоянной тонкой структуры и считая число 24 изначально одной из ФФП, мы имеем ответ на вопрос, почему общее число периодов n_λ функции $f(x, n_\lambda)$ должно быть именно таким, а не другим. Если же пытаться связать последнее появление числа 24 с предыдущими, то можно заметить, что единственной физической константой, используемой в определении α^{-1}, является число фундаментальных фермионов и бозонов определенного типа или что (впрочем это возможно одно и то же) α^{-1} определяется четырьмя ФМК, свойствами экспоненты и значением магической точки ВО $\alpha^{-1}_{\mathrm{GUT}} = 24$.

5. Границы физического мира

Физический мир конечен и квантово-дискретен – таков один из основных уроков развития современной физической теории. Наша Вселенная не так мала как полагали Платон и Данте, но и не бесконечна как принято было считать со времен Галилея вплоть до первой половины прошлого столетия. Современная космология пытается проникнуть в прошлое и предсказать будущее Вселенной, численно оценить такие ее параметры как радиус кривизны R_U, время жизни τ_U, средняя плотность ρ_C. Имеющиеся сегодня эмпирические данные дают по крайней мере представление о порядке этих величин. Кроме того мы располагаем принятым за абсолютно точное значением скорости света в вакууме c, известными с высокой точностью значениями для квантов действия ($\hbar/2$), электрического заряда (e, или $e/3$), энтропии ($k/2$), а также значением гравитационной постоянной G. Этот набор постоянных, представляющий собой часть общего списка экстремальных величин, достаточен для постановки вопроса о границах физического мира, точнее о минимальных и максимальных значениях физических величин. Есть три внутренне связанных, но внешне независимых варианта решения этой проблемы **[2**; **10]**. Первый базируется на подстановке соответствующих значений в одно из четырех основных физических уравнений (кодов) теории ЛМФ; второй – на анализе размерностей указанных постоянных при понимании планкеонов как величин получаемых из равенства комптоновских и гравитационных величин; третий – на формуле для энтропии черной дыры. Поскольку все три варианта с точностью до порядка приводят к одному и тому же результату, достаточно рассмотреть лишь один вариант, например последний.

Впервые полученная Хокингом и строго выводимая в релятивистской астрофизике **[**см. **17**; 18, 388**]** формула

$$S = \frac{k}{4}\frac{A}{l_{\mathrm{P}}^2} = \frac{k}{4}\frac{c^3}{G\hbar}A \tag{5.1}$$

устанавливает связь между энтропией S черной дыры, площадью ее горизонта A, постоянной Больцмана k и планковской длиной l_{P}. Подставляя сюда уточненное значение горизонта A **[**см. например **18]** и зная, что $S_{\min} = k/2$, придем к выражению

$$\frac{S_{\max}}{S_{\min}} = \frac{R_U^2}{2G\hbar/c^3} = N_U \sim 10^{125} \tag{5.2}$$

для отношения экстремальных значений энтропии. Но такое же по порядку число получается и первыми двумя способами при рассмотрении экстремальных отношений для других физических величин. В общем случае для почти любой физической величины B справедлива формула

$$\frac{B_{j\max}}{B_{j\min}} = N_U^n \tag{5.3}$$

где n может принимать значения 1/2, 1, 3/2, 2, 3. В экспоненциально-логарифмической записи, которая согласно теории ЛМФ является универсальной формой представления числа, $10^{125} \approx e^{288}$, или $\ln N_U \approx 288 = 24{\cdot}24/2$. Следовательно по предыдущей формуле отношения экстремумов различных физических величин (энтропия, безразмерные константы взаимодействий, длина, время, масса, сила, энергия, температура, мощность, площадь, объем и т. д.) и их натуральные логарифмы выражаются парами чисел близкими к значениям

$e^{6\cdot 24}$ и $24^2/4$, $e^{12\cdot 24}$ и $24^2/2$, $e^{18\cdot 24}$ и $3\cdot 24^2/4$, $e^{24\cdot 24}$ и 24^2, $e^{36\cdot 24}$ и $3\cdot 24^2/2$

Таким образом в логарифмической записи имеем несколько членов семейства числа 24 типа $A = n\cdot 24^k$, а в случае экспоненты – несколько членов этого семейства типа $B = f(A)$, где f экспоненциальная функция e^x. Заметим также, что по определению космическая константа N_U целое число. Это сильно облегчает поиск этой величины, поскольку нахождение нужной точки в дискретном множестве натуральных чисел намного легче чем в непрерывном, бесконечном интервале действительных чисел, однако малая точность эмпирического определения константы N_U не позволяет решить сегодня эту задачу. Здесь слишком много вариантов и нет никакой возможности остановиться на одном из них. Если искомая величина является выделенным относительно числа 24 членом одной из известных числовых последовательностей, допустим ряда Фибоначчи, то это может быть например его шестисотый член

$$F_{600} = 1{,}104\,33\cdot 10^{125} \approx e^{287{,}922}, \text{ то есть } \ln F_{600} \approx 24^2/2$$

Число 600 равное $25\cdot 24$ может быть сопоставлено с количеством элементов (25) и независимых генераторов (24) вышеупомянутой группы $SU(5)$, то есть со всё тем же числом фундаментальных бозонов и фермионов, но всё это, как впрочем и значение константы N_U, настолько зыбко и ненадежно, что слишком серьезно относиться к этому сейчас не следует.

6. Наибольшее число в природе

В продолжение предыдущей темы следует добавить, что есть по крайней мере одна физическая величина, отношение экстремальных значений которой не выражается формулой (5.3). Хорошо известна формула Больцмана

$$S = k \ln \Omega, \quad \text{или} \quad \Omega = e^{S/k} \tag{6.1}$$

где Ω число микросостояний макросистемы. Для Вселенной $S_U \equiv S_{\max} = k/2\cdot N_U$, поэтому

$$\Omega_{\max} = e^{\frac{N_U}{2}} \approx e^{\frac{1}{2}e^{288}} \tag{6.2}$$

Для сравнения: общее количество нуклонов во Вселенной оценивается числом 10^{81}. Таким образом число микросостояний Вселенной хоть и не бесконечно, но выражается колоссальной величиной, по сравнению с которой даже $10^{10^{10}}$, обычно приводимое в качестве примера непредставимо огромной, сверхбольшой математической величины, кажется карликом. Величина $\Omega_{\max}$, приблизительно равная экспоненте в степени 10^{125}, очевидно самое большое число в природе. Но для нас главное то, что $\Omega_{\max}$ является вероятно и членом семейства числа 24 типа $f(A)$, где $A \cong 24^2/2$, а функция $f(x)$ представляет собой “экспоненту экспоненты”, то есть функцию $e^{\frac{1}{2}e^x}$. Если сделанные в этом и предыдущем разделах допущения верны, можно говорить о непосредственной количественной связи между основными параметрами Вселенной и по крайней мере количеством фундаментальных частиц определенного типа.

Заключение

Завершив последнее из шести путешествий, нельзя не обратить внимания на неодинаковую значимость и прежде всего разную степень достоверности отдельных появлений физической константы 24 или ее гомологов. С одной стороны бесспорное, с большой точностью эмпирически удостоверенное количество известных фермионов, с другой – магическая точка, недостаточно точно вычисляемая даже в пределах всё еще гипотетической теории ВО. На одном полюсе надежности А-значение константы Ферми, соответствующее идеальному значению с погрешностью порядка 10^{-7}, на другом – космическая константа N_U, даже за порядок величины которой нельзя поручиться. В принципе чтобы признать конкретную физическую величину фундаментальной константой достаточно лишь одного надежно установленного и важного для физической теории факта. У нас в итоге несколько взаимосвязанных фактов (n_{F}, n_{B}, $SU(5)$ и G_{FA}), которые в значительной, если не в полной мере соответствуют этим требованиям, одно появление числа 24 (в уравнении для константы Зоммерфельда), отвечающее требованиям частично, и два нуждающихся в серьезнейшей проверке и уточнении допущения. Всего этого очевидно достаточно для признания первостепенной роли семейства числа 24 в физической теории и включения целочисленной константы 24 в список фундаментальных физических постоянных.

Литература

1 **Аракелян Г.Б.** *Фундаментальные безразмерные величины (Их роль и значение для методологии науки)*. Ереван: Изд. АН, 1981

2 **Аракелян Г.Б**. *Основания физической теории*. Ереван: Давид, 1997

3 **Finch Steven.** *Mathematical Constants*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003; **Finch Steven.** *MathSoft Constants* http://www.mathcad.com/library/Constants/index.htm 2006; **Weisstein E.W.** *Constants*. From MathWorld – A Wolfram Web Resource, 2006 http://mathworld.wolfram.com/topics/Constants.html

4 **Борн М.** *Таинственное число* 137. УФН, 1936, т. 16, вып. 6, с. 704

5 См. **Аракелян Г.Б.** *Основания физической теории* и указанные там источники

6 **Georgi H.** and **Glashow S.L.** Phys. Rev. Lett. **32**, 438 (1974); **Georgi H., Quinn H.R.,** and **Weinberg S.** Phys. Rev. Lett. **33**, 451 (1974)

7 **Fritzsch H.** and **Minkowski P.** Ann. Phys. **93**, 193 (1975); **Chanowitz M., Ellis J.**, and **Gaillard M.K.** Nucl. Phys. **B**128, 506 (1977); **Georgi H**. and **Nanopoulos D.V.** Nucl. Phys. **B**159, 16 (1979)

8 **Harari H.** Phys. Rev. **42**, 235 (1978); **Nanopoulos D.V.** Preprint CERN TH, 2896 (1980); **Высоцкий М.И.** УФН, 1985, т. 146, с. 591; **Hinchliffe I.** *Quantum Chromodynamics and Its Coupling*. PDG, Revised Sept, 2005 http://www-pdg.lbl.gov/2005/reviews/qcdrpp.pdf; **Erler J.** and **Langacker P.** *Electroweak Model and Constraints of New Physics*, 2004 http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/stanmodelrpp.pdf

9 **Mohr P.J.** and **Taylor B.N.** *CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2002*. Rev. Mod. Phys. **77**, 1 (2005) http://www.ff.oc.uh.cu/fisteo/PhC.pdf; **Hagiwara K.** et al. *(Particle Data Group Collaboration)*. Phys. Rev. **D66**, 010001 (2002)

10 **Аракелян Г.Б.** *Фундаментальная теория ЛМФ* (готовится к печати)

11 **Steigman G., Schramm D.N.,** and **Gunn J.E.** Phys. Lett. **B66**, 202 (1977); **Окунь Л.Б.** *Лептоны и кварки*. М.: Наука, 1990; **Groom D.E.** et al. The Eur. Phys. Journ. **C15**, 1 (2000)

12 **Karlen D**. *The Number of Light Neutrino Types from Collider Experiments*. PDG, Revised Aug 2001
http://www-pdg.lbl.gov/2005/reviews/lightnu_s007.pdf

13 **Zyablyuk D.** *Supersymmetric Unification*. Advanced School of ITEP on Particle Theory, 25 Feb – 5 Mar 1999 http://www.desy.de/~ozerov/asipt/Content/Course-2-2.03.pdf

14 **Sirlin A.** Rev. Mod. Phys. **50**, 573 (1978); **Marciano W.J.** and **Sirlin A.** Phys. Rev. Lett. **61**, 1815 (1988); **Green M.** and **Veltman M.** Nucl. Phys. **B169**, 137 (1980); **Ritbergen T. van** and **Stuart R.G.** Phys. Rev. Lett. **82**, 488 (1999)

15 **Дирак П.А.М.** *Эволюция физической картины природы*. В кн.: Элементарные частицы (Над чем думают физики, вып. 3). М.: Наука, 1965, с. 123–139; **Вейль Г.** *Основные черты физического мира. Форма и эволюция*. В кн.: Г.Вейль. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984, с. 345–360; **Вихман Э.** *Квантовая физика* (Берклеевский курс физики, т.IV). М.: Наука, 1977

16 **Аракелян Г.Б.** *Числа и величины в современной физике*. Ереван: Изд. АН, 1989

17 **Bekenstein J.D.** Phys. Rev. **D7**, 2333 (1973)

18 **Шапиро С., Тьюколски С.** *Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды*, ч. 2. М.: Мир, 1985