С.Л. Василенко

О бедном квадрате замолвите слово...

Черепаха кладет тысячи яиц – и никто не знает,
курица кладет одно – а шуму на всю округу.
Русская пословица

Просто диву даешься, когда читаешь работы некоторых авторов, считающих себя специалистами в вопросах золотого сечения (ЗС). Столько лет изучать эту, в целом несложную математическую задачу, но до сих пор путать или смешивать в один ворох два таких совершенно разных понятия как ЗС и последовательности Фибоначчи.

Но преподносится такой "ёжеуж" или "ужеёж" часто безапелляционно и даже помпезно.

Смешались в кучу кони, люди... (М. Лермонтов).

Что ж это за явление в науке? – В смысле "городить огороды", на которых потом ничего толком не принимается и не произрастает.

Есть ли у такого феномена какие-либо дефиниции?

Или речь идет об элементарных подвижках здравого смысла в область иррациональных решений?

– Ответов готовых нет. Вернее, они-то есть, и даже на виду.

Но их озвучивание не дает и малейшей надежды на реальный возврат в сторону рациональных ответов хотя бы потому, что ... золотое сечение содержит радикал или "корень из пяти".

А что говорит классическая математика о своих родных детях? – Только в одном единственном случае слова "Фибоначчи" и "золотое сечение" косвенно соприкасаются (и то в пределе). А именно, – в числовых последовательностях Фибоначчи, образуемых по самой простой рекуррентно-аддитивной схеме: «будущее = настоящее + прошлое».

Без всяких коэффициентов, без добавочных элементов (аддитивных слагаемых), но зато с произвольными начальными условиями, не равными одновременно нулю. Все. Точка.

Можно даже провести аллегорические сравнения:

ЗС – это числа Фибоначчи в трико, когда важны не размеры, а пропорции.

Числа Фибоначчи – это ЗС в шароварах, когда важны не пропорции, а размеры.

Так, что числа Фибоначчи – это украинский гопак, ЗС – русский балет.

Что касается «современной теории последовательностей Фибоначчи», то она уже давным-давно вышла за пределы ЗС на вольные хлеба, для чего достаточно посмотреть работы 40-летнего периода давности, связанные с обобщенными и модифицированными пирамидами Паскаля – трехгранными пирамидальными числовыми массивами [1–2].

Там присутствует уже такая философия преобразований чисел и такой высокий уровень обобщения числовых массивов, что "золотому сечению и не снилось"! Да они ему и не нужны.

Хотя есть и простые доступно-понятные схемы образования числовых структур. Например, у В. Хогатта [3] можно найти (в виде частного случая) те же "металлические пропорции" (вокруг которых столько непонятной возни), как обобщение традиционных чисел Фибоначчи, которые к ЗС уже не имеют ни малейшего отношения. Разве что, если групповое чихание при пандемии гриппа сравнивать с раскатами грома.

Поэтому, если для кого-то слова "Фибоначчи" и "золотое сечение" еще остаются синонимами, то можно порекомендовать освежить свои знания сведениями из теории чисел.

В то время как концепция ЗС в своем развитии "наглухо застыла" на своем заслуженном золотом постаменте, то, как правильно отмечается в статье [4], Фибоначчи-Ассоциация действительно уже четверть века продолжает проводить регулярные международные конференции «Числа Фибоначчи и их приложения», а по этой проблематике постоянно публикуется обширная научная литература.

Но только какое это имеет отношение к золотому сечению? – И близко никакого.

Поэтому когда, например, читаешь, что 4-я проблема Гильберта[1] якобы «не была бы решена, если бы Вера Шпинадель не обобщила понятие "золотой пропорции" и не ввела понятие "металлических пропорций", которые задают бесконечное количество новых математических констант» [4], то становится даже не смешено.

Это ж надо все так перемешать: проблему Гильберта, *обобщение* "золотой пропорции" (?), введение "*металлических* пропорций" (?), *новые* математические константы (?)...

В итого получается уже не "открытие", а полное "закрытие ЗС".

Так или иначе, но в статьях новостного содержания отражается ценностный аспект происходящего. И то что, по одним меркам выглядит как выдвижение на звание "Ударника золотоносного производства", по другим – заставляет задуматься над происходящим в смысле онтологии и постижения глубины и истинности ... тех же квадратичных закономерностей. – Широко распространенных и одновременно узко специфических.

В нашем случае схема работает просто: если развивается идея Фибоначчи, то якобы автоматические идет вверх и кривая ЗС, а значит, пропадает всякая необходимость его развития. – Мол, какое это все имеет значение, коли Фибоначчи раскручивается?

Так снимается с повестки дня и проблема построения (развития) исконно теории ЗС или она подменяется суррогатными построениями.

Ветер перемен... Охарактеризованная мешанина в целом незатененных умах во многом объясняется тем, что формально нет отдельно взятой научной сферы (дисциплины) ЗС, равно как и признанных научных корифеев (светил) в этой области, и поэтому повлиять на ситуацию или расставить все на свои места просто некому.

Хотя, на наш взгляд, не все потеряно.

Так, к настоящему времени значительным стал объем накопительных знаний, многие из которых тянут на представительство квази-ЗС. А это означает, что не исключается возможность некоторых из них на прямое (идеально-формульное) попадание в ЗС.

Уже это много ст<u>о</u>ит. Одно дело робкие предположения-гипотезы вокруг да около, и совсем другое – строго доказанное свойство явления или процесса абсолютного развития (становления) по закону ЗС.

Но почему все ж тогда мы все-таки выбрали для себя квадрат и квадратное уравнение?

И от кого или ради чего их защищать?

Нам представляется, и мы это уже практически доказали (осталось дело времени), что буквально все математические свойства ЗС обусловлены квадратным уравнением.

То есть, нет ни одного сколь угодно значимого свойства ЗС, которое не вытекало бы из онтологии квадратного уравнения частным случаем.

На первый взгляд, это может показаться не столь уж и значимым утверждением.

Кто-то, наоборот попытается поскрести по сусекам, дабы выискать нечто специфическое для ЗС. – На здоровье. Во всяком случае, на данном этапе нам ничего не

---

[1] *<u>Перечислить метрики, в которых прямые являются геодезическими</u>*. – Не является достаточно корректной математической проблемой, поскольку сформулирована слишком расплывчато, чтобы понять или судить о том, решена она или нет. Тем не менее, в объеме современных знаний **академик А.В. Погорелов** (г. Харьков) в 1974 г. получил полное решение 4-й проблемы Гильберта и регулярное решение многомерной проблемы Минковского. **Геодезическая линия** – кривая определенного типа, обобщение понятия "прямая" в искривленных пространствах. Конкретное определение геодезической зависит от типа пространства. Например, на двумерной поверхности, вложенной в евклидово трехмерное пространство, геодезические линии – это линии, достаточно малые дуги которых являются на этой поверхности кратчайшими путями между их концами. На плоскости это будут прямые, на круговом цилиндре – винтовые линии, на сфере – большие круги. **Метрика** – функция, определяющая расстояния в метрическом пространстве – множестве, в котором определено расстояние (степень удаленности) между любой парой элементов.

мешает это принять в качестве рабочей гипотезы, а кто не согласен, может высказать свои аргументы, которые мы будем только рады услышать.

Так или иначе, но, разобрав по косточкам до конца всю подноготную квадратного уравнения, нам легче будет восстановить настоящий и подлинный фундамент ЗС, чтобы дальше говорить о его величии и развитии, а где и ..."с вероятностью до наоборот".

История квадратного уравнения длиной в сотни человеческих жизней. Мы не ставим задачу воссоздать полно-истинную картину прошлого. Нас больше интересует восстановление по разным литературным источникам некоторых отдаленных событий.

Для нас здесь главное – вспомнить, что она действительная давняя, и попытаться понять, а зачем собственно античному человеку так нужны были эти квадратные уравнения?

Обратимся к современным трактовкам истории данного вопроса.

Рис. 1. Глиняная табличка из Шуруппака, ок. 2600 г. до н.э. – http://ru.wikipedia.org/

Принято считать [http://kvadur.info/history.php], что найденные древние вавилонские глиняные таблички самых разных эпох (от начала III тысячелетия до н.э. до I в. н.э.) являются самыми ранними свидетельствами об изучении и методах решения разных задач (рис. 1), включая отдельные виды квадратных уравнений.

Древнеиндийский математик Баудхаяма (VIII столетие до н.э.) впервые использовал квадратные уравнения в форме $ax^2=c$ и $ax^2+bx=c$ и привел методы их решения.

Вавилонские математики примерно с IV века до н.э. и китайские математики примерно со II века до н.э. использовали метод дополнения квадрата для решения уравнений с положительными корнями.

Решения уравнения с отрицательными корнями в виде алгебраической формулы нашел индийский математик Брахмагупта (VII столетие н.э.).

Вавилонская наука, наряду с египетской, по уровню своего развития в древнем мире занимала одно из первых мест.

Однако наука Вавилона была все же более развитой, нежели египетская.

Белявский В.А. отмечает [5, гл. 7], что вавилонские ученые, которых греки и римляне звали халдеями, пользовались всемирной славой как чародеи, мудрецы, маги, чернокнижники, астрологи и вообще знатоки оккультных наук.

В этом значении слово "халдей" употреблялось в Европе вплоть до XIX в.

Вавилоняне знали шестидесятеричную и десятичную системы счета [6, с. 30; 7, с. 54–59] и основы той цифровой системы, которой под именем арабской мы пользуемся ныне.

У них были систематические дроби, вроде наших десятичных, с основанием 60.

Они владели не только четырьмя действиями арифметики, но умели также исчислять проценты, измерять площадь и объем различных геометрических фигур.

Им принадлежит деление окружности на 360 градусов, градуса – на 60 минут, минуты – на 60 секунд.

Они вычислили отношение длины окружности к диаметру (число π) и определили его равным 3, что вполне было им достаточно для практических целей.

Позже встречается приближение 25/8 = 3,125.

Знаменитая теорема Пифагора была известна вавилонским математикам в собственной интерпретации не менее чем за тысячу лет до Пифагора.

Вавилоняне знали основы арифметической и геометрической прогрессии

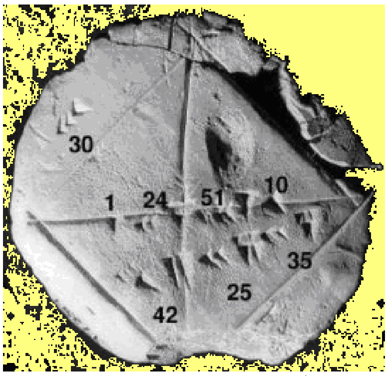

Рис. 2. Вавилонская табличка с вычислением корня из двух $\sqrt{2} \approx 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1{,}41421296...$

Наиболее поразительными были успехи в алгебре. Они умели решать системы линейных уравнений, квадратные и некоторые виды кубических уравнений. Умели возводить в степень и извлекать корень. Так, на клинописной табличке (рис. 2) (хранится в Йельском ун-те) изображен квадрат со стороной 30 и диагоналями; вдоль одной из них указано отношение диагонали к стороне, равное[2] 1; 24, 51, 10, а ниже – длина диагонали 42; 25, 36 [7, с. 61; 8, с. 47].

У них были таблицы умножения и таблицы обратных величин.

Они же разработали сложную символику цифр, которая принесла халдеям такую же славу, как и астрология. Вавилоняне изобрели и применяли при счете позиционную систему счисления.

Достижения математиков Вавилона и Египта легли в основу греческой математики – родоначальницы современной математической науки.

Так или иначе, но достоверно известно [27, с. 382], что «числовое решение квадратных уравнений было известно математикам древнего Вавилона приблизительно за 2000 лет до н.э.

Но все же «откуда появились трехчленные квадратные уравнения? Обыкновенные *задачи практической геометрии не нуждались в их решении*; при рассмотрении подобных фигур достаточно было пропорциональной зависимости, и разве только отыскание гипотенузы... приводит к извлечению квадратного корня» [8, с. 45].

Вероятно, уравнения возникли в результате обычного развития самой науки из обращения уже самих задач. То есть не тривиального вычисления площади и периметра прямоугольника по сторонам, а наоборот, отыскания сторон прямоугольника данного периметра $2p$ и площади q, что и приводило к канонической системе уравнений (теорема Безу): $x + y = p, \quad xy = q$. «Исходной точкой рассуждений вавилонян была задача: зная площадь и периметр прямоугольника, определить его стороны» [27, с. 382].

«Взаимно обратные задачи, одна из которых линейная, а две другие в степени, причем все три с одними и теми же числовыми значениями, были обнаружены К.Фогелем и в древневавилонских текстах. Возникающие при таком обращении системы могли быть затем сведены к трехчленным квадратным уравнениям. Во всяком случае, при постановке и решении подобного рода проблем **абстрагирующая математическая мысль одержала один из своих первых замечательных триумфов**» [8, с. 46].

Понятно, что вавилоняне еще не знали отрицательных и тем более комплексных чисел, поэтому рассматривали только уравнения с положительными решениями.

Рассмотрим в качестве примера их решение уравнения $x^2 - x = 14, 30$.

В нашей транскрипции это уравнение вида $x^2 - x = 870$ с корнем

$$\lambda = \left(1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 870}\right)/2 = \left(1 + \sqrt{3481}\right)/2 = (1 + 59)/2 = 30$$

или в записи, более приближенной к тому давнему времени

$$\lambda = \frac{1}{2} + \sqrt{870\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(29\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + 29\frac{1}{2} = 30.$$

[2] В современной научной литературе для удобства используется компактная запись вавилонского числа, например: 4, 2, 10; 46, 52. Расшифровывается эта запись следующим образом: $4 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60 + 10 + 46/60 + 52/60^2$. – Википедия. Вавилонская математика. – http://ru.wikipedia.org/wiki.

В тексте вавилонян сказано: «Я вычел из площади сторону моего квадрата, это 14,30». Далее идет вычисление: «Ты берешь 1, коэффициент. Ты делишь пополам 1, это 0;30. Ты умножаешь 0;30 на 0;30, это 0;15. Ты складываешь <это> с 14,30 и это есть 14,30;15, что является квадратом для 29;30. Ты складываешь 0;30, которое ты умножал, с 29;30, получается 30, сторона квадрата» [7, с. 94; 8, с. 43].

Все просто, красиво, и комментарии излишни.

Хотя, конечно, в целом богатая теоретическая основа математики Вавилона не имела еще целостного характера и сводилась к набору разрозненных приемов без доказательной базы. Системно-доказательный подход в математике появился уже у греков. Они же превзошли своих учителей с Востока и «впервые начали развивать математику как точную науку в нашем современном смысле» [8, с. 57].

Не будем дальше сильно закапываться в истории. Главное понятно.

Отдельные квадратные уравнения уже умели решать в Вавилоне тысячелетия назад.

И что здесь самое важное? – Их *решение относится к классу обратных задач*, без которых в то время можно было на практике и обойтись!

По сути, это первое торжество человеческого разума в постановке и нахождении решения математической проблемы в ее чисто абстрактном представлении.

Даже теорема Пифагора на этом фоне несколько блекнет, поскольку она уже не первая, а следующая (или соседняя) в общей иерархической цепочке формирования и развития математических метафизических (умозрительных) суждений. Но как теорема, это вершина (перл) абстрактного мышления, да еще и доказательного типа.

Хотя относится к задаче прямого (не обратного) хода или вида.

Поэтому не случайно, что Евклид «нигде не пользуется общей формулой решения квадратного уравнения даже в геометрической форме» [28, с. 438], включая задачи, потенциально сводимые к таким уравнениям. Но в его "Началах" есть предложение 6.28 [28, с. 209], достаточно длинное в изложении, но из которого все ж можно вывести основную формулу вычисления корня в ее современном представлении.

Близнецы и братья... Что касается простого квадратного уравнения, дающего в своем решении ЗС, его могли решать как вавилоняне, так и позже пифагорейцы (тем же способом приложения площадей или иным путем), что весьма вероятно, хотя достоверно это неизвестно [7, с. 140].

Напомним, что сам Пифагор для своих современников был не математиком, а "выдающимся софистом", то есть учителем мудрости, "религиозным пророком" и даже "чудотворцем" [7, с. 128]. А, по словам Гераклита в нем усматривалось "многознание без разума". Сам Пифагор называл себя «философом, искателем и любителем мудрости», и он был «чем-то вроде пророка, учения которого рассматривались ... как божественное откровение» [7, с. 149]. Поэтому не исключено, что определенные сведения о ЗС все-таки имелись (конечно, весьма далекие от современных представлений), но могли стать предметом некоей тайны, не подлежащей широкому посвящению (распространению).

Что ни говори, а мистически-сакральным от ЗС веет.

Позже у греков в "Началах" Евклида знания по задаче о крайнем и среднем разбросаны по книгам также настолько сумбурно, что не представляют единой системы или хотя бы какого-то общего подхода, разве что в направлении построения пентагона и додекаэдра.

Так или иначе, но саму фигуру в виде звездчатого правильного пятиугольника (пятиконечную звезда) можно найти на вавилонских рисунках.

Она же служила у пифагорейцев символом здоровья и опознавательным знаком.

Явление формул Бине народу... По мере развития знаний оказалось, что ЗС тесно связано не только с алгебраическим квадратным уравнением, но и его рекуррентным разностным аналогом, порождающим числовые ряды.

В подобной аддитивной рекурсии последовательность чисел формируется «рекуррентно, т.е. индуктивно, по их номеру». Но любое число ряда можно «определить и непосредственно, как некоторую функцию его номера» [9, с. 21].

Так, для чисел Фибоначчи – элементов целочисленной возвратной последовательности $x_t = x_{t-1} + x_{t-2}$ – явное выражение дает [9, с. 25; 10, с. 341] формула Бине (1786–1856):

$$x_t = C_1\lambda_1^t + C_2\lambda_2^t = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t\right], \tag{1}$$

где $\lambda_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ – корни квадратного уравнения (золотого сечения) $x^2 = x+1$;

$C_{1,2} = \pm\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ – постоянные, определяемые из начальных условий $(x_0, x_1) = (0, 1)$.

В работе [11, с. 62] с неотчетливым выведением представлено развитие формулы (1) уже для частного случая квадратного уравнения $x^2 = px+1$ и его разностного аналога $x_t = px_{t-1} + x_{t-2}$:

$$x_t = \frac{1}{p'}\left[\left(\frac{1+p'}{2}\right)^t - \left(\frac{1-p'}{2}\right)^t\right], \quad p' = \sqrt{p^2+4}\,. \tag{2}$$

Довольно странно, если не чудно, выглядит внутренняя кухня данного соотношения, с не доведенным до ума доказательством, да еще и для уравнения с одним параметром p, хотя их автору знакомы и в приложении фигурируют сведения о конечных разностях второго порядка с двумя коэффициентами [11, с. 194–198].

Как бы то ни было, но за формулу (2) буквально ухватились разработчики вариации, известной как гиперболические функции Фибоначчи–Люка (ГФФЛ) [12].

Все бы и ничего. Но подобное расширение (2) оказало медвежью услугу.

В чем же дело? – Исходя из логики и строго доказанных теорем К. Гёделя, любая формальная система (а совокупность ГФФЛ – таковая) не может до конца понять свое собственное устройство, если не поднимется на следующий уровень сложности (обобщения, развития). Но следующий естественный уровень сложности для квадратного уравнения после (2) – это снятие ограничения $q=1$, которое становится по сути роковым, поскольку воочию становится очевидным, что дальнейшее обобщение просто невозможно, де-факто ставя крест на так и не успевших набрать силы функциях ГФФЛ.

Впервые мы с эти столкнулись почти год назад [13], и уже тогда отметили воочию видимые непреодолимые трудности в дальнейшей формализации ГФФЛ.

Как квадратный трехчлен заблудился в гиперболическом лабиринте.

Мы не будем подробно исследовать ГФФЛ. Там все тривиально и основано на гениальных закономерностях Эйлера.

Только отметим, что само по себе введение ГФФЛ было выполнено крайне формально, в том числе с явным и элементарным нарушением физических единиц измерения (геометрических или гипотетических). В результате возникает заколдованный круг. Функции А. Боднара логически правильные, но не работают без перенормировки (умножения на коэффициент $2/\sqrt{5}$). Функции А. Стахова, наоборот, приспособлены к последовательностям Фибоначчи (попросту, из них же вытекают, а де-факто ими же и являются), но совершенно не адаптированы гиперболическим функциям в их истинном понимании: физическом, алгебраическом и геометрическом.

Подобные нововведения, как правило, малопродуктивны.

Поэтому их разработчики обязательно где-то должны вынужденно споткнуться...

В результате оперирования с ГФФЛ, при $q = 1$ мы еще получаем что-то вразумительное и похожее на приемлемые и работающие формулы, благодаря самой идее Фибоначчи.

Но когда $q > 1$, то все надежды на формирование общих положений и развитие теории в данном направлении просто исчерпываются и перечеркиваются.

Число Эйлера (основание натурального логарифма) безразмерная величина. Поэтому пока функции еще были одной размерности ("весовой категории"), картина представлялась еще как-то приглажено-радужной и не высвечивала заложенных в нее изначальных противоречий. Возникал колоритный образ некой интересной и своеобразной модели.

Хотя чисто на интуитивном уровне с самого начала чувствовался едва различимый, но устойчивый признак искусственности новообразования в виде ГФФЛ.

Это мнение усиливалось и окончательно сформировалось в виде негативного отношения к форме образования ГФФЛ уже при $q > 1$, когда стала воочию видна вся бессмысленность такой затеи.

Чтобы это до конца уяснить, достаточно задать простые вопросы: есть ли в ГФФЛ нечто похожее на формулу открытия, а если да, то в чем оно собственно состоит?

Непрерывность? – Так она автоматически следует еще из формулы Бине (1) с непрерывным временем t, – причем без какой-либо ее трансформации или преобразования.

Вид функций? – Так это огибающие <кривые, линии> – давно известные в математике (дифференциальной геометрии) конструкции [14, с. 520].

Может, *название*? – Пожалуй, да. Собственно и все...

Надежный выход из лабиринта как всегда на его входе. Традиционно-классическая математическая теория огибающих позволяет свободно оперировать не только с обобщенной функцией Фибоначчи для квадратного уравнения общего вида $x^2 = px + q$, но и с его дальнейшим естественным расширением на функцию Трибоначчи и далее в пространстве алгебраического уравнения n-го порядка. А вот в направлении (представлении, записи) ГФФЛ решение не обобщается в принципе.

Оказывается, простая классическая форма Бине без ее искусственного передергивания, как это делалось в ГФФЛ, в своей основе (1) содержит ядро-прообраз записи будущих решений и при повышении порядка алгебраических уравнений.

Такой путь продемонстрирован в работе [15] и приводит к следующему результату:

$$F_t = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j^t \Big/ \prod_{i=1,\, i \neq j}^{n} \left(x_j - x_i \right) \right), \tag{3}$$

где F_t – значения числового ряда; $x_i, i = \overline{1, n}$ – в общем случае комплексные корни исходного алгебраического уравнения n-го порядка.

Формула (3) соответствует начальным условиям $(F_0, F_1, ..., F_{n-1}) = (0, 0, ..., 1)$. При соответствующих дополнениях она расширяется и на любой набор затравочных чисел.

Этим самым устраняется парадокс, когда де-факто гиперболическое свойство (через свойства геометрической прогрессии) налицо, но описать с помощью гиперболических функций мы его не можем.

При разрешении этого парадокса становится совершенно очевидным, что ГФФЛ подпадают под бритву Оккама как лишние сущности, а любые (из многих миллиардов) непрерывно огибающие функции (окаймления, бордюры) для квадратного уравнения $x^2 = px + q$ спокойно воссоздаются по универсальной паре формул:

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{C}(x) \\ \mathrm{S}(x) \end{matrix}\right\rangle = \frac{\lambda^x \pm q^x \lambda^{-x}}{p'},$$

где $\lambda = (p + p')/2$ – положительный корень уравнения; $p' = \sqrt{p^2 + 4q}$.

Таким образом, если на языке надумано-противоречивых гиперболических образований ГФФЛ, квадратный трехчлен $x^2 - px - q$ общего вида уже не моделируется, то в рамках теории огибающих он полностью подпадает под формализованное описание так, что сохраняет преемственность для дальнейшего расширения (обобщения).

А это верный залог и гарантия (по Гёделю) того, что мы находимся на правильном пути математического описания свойств не только квадратного уравнения, но и его последующего более сложного синтеза: кубического (аддитивно-трехзвенного) и т.д.

"Надувной квадрат" или обобщенное квадратичное уравнение. То что, наши рассуждения не ограничивают рассмотрение в перспективе уравнений более высокого порядка, чем второй, это неплохо. Но и само квадратное уравнение, оказывается можно обобщить ("раздуть") так, что при многократном и достаточно высоком повышении степени оно по-прежнему будет в результате давать свое неизменное решение.

Такой подход впервые был продемонстрирован нами в работе [16] для моделирования гармонической пропорции на произвольное количество начальных условий, и ничего не мешает его распространить теперь на квадратное уравнение общего вида, – без каких-либо признаков-притязаний или претензий на "золочение".

Умножим исходное уравнение несколько раз последовательно на x^2 и упростим:

$$x^2 = px + q\,,$$

$$x^4 = px^3 + qx^2 = px^3 + pqx + q^2\,,$$

$$x^6 = px^5 + pqx^3 + q^2x^2 = px^5 + pqx^3 + pq^2x + q^3\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{2m} = p\sum\nolimits_{j=0}^{m-1} q^j x^{2(m-j)-1} + q^m\,. \qquad (4)$$

Пусть последнее равенство верно для любого m, докажем методом индукции его справедливость и для $m+1$.

Действительно,

$$x^{2(m+1)} = x^{2m}x^2 = p\sum\nolimits_{j=0}^{m-1} q^j x^{2(m-j)-1}x^2 + q^m x^2 = p\sum\nolimits_{j=0}^{m} q^j x^{2(m-j)-1} + q^{m+1}\,,$$

что и требовалось доказать.

Уравнение (4) выводит нас на важное, многостороннее и действительно полезное обобщение не только в общей концепции квадратного уравнения и его интегрирующем начале в развитии многих природных процессов и явлений.

Утверждения о его значимости в мироздании теперь приобретают реальные очертания и выводят достаточно простое понятие о квадратичности из сферы догадок и гипотез в область построения более четкой и обоснованной теории.

Например, можно задать миллиарды–триллионы совершенно произвольных соразмерных $2m$ начальных условий (целых, действительных, мнимых, иррациональных и других чисел в любой их комбинации) $x_s,\, s = \overline{0,\, 2m-1}$, и через считанное количество итерационных шагов рекурсия $(t = 0, 1, 2, ...)$

$$x_{2m+t} = p\sum\nolimits_{j=0}^{m-1} q^j x_{2(m-j)-1+t} + q^m x_t \qquad (5)$$

выводит нас с той или иной точностью на положительный корень $\lambda = \left(p + \sqrt{p^2 + 4q}\right)\Big/2$ исходного квадратного уравнения $x^2 = px + q$.

Подобные безликие числовые последовательности становятся прообразами моделей по конструированию и структурированию сложных природных образований, начиная с молекул, и заканчивая скоплениями галактик [16].

Современная алхимия... Ряд авторов, искренне верящих в универсальность ЗС, обязательно хотят его видеть и в других видах пропорции. Благо их много.

При этом для них непременно должно присутствовать золото в качестве признака.

И не важно, если что-то не получается. – Выкрасим! – Говорят они. – Вот и красят...

А потом еще даже спорят. Кто первый назвал (выкрасил).

Взять, например, вроде безобидное слово "металл", у которого нет, и не может быть ничего общего с абстрактной математикой.

И вдруг оно появляется в названии чисто математической конструкции!? – Откуда?

Ее автор В. Шпинадель вроде не похожа на ревностного адепта тяжелого рока или "heavy metal". Тогда отчего такая любовь к металлу? – Ларчик открывается просто: окрас вытекает из желания попасть в один синонимический ряд с золотым сечением. И этим самым поднять рейтинг собственного материала, без чего он становится обычными пересказом известного. Вот собственно и всё. Или все маленькие хитрости.

Но что интересно, – находится группа поддержки. Так, в работе [17] читаем: «Рекомендуется ввести в широкое употребление (?) следующие названия для отдельных типов металлической пропорции: *серебряная пропорция* – для названия числовой константы (ЧК) $1+\sqrt{2}$; *бронзовая пропорция* – для обозначения ЧК $\left(3+\sqrt{13}\right)/2$; *медная пропорция* – для обозначения ЧК 2; *никелевая пропорция* – для обозначения числовой константы $\left(1+\sqrt{13}\right)/2$».

Прямо как на Поле Чудес А. Толстого. Еще вчера эти мало примечательные числа были простыми корнями квадратного уравнения. Отныне ж они серебряные, бронзовые, никелевые...! И эти названия нужно ввести в самое широкое употребление!

Надо полагать и в школах!?

Пусть бы речь шла бы о студенческом капустнике.

Нет же, – оное преподносится от имени науки. Правда, с нюансами.

Попробуем и мы внести в это дело свой посильный вклад.

Вполне естественным продолжением становится проведение последующих аналогий подобно работе [17], которые мы продолжим уже по сотням (в зависимости от порядка величины p), и также предлагаем их ввести в самое широкое употребление:

– жидкостно-кислотные пропорции, включая царскую водку, спирты, $p > 10^2$;
– газировано-сиропные пропорции (сиропы вишневые, малиновые и т.д.), $p > 10^3$;
– фруктовые пропорции: банановая, финиковая, абрикосовая и т.п., $p > 10^4$;
– овощные пропорции: хреновая, морковная, репчатая, перцовая ..., $p > 10^5$.

Качественные дополнительные характеристики:

– если корень квадратный извлекается нормально, то "пропорции-извлеченцы";
– если коэффициент p делится нацело на 7, то певучие или радужные пропорции;
– если делится на 5 – пятипалые пропорции, на 3 – триодные или триалектические и т.д.

Затем все эти многочисленные названия-термины следует свести в один классификационный справочник. Так мы дадим начало системе отсчета подобно тому, какое ведется при регистрации космических тел, созвездий, галактик и т.п. Но последних, судя по всему, хотя и весьма много, но все-таки ограниченное число. Наших же пропорций, будет счетно-бесконечное множество, в классификации которого сможет поучаствовать еще не одно поколение гармонистов (от слова гармония).

Подобное занятие окажется особенно полезным и благотворным в минуты апатии или равнодушного безучастия к формированию сложных мыслительных процессов.

В поисках выхода. Но можно, конечно, обойтись и без алхимии, поступив проще, корректнее и эффективнее.

Просто желательно прекратить множить амбиции, капризы и высокопарные празднословия в угоду субъективно-личностным пристрастиям.

А это означает, что никакой смысловой нагрузки у "металла" нет! – Тем более, когда мы имеем с традиционными математическими конструкциями и структурами.

Можно и нужно говорить простым и понятным в математике языком, ведя речь об обычной *квадратичной пропорции* – пропорции, обусловленной квадратным уравнением.

Хорошо забытое старое... или давняя байка на новый лад.

Разуму многое неподвластно, и он естественно вопрошает: в чем собственно спор, господа-товарищи ученые?

1. Открыли *новые константы*? – Боже упаси. Все радикалы и корни давно известны.

2. Открыли *новые свойства*? – Нет. Исключение составляет расширение формулы Бине на частный случай квадратного уравнения $x^2 = px + 1$. Но и его уже давно расширили [21].

3. Придумали *новые разложения*? – Отнюдь.

Всё очевидно и явственно следует из самих уравнений, например,

$$x^2 = q + px \;\rightarrow\; x = \sqrt{q + px} = \sqrt{q + p\sqrt{q + px}} = \sqrt{q + p\sqrt{q + p\sqrt{q + \ldots}}}\;, \tag{6}$$

$$x^2 = px + q \;\rightarrow\; x = p + \frac{q}{x} = p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{x}} = p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \ldots}}}\,. \tag{7}$$

Это настолько отчетливо и тривиально следует из исходного уравнения и вообще из тех же разнообразных рекурсивных схем в математическом программировании, что даже с большой натяжкой не подходит под категорию новизны.

4. Установили *новую связь* алгебраического уравнения $x^2 = px + q$ и его возвратного аналога $x_t = px_{t-1} + qx_{t-2}$? – Никоим образом. Это давным-давно известно из той же теории разностных уравнений [10], причем произвольно-конечного порядка.

5. Выяснили *новое отношение* между соседними числами последовательности, которое стремится к корням уравнения? – Нет и еще раз нет. Это также уже общепринятые знания, следующие из теорем Бернулли, Пуанкаре и др. [10, гл. 5] для уравнений произвольного порядка.

В чем же тогда элементы новизны? – Спросят многие. Или хотя бы свежего взгляда (видения) на известные вещи?

В том то и дело, что на математическом языке нет ни одного компонента новизны, а свежими знаниями даже близко не пахнет.

Но есть заметные и действительно отличительные моменты, и здесь два ответа:

1) Первый и самый важный аспект – это *привлечение внимания* к данной проблематике со сменой акцентов от золотого сечения на другие возможные варианты математической пропорции, в частности, выражаемой квадратным уравнением. Это как восстановление статус-кво на фоне массово-психотропного увлечения ЗС определенного сообщества людей, которые просто подзабыли, что ЗС – хотя и важный, но всего лишь частный единичный случай в неисчерпаемом бесконечномерном океане пропорции.

Более того, изучая те же самые квадратичные аналоги пропорции, мы можем выйти на интересные результаты и по отношению к золотому сечению, как частному случаю.

2) *Самоутверждение* вопреки всему и вся. Тут появляются "золотые висюльки" и другие неинформативные термины сомнительного толка. И что интересное, они еще и сдобрены личными амбициями с претензией на открытие. Но когда просишь охарактеризовать или представить "формулу открытия" по сути, то кроме названий "металлические", "обобщения золотого сечения" ничего не предъявляется.

Это и есть суть нововведений. – Броские названия, за которыми пустота (в контексте новизны).

То, что здесь налицо бессодержательность, очевидно с самого начала.

Вопрос состоит в другом. – Почему она поддерживается или с какой целью раздувается?

Но тогда остается только понять: эти виды математической пропорции – самостоятельные и самодостаточные образования-конструкции, и в позолоченных эполетах или аксельбантах они не нуждаются. Также как математика квадратичной пропорции не нуждается в "металлических" бирюльках.

«Здесь имеется в виду тот "юридический" произвол, который отличает математические определения вообще. Мы имеем "юридическое" право, например, произвольно определить класс функций и назвать, "как хотим", например – непрерывными. Другое дело, что всякое разумное математическое определение обычно претендует на то, чтобы соответствовать некоторым интуитивным представлениям, отражать их. Законность определения еще не означает его разумности» [18].

Нельзя воспринимать всерьез вещи, когда математики подтрунивают, а именно такой следует понимать шутку В. Шпинадель, когда она придумывала свои медно-никелевые пропорции-фантазии.

Но как все быстро "пересказывается" и развивается. Уже в работе [19] отмечается, что «"Металлические пропорции" обладают следующими удивительными математическими свойствами», – далее приводятся равенства (6)–(7) при $q = 1$. Хотя всем очевидно, что это не их свойства, а давно известные признаки квадратного уравнения.

Почему и тема нашей статьи...

В поисках перспектив. Ну, а что квадратное уравнение... – Все ли здесь сказано?

Думается, нет. Только не следует кружиться вокруг названий корней, типа металлических или шарикоподшипниковых.

Нужно сосредотачиваться на развитии.

Есть и первые теоретические результаты, в том числе и наши:

а) Для каждой пары коэффициентов уравнения получено бесконечно множество разложений в бесконечные цепные дроби [20].

б) Для каждого уравнения выведена аналитическая формула с произвольной парой начальных условий [21].

в) Для каждого уравнения построено его обобщение, допускающее сколь угодно большое расширение на количество начальных условий (затравочных чисел) [16].

г) Разработаны основы теории рационального золотого сечения в целочисленных переменных [22].

И работа продолжается. Есть новые задумки и планы.

А это реальный довесок и в общую, не побоимся этого слова, – теорию ЗС.

Квадратный золотник. Квадратное уравнение получило неожиданно еще одну грань своего развития и осмысления. Кто бы мог подумать, но на этот раз, – ни много, ни мало, – в увязке с одной математической проблемой Гильберта, сформулированной им более 100 лет назад. Безусловно, сама мысль об этом уже значительно повышает степень значимости квадратичной концепции вообще и квадратного уравнения (с его разностным аналогом) в частности.

Речь идет о 4-й проблеме Гильберта, которая уже была упомянута вначале.

Во всяком случае, так заявлено в статьях [23, 24]. В целом это добротно-склеенные работы двух разноплановых соавторов, хотя все время не оставляет подспудное и не покидающее чувство о "скрещивании в них ужа и ежа". – В таком сравнении нет ничего предосудительного: непрерывная функция Фибоначчи действительно похожа на этот образ, имея змееобразный характер, обусловленный "колючими" радикалами.

Специалисты в данной области, если захотят высказаться, то еще дадут свои оценки.

Рис. 3. Памятная доска на Харьковском ун-те: «С 1937 г. по 2000 г. в университете учился и работал выдающийся геометр XX века академик Алексей Васильевич Погорелов»

Но что нас просто поразило, так это робко-пренебрежительное упоминание авторами своего бывшего соотечественника с фактическим принижением русской (российско-украинской) математической школы. Собственная фамилия одного из авторов по тексту (не считая списка литературы) представлена и везде выделена жирным шрифтом (7 раз), как впрочем, и многие другие. А вот знаменитому академику Погорелову места не нашлось.

Читаем буквально: «В математической литературе 4-я проблема Гильберта иногда считается сформулированной в весьма расплывчатой форме, что затрудняет ее окончательное решение. Как подчеркивается в 3[3], "оригинальная формулировка 4-й проблемы Гильберта является весьма расплывчатой для получения определенного ответа". В работе 4[4] американский геометр **Герберт Буземан** проанализировал весь комплекс вопросов, связанных с 4-й проблемой Гильберта, и также пришел к заключению, что эти вопросы являются излишне широкими. В этой связи следует отметить также книгу 5[5], посвященную частному решению 4-й проблемы Гильберта» [23].

Последнее предложение – эта вся информация о знаменитейшем Погорелове, про которого везде написано, что он решил проблему Гильберта не частично, а в полном объеме существующих геометрий [25].

Так в антологии [26] отмечается, что А.В. Погорелов – выдающийся геометр 20 века (рис. 3), которым получено полное решение четвертой проблемы Гильберта и регулярное решение многомерной проблемы Минковского.

Другое дело, сама проблема сформулирована нечетко. Но в том смысле, как она понимается большинством математиков, Погорелов её решил.

Нам остается только надеяться, что подобное демонстративное принижение его вклада сделано не умышленно, а скорее ошибочно. Поэтому будем считать это простым упущением авторов, за которым могут последовать их извинения и воздание должной дани уважения русскому математику.

Справедливости ради напомним, как еще в начале 80-х годов Американское математическое общество издавало серию книг под общим названием «Выдающиеся математики XX века». Том с монографией харьковского ученого Алексея Васильевича Погорелова «Проблема Монжа–Ампера» вышел под номером 4. В краткой аннотации, помещенной на суперобложке, он назван «*Величайшим геометром XX века*»[6].

Что еще бросается в глаза по работам [23, 24]? – Золотое сечение введено без должного обоснования, чисто механически. Такое же чисто механистическое расширение касается и корней уравнения $x^2 = px + 1$. А мы видели, к чему это привело на примере тех же ГФФЛ.

Вполне естествен и здесь следующий логический шаг развития теоретических выкладок до очевидного расширения уравнения $x^2 = px + q$. Но вот здесь могут возникнуть уже непреодолимые препятствия в части преподнесения теории от имени ГФФЛ, которые дальше объективно не развиваются.

Нет, само решение как раз-то и есть, и оно спокойно вписывается в эту, пусть даже механистическую концепцию. Но уже не от имени неподдающихся образований ГФФЛ, а "от лица" традиционных математических объектов – огибающих линий.

---

[3] Wikipedia. The Free Encyclopaedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_fourth_problem.
[4] Буземан Г. О 4-й проблеме Гильберта // Успехи математ. наук. – 1966. – Т. 21, № 1. – С. 155–164.
[5] Погорелов А.В. Четвертая проблема Гильберта. – М.: Наука, 1974. – 80 с.
[6] Зеркало недели. – № 3 (428), 25–31 января 2003.

Как будет называться эта новая теория, нам пока невдомек, но зато становится понятным, что вновь вводимое понятие "золотой гониометрии[7]" – пока малосодержательное словосочетание без определения объекта и предмета. Если речь идет только об углах, то они давно уже известны и исследованы – в том же "золотом треугольнике" или пентагоне.

Кстати, в проблеме Гильберта сама идея огибающих в качестве или в помощь геодезическим линиям может стать очень даже неплохим образом.

И математически вполне подходящим. – Чем не идея? Вместо пресловутых ГФФЛ, – консервативных образований, не поддающихся самовоспроизведению.

Ну, а что мы собственно хотели ожидать от абстрактных объектов, введенных без обоснований, и что называется "в лоб".

Даже в такой формальной науке, как математика, логические построения все ж превалируют над произвольными образованиями.

Сравните, параллели и меридианы являются одновременно геодезическими и огибающими линиями.

Что понравилось и импонирует в работах [23, 24], так это то, что авторы прямо высказываются о своих гипотезах, а не камуфлируют их в белые одежды.

Охотно делятся своими сомнениями и прожектами. Это похвально.

Хотя привязка геометрии к теории большого взрыва не до конца понятна. В нашем представлении не большой взрыв должен объяснять модернизированную геометрию, а наоборот, с помощью новой или развивающейся старой геометрии могут и должны объясняться другие теории. То есть геометрия здесь выступает в качестве инструментария.

Но в любом случае не может геометрия вместе с разрешением проблемы Гильберта быть заложником формализованной описательной конструкции, когда в записи-представлении ГФФЛ она не работает, а в интерпретации "своих родных огибающих" чувствует себя просто превосходно.

Поэтому можно считать, что гибрид квадратного уравнения и проблемы Гильберта пока не состоялся и ждет, если это будет востребовано, своего дальнейшего осмысления-"скрещивания" во славу развития науки.

А пока ученых вполне удовлетворяют теоретические концептуальные положения в изложении выдающегося геометра прошлого века, нашего соотечественника и почетного жителя Харькова – Алексея Погорелова – академика СССР, Российской и Украинской Академий Наук!

Вместо заключения.

Квадратичность – емкое, широкое и основательное понятие современной науки.

Оно более конструктивное и фундаментальное, нежели всякие наслоения околонаучного характера, включая "металлические", "обобщенно-золотые" и др.

И то, что золотое сечение – непосредственный и простейший частный случай квадратного уравнения, еще и еще раз подчеркивает основательность квадратичной концепции. От нее нужно не отходить (без особой на то надобности), придумывая новообразования сомнительного типа, а наоборот бережно сохранять и расширять, – с возможным синонимическим рядом различных смысловых оттенков: квадрат, дихотомия, дуальность, двойственность, бисекция и т.п. Где ключевым понятием и числом остается "2".

А уже на этой базе формируется глобальная философская концепция диалектики, за которой может следовать триалектика и даже n-лектика или "эналектика", где уже "3", включая *троицу*, выступают частным случаем. – С их возможным развитием во времени-пространстве (типа 4-й координаты). Но это уже другая тема, которая лишь подчеркивает, что действительно нужно (и есть перед кем!) замолвить о квадрате слово.

---

[7] Гониометрия (греч. *gonia* угол и ...метрия) – часть тригонометрии, в которой рассматриваются способы измерения углов (Большой Российский энциклопедический словарь). В статье гониометрией называют часть геометрии, устанавливающей соотношения между тригонометрическими функциями.

Терминологические "пираты-новаторы", к которым мы относим в некоторой степени и себя, в серьезных понятиях, определениях и терминах не должны выходить за допустимые границы, определяемые по критерию того же здравого смысла.

Квадрат – это как раз та сфера (область), которая не должна подменяться новообразованиями, а бережно сохраняться и приумножаться новыми теоретическими знаниями и практическими приложениями.

Не случайно в геометрии сам *квадрат имеет двойное определение* через углы и стороны: как равносторонний прямоугольник и как прямоугольный ромб.

И еще один, на наш взгляд довольно уникальный, хотя и несколько необычный аспект.

Деление вавилонянами окружности на 360 градусов и 10-тичная (десятипальцевая) арабская система счисления автоматически приводит к золотому сечению (через угол 36^{o} золотого треугольника и правильного 10-угольника). Это во многом, если не объясняет, то хотя бы характеризует интуитивную тягу человека к этой необычной числовой константе (возможно, на генетическом уровне), и может составить предмет отдельного исследования.

Но то, что математическая модель квадратного уравнения стала первым замечательным триумфом абстрактного человеческого мышления, следует только беречь и приумножать!

А не разменивать ... на металлическую мелочь, даже если она с желтизной.

Литература.

1. *Кузьмин О.В*. Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. – М., 2000. – 294 с.
2. *Кузьмин О.В*. Обобщения чисел Фибоначчи и Трибоначчи // Оптимизация, управление, интеллект. – Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2000. – Вып. 4. – С. 188–198. – http://ellib.library.isu.ru/showdoc.php?id=4906.
3. *Hoggatt V.E.* Generalized Fibonacci Numbers in Pascal's Pyramid // Fibonacci Quart. 1972. – Vol. 10. – № 3. – P. 271–275, 293.
4. *Стахов А.П.* Некоторые рассуждения об обобщениях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15643, 10.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321177.htm.
5. *Белявский В.А*. Вавилон легендарный и Вавилон исторический/ – http://gumilevica.kulichki.ru/MOB/index.html.
6. *Депман И.Я*. История арифметики: 2-е изд., испр. – М.: Просвещение, 1965. – 418 с.
7. *Ван дер Варден*. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции: Пер. с голланд. И.Н. Веселовского. – М.: Физматлит, 1959. – 462 с.
8. *История математики*: Т.1. С древнейших времен до начала нового времени / Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 352 с. – http://www.math.ru/lib/book/djvu/istoria/istmat1.djvu.
9. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.
10. *Гельфонд А.О*. Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 1959. – 400 с.
11. *Газале М*. Гномон. От фараонов до фракталов: Пер. с англ. – М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 272 с. / Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 /.
12. *Стахов А.П.* Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод "золотой" криптографии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm.
13. *Василенко С.Л.* Гиперболические функции "золотого" сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14931 от 05.12.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321092.htm.
14. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1974. – 832 с.
15. *Василенко С.Л.* Многофункциональное обобщение "золотого" сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15117 от 23.02.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321097.htm.

16. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения. – Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.

17. *Стахов А.П.* "Металлические Пропорции" Веры Шпинадель // Академия Тринитаризма. М.: – Эл. № 77-6567, публ.12532, 25.10.2005. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320029.htm.

18. *Успенский В.А.* Семь размышлений на темы философии математики // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.11127, 08.04.2004. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0202/007a/02020021.htm.

19. *Стахов А.П.* Металлические Пропорции – новые математические константы Природы // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14748, 22.03.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321079.htm.

20. *Василенко С.Л.* Квадратичные цепные дроби (квадрацепи) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15595, 10.10.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161557.htm.

21. *Василенко С.Л.* Аналитика "золотых" пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.

22. *Василенко С.Л.* Основы теории рационального золотого сечения в целочисленных переменных // Академия Тринитаризма, М.: Эл. № 77-6567, публ.15274 от 08.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322057.htm.

23. *Стахов А.П., Арансон С.Х.* "Золотая" фибоначчиевая гониометрия, четвёртая проблема Гильберта, преобразования фибоначчи-лоренца и "золотая" интерпретация специальной теории относительности // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15225, 12.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322036.htm.

24. *Стахов А.П., Арансон С.Х.* Золотая фибоначчиевая гониометрия, преобразования Фибоначчи-Лоренца и четвертая проблема Гильберта // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14816, 04.06.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321087.htm.

25. *Погорелов А.В.* Четвертая проблема Гильберта. – М.: Наука, 1974. – 80 с.

26. *Проблемы* Гильберта. Антология / Под ред. П.С. Александрова. – М.: Исфара, 2000. – 240 с. // Яглом И.М. К четвертой проблеме Гильберта. – С. 95–100.

27. *Начала Евклида*. Книги VII–X: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1949. – 512 с.

28. *Начала Евклида*. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

г. Харьков, ноябрь 2009.