Мартыненко Г. Я.

Целочисленные пределы повторных радикалов и соответствующие им корни алгебраических уравнений с целочисленными коэффициентами

«Бог создал целые числа, все остальное есть дело рук человеческих»
Леопольд Кронекер

В математике гармонии часто используются повторные радикалы для получения приближенных значений корней уравнений второго, третьего и более высоких порядков. Часть таких корней связано с золотым сечением, часть – с металлическими сечениями Веры фон Шпинадель, с уравнениями Алексея Стахова и Мидхата Газале и др. сечениями. В ряде работ автора (Мартыненко, 2009) предприняты попытки систематизировать эти уравнения и связанные с ними повторные радикалы. В данной работе эта систематизаторская работа продолжена.

Предельные значения некоторых повторных радикалов являются целыми числами. Их роль в теории гармонии не совсем ясна, но их математические особенности столь интересны, что весьма трудно отказаться от их систематизации. Это тем более интересно, что повторные радикалы напрямую связаны с теорией чисел, которая изучает арифметические свойства чисел натурального ряда и принадлежит к группе старейших разделов математики. Нет сомнений, что здесь существует связь с диафантовыми уравнениями – уравнениями с целочисленными коэффициентами и неизвестными, которые могут принимать только целые значения (Башмакова, 1972; Гельфонд, 1978). Эти уравнения названы в честь греческого математика Диофанта (IV н. э.). Он написал свою знаменитую «Арифметику» в 13 книгах, из которых сохранилось 6. Методы Диофанта оказали огромное влияние на Франсуа Виета и Пьера Ферма.

В данной работе мы будем иметь дело с радикалами любой степени, т. е. со структурами вида:

$$\sqrt[k]{\pm m \pm n\sqrt[k]{\pm m \pm n\sqrt[k]{\pm m \pm n....}}}\ , \quad (1)$$

которой соответствуют неполные уравнения произвольной целочисленной степени, причем коэффициенты в уравнениях тоже целочисленные.

Начнем с радикалов и уравнений второй степени.

Наши манипуляции с различными целочисленным значениями m и n привели к следующим результатам.

«Заморозив» n на постоянном значении, равном единице, при положительных значениях m получаем последовательность повторных радикалов второй степени, устремляющихся к фиксированному пределу, представленному числами натурального ряда при $p \geq 2$, где p-целочисленный

предел повторного радикала. При этом p и m связаны соотношением $m = p(p+1)$, $p = 2,3,4....$ Иначе говоря, последовательность значений m может быть представлена так: $2 = 1\times 2, 6 = 2\times 3, 12 = 3\times 4, 20 = 4\times 5\ldots$ (см табл. 1).

Таблица1

Повторный радикал	Вариант представления повторного радикала	Уравнение
$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2...}}} \to 2$	$\sqrt{1\cdot 2+\sqrt{1\cdot 2+\sqrt{1\cdot 2...}}} \to 2$	$x^2 - x - 2 = 0$
$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6...}}} \to 3$	$\sqrt{2\cdot 3+\sqrt{2\cdot 3+\sqrt{2\cdot 3...}}} \to 3$	$x^2 - x - 6 = 0$
$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12...}}} \to 4$	$\sqrt{3\cdot 4+\sqrt{3\cdot 4+\sqrt{3\cdot 4...}}} \to 4$	$x^2 - x - 12 = 0$
$\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20...}}} \to 5$	$\sqrt{4\cdot 5+\sqrt{4\cdot 5+\sqrt{4\cdot 5...}}} \to 5$	$x^2 - x - 20 = 0$
$\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30...}}} \to 6$	$\sqrt{6\cdot 5+\sqrt{6\cdot 5+\sqrt{6\cdot 5...}}} \to 6$	$x^2 - x - 30 = 0$

Предельное значение радикала равно $p+1$.

Если в подкоренных выражениях заменить положительный знак на отрицательный, то предельные значения будут такими (см. табл. 2):

Таблица 2

Повторный радикал	Вариант представления повторного радикала	Уравнение
$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2...}}} \to 1$	$\sqrt{1\cdot 2-\sqrt{1\cdot 2-\sqrt{1\cdot 2...}}} \to 1$	$x^2 + x - 2 = 0$
$\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6...}}} \to 2$	$\sqrt{2\cdot 3-\sqrt{2\cdot 3-\sqrt{2\cdot 3...}}} \to 2$	$x^2 + x - 6 = 0$
$\sqrt{12-\sqrt{12-\sqrt{12...}}} \to 3$	$\sqrt{3\cdot 4-\sqrt{3\cdot 4-\sqrt{3\cdot 4...}}} \to 3$	$x^2 + x - 12 = 0$
$\sqrt{20-\sqrt{20-\sqrt{20...}}} \to 4$	$\sqrt{4\cdot 5-\sqrt{4\cdot 5-\sqrt{4\cdot 5...}}} \to 4$	$x^2 + x - 20 = 0$
$\sqrt{30-\sqrt{30-\sqrt{30...}}} \to 5$	$\sqrt{6\cdot 5-\sqrt{6\cdot 5-\sqrt{6\cdot 5...}}} \to 5$	$x^2 + x - 30 = 0$

т. е. предельное значение радикала в каждой строке равно *p*.

Теперь перейдем к структурам с чередующимися знаками (см табл. 3):

Таблица 3

Повторный радикал	Вариант представления повторного радикала	Уравнение
$\sqrt{3+\sqrt{3-\sqrt{3...}}} \to 2$	$\sqrt{(1\cdot 2+1)+\sqrt{(1\cdot 2+1)-\sqrt{(1\cdot 2+1)...}}} \to 1$	$x^2-x-2=0$
$\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7...}}} \to 3$	$\sqrt{(2\cdot 3+1)+\sqrt{(2\cdot 3+1)-\sqrt{2\cdot 3...}}} \to 2$	$x^2-x-6=0$
$\sqrt{13+\sqrt{13-\sqrt{13...}}} \to 4$	$\sqrt{(3\cdot 4+1)+\sqrt{(3\cdot 4+1)-\sqrt{3\cdot 4...}}} \to 4$	$x^2-x-12=0$
$\sqrt{21+\sqrt{21-\sqrt{21...}}} \to 5$	$\sqrt{(4\cdot 5+1)+\sqrt{(4\cdot 5+1)-\sqrt{4\cdot 5...}}} \to 5$	$x^2-x-20=0$
$\sqrt{31+\sqrt{31-\sqrt{31...}}} \to 6$	$\sqrt{(6\cdot 5+1)+\sqrt{(6\cdot 5+1)-\sqrt{6\cdot 5...}}} \to 6$	$x^2-x-30=0$

В этом случае предельное значение радикала в каждой строке стремится к *p*. Если же итерации завершаются вычитанием, то предельное значение радикала будет равно *p* – 1.

Рассмотрим еще одну структуру, связанную с радикалами вида (см. табл. 4):

$$\sqrt{(n+1)+n\sqrt{(n+1)+n\sqrt{(n+1)+}}}...$$

Таблица 4

Повторный радикал	Уравнение
$\sqrt{2+1\sqrt{2+1\sqrt{2...}}} \to 2$	$x^2-2x-3=0$
$\sqrt{3+2\sqrt{3+2\sqrt{3+2...}}} \to 3$	$x^2-3x-4=0$
$\sqrt{4+3\sqrt{4+3\sqrt{4+...}}} \to 4$	$x^2-4x-5=0$
$\sqrt{5+4\sqrt{5+4\sqrt{5+...}}} \to 5$	$x^2-5x-6=0$
$\sqrt{6+5\sqrt{6+5\sqrt{6+...}}} \to 6$	$x^2-6x-7=0$

Для приведенных в этой таблице радикалов и уравнения характерно то, что пара соседних натуральных чисел здесь выступает в виде «суммы», а не произведения, как было выше.

А теперь перейдем к радикалам и уравнениям более высоких степеней.

Начнем с третьей степени.

В табл. 5 приведены кубические радикалы (и соответствующие им уравнения) с предельным значением, равным 2.

Таблица5

Повторный радикал	Вариант представления повторного радикала	Уравнение
$\sqrt[3]{2+3\sqrt[3]{2+3\sqrt[3]{2+\ldots}}} \to 2$	$\sqrt[3]{2\cdot 1+\left(2^3-1\right)\sqrt[3]{2\cdot 1+\left(2^3-1\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 2$	$x^3-3x-2=0$
$\sqrt[3]{4+2\sqrt[3]{4+2\sqrt[3]{2+\ldots}}} \to 2$	$\sqrt[3]{2\cdot 2+\left(2^3-2\right)\sqrt[3]{2\cdot 2+\left(2^3-2\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 2$	$x^3-2x-4=0$
$\sqrt[3]{6+1\sqrt[3]{6+1\sqrt[3]{2+\ldots}}} \to 2$	$\sqrt[3]{2\cdot 3+\left(2^3-3\right)\sqrt[3]{2\cdot 3+\left(2^3-3\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 2$	$x^3-x-6=0$

В табл. 6 и 7 и 8 размещены кубические радикалы (и соответствующие им уравнения) с предельным значениями, равными 2, 3 и 4.

Таблица 6

Повторный радикал	Вариант представления повторного радикала	Уравнение
$\sqrt[3]{2+3\sqrt[3]{2+3\sqrt[3]{2+\ldots}}} \to 2$	$\sqrt[3]{2\cdot 1+\left(2^2-1\right)\sqrt[3]{2\cdot 1+\left(2^{23}-1\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 2$	$x^3-3x-2=0$
$\sqrt[3]{4+2\sqrt[3]{4+2\sqrt[3]{2+\ldots}}} \to 2$	$\sqrt[3]{2\cdot 2+\left(2^2-2\right)\sqrt[3]{2\cdot 2+\left(2^2-2\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 2$	$x^3-2x-4=0$
$\sqrt[3]{6+1\sqrt[3]{6+1\sqrt[3]{2+\ldots}}} \to 2$	$\sqrt[3]{2\cdot 3+\left(2^2-3\right)\sqrt[3]{2\cdot 3+\left(2^2-3\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 2$	$x^3-x-6=0$
$\sqrt[3]{8+0\sqrt[3]{8+0\sqrt[3]{8+\ldots}}} \to 2$	$\sqrt[3]{2\cdot 4+\left(2^2-4\right)\sqrt[3]{2\cdot 4+4\sqrt[3]{\ldots}}} \to 2$	$x^3-0x-8=0$
$\sqrt[3]{10-1\sqrt[3]{10-1\sqrt[3]{10-\ldots}}} \to 2$	$\sqrt[3]{2\cdot 5+\left(2^2-5\right)\sqrt[3]{2\cdot 5+\left(2^2-5\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 2$	$x^3+x-10=0$

Таблица 7

Повторный радикал	Вариант представления повторного радикала	Уравнение
$\sqrt[3]{3+8\sqrt[3]{3+8\sqrt[3]{3+\ldots}}} \to 3$	$\sqrt[3]{3\cdot 1+\left(3^2-1\right)\sqrt[3]{3\cdot 1+\left(3^2-1\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 3$	$x^3-8x-3=0$
$\sqrt[3]{6+7\sqrt[3]{6+7\sqrt[3]{6+\ldots}}} \to 3$	$\sqrt[3]{3\cdot 2+\left(3^2-2\right)\sqrt[3]{3\cdot 2+\left(3^{23}-2\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 3$	$x^3-7x-6=0$
$\sqrt[3]{9+6\sqrt[3]{6+1\sqrt[3]{9+\ldots}}} \to 3$	$\sqrt[3]{3\cdot 3+\left(3^2-4\right)\sqrt[3]{3\cdot 3+\left(3^2-4\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 3$	$x^3-6x-9=0$

Таблица 8

Повторный радикал	Вариант представления повторного радикала	Уравнение
$\sqrt[3]{4+15\sqrt[3]{4+15\sqrt[3]{4+\ldots}}} \to 4$	$\sqrt[3]{4\cdot 1+\left(4^3-1\right)\sqrt[3]{4\cdot 1+\left(4^3-1\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 4$	$x^3-15x-4=0$
$\sqrt[3]{8+14\sqrt[3]{6+7\sqrt[3]{6+\ldots}}} \to 4$	$\sqrt[3]{4\cdot 2+\left(4^3-2\right)\sqrt[3]{4\cdot 2+\left(4^3-2\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 4$	$x^3-14x-8=0$
$\sqrt[3]{12+13\sqrt[3]{12+13\sqrt[3]{12+\ldots}}} \to 4$	$\sqrt[3]{4\cdot 3+\left(4^3-3\right)\sqrt[3]{4\cdot 3+\left(4^3-3\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 4$	$x^3-13x-12=0$

Каждая таблица развивается бесконечно, поскольку коэффициент перед каждым радикалом может переходить в область отрицательных значений через нуль. В этом случае происходит смена знака при втором члене уравнения

В приведенной системе таблиц просматривается определенная закономерность, в которой можно еще тверже убедиться, ознакомившись с еще тремя таблицами (см. табл. 9-11), относящимися к радикалам четвертой степени

Таблица 9

Повторный радикал	Вариант представления повторного радикала	Уравнение
$\sqrt[4]{2+7\sqrt[4]{2+7\sqrt[4]{2+\ldots}}} \to 2$	$\sqrt[4]{2\cdot 1+\left(2^3-1\right)\sqrt[4]{2\cdot 1+\left(2^3-1\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 2$	$x^4-7x-2=0$
$\sqrt[4]{4+6\sqrt[4]{4+6\sqrt[4]{2+\ldots}}} \to 2$	$\sqrt[4]{2\cdot 2+\left(2^3-2\right)\sqrt[4]{2\cdot 2+\left(2^3-2\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 2$	$x^4-6x-4=0$
$\sqrt[4]{6+5\sqrt[4]{6+5\sqrt[4]{2+\ldots}}} \to 2$	$\sqrt[4]{2\cdot 3+\left(2^3-3\right)\sqrt[4]{2\cdot 3+\left(2^3-3\right)\sqrt[3]{\ldots}}} \to 2$	$x^4-5x-6=0$

Таблица 10

Повторный радикал	Вариант представления повторного радикала	Уравнение
$\sqrt[4]{3+26\sqrt[4]{3+26\sqrt[4]{3+\ldots}}} \to 3$	$\sqrt[4]{3\cdot 1+\left(3^3-1\right)\sqrt[4]{3\cdot 1+\left(3^3-1\right)\sqrt[4]{\ldots}}} \to 3$	$x^4-26x-3=0$
$\sqrt[4]{6+25\sqrt[4]{6+25\sqrt[4]{6+\ldots}}} \to 3$	$\sqrt[4]{3\cdot 2+\left(3^3-2\right)\sqrt[4]{3\cdot 2+\left(3^3-2\right)\sqrt[4]{\ldots}}} \to 3$	$x^4-25x-6=0$
$\sqrt[4]{9+24\sqrt[4]{9+24\sqrt[4]{9+\ldots}}} \to 3$	$\sqrt[4]{3\cdot 3+\left(3^3-3\right)\sqrt[4]{3\cdot 3+\left(3^3-3\right)\sqrt[4]{\ldots}}} \to 3$	$x^4-24x-9=0$

Таблица 11

Повторный радикал	Вариант представления повторного радикала	Уравнение
$\sqrt[4]{4+63\sqrt[4]{4+63\sqrt[4]{4+\ldots}}} \to 4$	$\sqrt[4]{4\cdot 1+\left(4^3-1\right)\sqrt[4]{4\cdot 1+\left(4^3-1\right)\sqrt[4]{\ldots}}} \to 4$	$x^4-63x-4=0$
$\sqrt[4]{8+62\sqrt[4]{8+62\sqrt[4]{8+\ldots}}} \to 4$	$\sqrt[4]{4\cdot 2+\left(4^3-2\right)\sqrt[4]{4\cdot 2+\left(4^3-2\right)\sqrt[4]{\ldots}}} \to 4$	$x^4-62x-8=0$
$\sqrt[4]{12+61\sqrt[4]{12+61\sqrt[4]{12+\ldots}}} \to 4$	$\sqrt[4]{4\cdot 3+\left(4^3-3\right)\sqrt[4]{4\cdot 3+\left(4^3-3\right)\sqrt[4]{\ldots}}} \to 4$	$x^4-61x-12=0$

Подобного рода манипуляции можно продолжать бесконечно, получая бесконечное множество уравнений и их целочисленных корней. Причем одних и тех же корней также бесконечное количество. Но при этом вся система корней уравнений подчиняется строгим закономерностям.

Аналогичные результаты можно получить и посредством непрерывных дробей.

В заключение приведем без комментариев таблицу (см. табл. 12), в которой размещены целые числа, полученные на основе квадратичных повторных радикалов. В этой таблиц учитывались не только положительные, но и отрицательные значения *m* и *n* в формуле (1).

Таблица 12

	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
–4														
–3														2,000
–2												2,000		
–1					0,618	1,000				2,000				
1					1,618	2,000				3,000				
2				1,000	2,414	2,732	3,000					4,000		
3			2,000					4,000						5,000
4		3,000							5,000					
5	4,000									6,000				

В табл. 12 представлены два «треугольника»: «красный» и «голубой». Причем в «вершине» каждого треугольника располагаются два варианта золотого сечения, два начальных числа натурального ряда и два самых «знаменитых» корня, увеличенные на единицу. Все целочисленные решения с помощью таблицы предсказываются.

Литература

Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. М.: Наука, 1972.
Гельфонд А. О. О решении уравнений в целых числах. М.: Наука, 1978.

Мартыненко Г. Я. Числа Стахова-Газале как предельные значения непрерывных мульти-дробей // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ. 15040, 13.01.2009.
Мартыненко Г. Я. Золотой треугольник Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15408, 16.07.2009.
Мартыненко Г. Я. Симметрийные свойства Золотого Треугольника // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15521, 09.09.2009.
Мартыненко Г. Я. Решение нелинейных уравнений методом повторных радикалов // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ. 15335, 11.06.2009.
Мартыненко Г. Я. Классификационный треугольник уравнений, связанных с золотым сечением // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15306, 27.05.2009.