С.Л. Василенко

"Золотой разговор" с Евклидом

...где начинается вычисление,
там кончается понимание.
А. Шопенгауэр

У широко известного российского математика Юрия Манина[1] есть любопытная книга «Математика как метафора».

В ней, он в частности приводит довольно поучительный пример [1, с. 137], как другой известный математик начинал читать логику студентам. «Логика – это наука о законах мышления, – сообщал он. Теперь я должен объяснить вам, что такое *наука*, что такое *закон* и что такое *мышление*. Что такое "о", я объяснять не буду».

ЕВКЛИД: "*К геометрии нет царской дороги*"

Кто такой Евклид[2] (древнегреческий математик, ок. 300 г. до н. э.) к счастью, разъяснять не надо.

Достаточно напомнить, что более двух тысячелетий его наиболее знаменитые и выдающиеся "Начала" служили для людей базовым учебником геометрии /само слово "геометрия" в переводе с греческого буквально означает "землемерие"/.

Это 13 достаточно объемных книг, которые по количеству многочисленных разных переизданий уступают только библии.

Потом к ним добавились еще две книги его последователей.

Следует сказать, что Евклид включил в свой учебник многое из того, что было создано его предшественниками, конечно, обработав этот материал и сведя его воедино, насколько это позволяли имеющиеся знания того времени.

В частности, в I книге отражены свойства треугольников и параллелограммов, включая знаменитую теорему *Пифагора*.

Книга II восходит еще к *пифагорейцам* и посвящена вопросам, которые сегодня относят к геометрической алгебре.

В III–IV книгах изложена геометрия окружностей с вписанными и описанными правильными многоугольниками, возможно, на основе трудов *Гиппократа*.

В V книге вводится общая теория пропорций *Евдокса* и т.д.

Ёж-Фома-верификация. Для оценки, пусть даже с оттенками субъективизма, истинности исследуемых утверждений воспользуемся методом частичной верификации[3].

---

[1] Юрий Иванович Манин (1937) – российский математик, алгебраический геометр, член-корреспондент РАН (1991), член многих академий, включая Французскую Академию наук, Американскую академию искусств и наук. Один из основоположников некоммутативной алгебраической геометрии и квантовой информатики. Лауреат Ленинской премии СССР (1967). Будучи алгебраистом-геометром, вопросы золотого сечения знает, что называется изнутри, хотя относится к ним с долей пессимистичности, как больше тяготеющим к метафизическим фантазиям

[2] В статье использованы иллюстрации Евклида по материалам сайтов: http://ru.wikipedia.org/wiki, http://www.aiwaz.net/panopticon/euclid/gi881c129, http://nibiryukov.narod.ru/nb_pinacoteca

[3] ВЕРИФИКАЦИЯ (от лат. *verus* истинный и *facio* делаю; доказательство, подтверждение) – проверка, эмпирическое подтверждение истинности теоретических положений науки путем сопоставления их с наблюдаемыми объектами. Принцип верификации (верифицируемости) – одно из основных понятий логического позитивизма.

«Верификация – это процедура, включающая какое-то сравнение утверждения с реальностью; тем самым подразумевается, что верифицируемым утверждениям приписывается какой-то смысл (это в равной мере относится и к "очевидным" утверждениям, проверка которых опускается)» [1, с. 75].

Это сравнительно наивная философская основа, которая, тем не менее, позволяет проанализировать небольшие лингвистические конструкции исходя из здравого смысла, избегая крайних суждений о явно противоречивых транскрипциях-толкованиях далекого исторического прошлого.

Для анализа подобных суждений, а также удобства изложения собственных "размышлизмов" мы решили воспользоваться расхожим выражением "Это даже ёжику понятно!" – смешной милой фразой, на которую грех обижаться.

Возникла идея наделить эту "живую колючку" средними мыслительными способностями и объединить с другим не менее интересным персонажем, который ни во что не верит, – во всяком случае, голословным рассуждениям или заявлениям.

В результате у нас получился новый вымышленный гипотетический образ-персонаж "Ёж-Фома". Он ни чему не верит на слово. Но ходит и все перемеряет, переспрашивает и постоянно верифицирует.

Иначе говоря, "Ёж-Фома-верификация ".

Довольно чутко реагируя на логические несуразицы, он одновременно служит своеобразным передаточным звеном (механизмом) между нами и голосами далеких предков в смысле интерпретации их представлений на наши вопросы.

Нечто машины времени с возможной передачей мыслей на расстояние.

Данный персонаж нам просто необходим еще и потому, что в эпоху Евклида математик был буквально терроризирован софистами, которые расставляли свои силки на каждом шагу. Допустим для доказательства «геометр начал вычерчивать круги и проводить прямые. Софист возражает, что это не всегда можно сделать, что циркуль или линейка могут не оказаться в руках, а тогда теорему уже нельзя будет доказать. В самом ходе доказательства он будет придираться к самым, казалось бы, бесспорным и простым истинам» [2, с. 263].

Так что, с одной стороны, необходимо строить надежные укрепления против софистов в виде основательных доказательств по всем правилам науки, а иногда просто отсекать лишние наслоения по принципу бритвы Оккама с простой аргументацией, что и "Ёжику-Фоме понятно".

Нечто вроде аксиом-постулатов на фоне спорных моментов, действительно требующих логического подтверждения. Одновременно, это как бы перекличка веков или мысленно-овеществленное обращение к "забытым теням предков".

Немного истории об истории. Золотое сечение в его современном представлении встречается в "Началах" Евклида в двух формах, которые весьма различны и довольно далеки друг от друга в глазах греческого математика IV века до н. э.

Первая форма связана с отношением и равенством площадей [2, с. 75]:

Предложение 2.11. Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке.

/в нумерации 2.11 первое число означает 2-ю книгу "Начал", другое – 11-е предложение/

То есть линия делится так, что больший отрезок является средней пропорциональной между всей линией и меньшим отрезком. О всяком прямоугольном параллелограмме говорят, что он заключен между двумя прямыми, образующими прямой угол (определение 2.1). Не исключено, что похожие формы были известны еще ранее египтянам.

Вторая форма известна как задача деления отрезка в *крайнем и среднем отношении* (КСО), и впервые ее описание звучит следующим образом:

Определение 3.6. Говорится, что прямая делится в *крайнем и среднем отношении*, если как целая к большему отрезку, так и больший отрезок меньшему [2, с. 173].

Построение, похожее на 2.11, приведено в предложении 6.30: данную ограниченную прямую рассечь в крайнем и среднем отношении [2, с. 213]. Хотя там уже другие буквенные обозначения, нежели в первой форме. А доказательство идет через пропорциональность отрезков и нахождение большего из них.

Обратим еще внимание на слово "*говорится*", – достаточно нетривальное образование для вводимых определений с некими флюидами безысходности, которой приходится подчиняться, или наоборот широкой апробацией-одобрением всеми говорящими.

Например, Сергей Ясинский анатомирует или раскрывает слово "*говорится*" тем, что «по всей видимости, в окружении Евклида хорошо знали процедуру деления отрезка в КСО, то есть считали это деление общеизвестным фактом, который не требует специального доказательства и воспринимается всеми как общеизвестная процедура» [5, с. 63].

Нам представляется, что подобное объяснение типа "знали–не знали" некую процедуру верно, но неполно. Большая часть самой геометрии Евклида построена по такому объяснению. Тем не менее, слово "говорится" используется нечасто.

Скорее всего, это означает некий понятийный образ или словесную идиому, к которой, возможно, сам Евклид имеет субъективное отношение, но все-таки раз "говорится", то говорится. Тем более что книга II берет свои начала еще от пифагорейцев.

С чем же ассоциируется подобный образ?

Наиболее вероятно это вытекает из количества сравниваемых величин (а их три), причем одна из них (больший отрезок) используется два раза. Таким образом, данная словесная конструкция уже применялась до Евклида, а он принял ее как должное.

А куда деваться, если "*говорится*"?

И когда отношение формулировали или пытались как-то формализовать в виде записей, возникал **образ двух крайних и одного, но два раза повторяемого, среднего**.

Отсюда и возникло название.

Характерно, что ситуация не изменяется, если из таких отношений будет выстроена целая цепочка, например, непрерывной пропорции, как в первых десяти предложениях 8-й книги [3, с. 42–53]. По-прежнему остаются два самых крайних предмета (величины) и некоторая «сборная средняя» посередине.

Одновременно такая форма определения в дополнение со словом "говорится" указывает на *неопределенную дистанцию* между двумя описанными формами ЗС, скорее всего большого, а, возможно, и непреодолимого по тем временам расстояния.

В том числе, когда еще не было четкой и однозначной связи между произвольными числами и отрезками. Например, согласно предложению 8.11 для двух квадратных чисел существует одно *среднее пропорциональное число* [3, с. 54], которое можно, по сути, вставить между этими квадратными числами [3, с. 315] и т.п.

А нам, чтобы понять Евклида и других древнегреческих мыслителей, недостаточно быть математиком или философом. Желательно чувствовать "дух" языка того времени и обладать высочайшей степенью мимикрии, чтобы растворяться в авторах [6].

Надо на время попытаться мыслить как они. И только в этом случае можно рассчитывать на успех в понимании и интерпретации трудных мест из их трудов.

Ёж-Фома размерено и сосредоточенно вышагивал по комнате, временами приглаживая свои иголочки, но молчал, что означало полное включение в мыслительный процесс.

Критический анализ предшествующих работ. Есть авторы, которые десятилетиями заявляют о том, что золотое сечение якобы родилось буквально из уст Пифагора, Платона и

Евклида, и ни разу не удосужились проанализировать надежные первоисточники, в основном ограничиваясь вольным пересказом других не менее вольных пересказов 2–3-го и большего порядка.

Но делается это так уверенно, будто озвучивается истина в последней инстанции.

Например, в работе [7] читаем: «Из "Начал Евклида" известен следующий способ геометрического построения "золотого сечения" с использованием линейки и циркуля. Построим прямоугольный треугольник *ABC* со сторонами *AB* = 1 и *AC* =1/2...».

Далее можно не цитировать, поскольку становится очевидным, что автор даже не заглядывал в книги. У Евклида подобных построений с прямоугольным треугольником и близко нет. – В этой части он оперирует "параллелограммами" (прямоугольниками, квадратами) [2, с. 75] или равнобедренным треугольником, «имеющим каждый из углов при основании вдвое большим угла при вершине» [2, с. 133], – в нашем понимании 36–72–72^{o}.

Или в статьях [8, 9] находим (с точностью до буквенных обозначений и без каких-либо ссылок) следующую формулировку якобы евклидового предложения 2.11. «Данную прямую AD разделить на две неравные части AF и FD так, чтобы площадь квадрата, построенного на большем отрезке AF, равнялась бы площади прямоугольника, построенного на отрезке AD и меньшем отрезке FD»... Нам остается добавить: а сам больший отрезок составлял $\left(\sqrt{5}-1\right)/2$ часть от целого и обусловлен числами Фибоначчи...

Те, кто привык работать с научной литературой, не могли не заметить «выдаваемого эрзаца вместо текста Евклида» [6] и высказали мнение об «использовании каких-то прошедших через десятые руки формулировок не первой свежести» [10].

Особо обращалось внимание на то, что Евклид не выражал предложение 2.11 в приведенном виде, ни разу не вставлял в утверждения латинские буквы. У него нет слов "на две неравные части", нет слов "больший" и "меньший". Древнегреческие математики не писали "площадь квадрата" или "площадь прямоугольника" и т.п.

На эти замечания последовал ответ со смещением акцентов, в частности: «Белянин не согласен с установившимся (?) мнением, что именно Пифагор, Платон, Евклид были первыми из тех, кто обратил внимание на особую (?) роль «Золотого Сечения» в структурах Мироздания (?)» [8]. В другой интерпретации эта мысль представляется уже «традиционной точкой зрения на историю ЗС».

Подобные суждения нельзя оставить без внимания:

1) Виктор Белянин, конечно, говорил о других вещах, а здесь налицо искажение смыслов и безапелляционность суждений, густо усыпанных утверждениями сомнительного толка.

2) *Установившихся* мнений в освещении исторических событий далекого прошлого просто быть не может. Могут быть разные мнения с той или иной степенью достоверности, определяемой человеческим сообществом на основании собственных субъективных оценок.

3) Упомянутые ученые древности в своих математических рассуждениях касались темы ЗС не утилитарно, а отвлеченно (включая построение тел) и без всякого выделения особой роли даже в абстрактной математике, не говоря уже о *реальных структурах Мироздания* (what is it?).

Из статьи [11] мы, наконец, узнаем, откуда появились вышеупомянутые эрзацы-определения, «достаточно обратиться к книге канадского математика Roger Herz-Fishler[4], которая является наиболее известным в мире источником информации по математической истории "золотого сечения". В этой книге на с. 8 Теорема II.11 приведена в следующей редакции: <u>Theorem II.11</u> (the area formulation of DEMR). To divide a line *AB* into two segments, a larger one *AH* and a smaller one *HB,* so that *S*(*AH*) = *R*(*AB*, *BH*)».

[4] *Roger Herz-Fishler*. A Mathematical History of the Golden Number. Dover Publications, Inc. N.Y., 1998.

Надо сказать, что наш Ёжик-Фома отменно знает многие языки, но после услышанного утверждения "иголки на его голове встали дыбом".

1) Получается, что нам ранее преподносили как формулировку Евклида, на самом деле является перевод вольного изложения некого интерпретатора. Вообще-то об этом следовало бы сказать еще раньше в работах [8, 9] и естественно сделать ссылку (!), – да уж ладно.

2) Теорем у Евклида нет! Однако среди общего названия "*предложения*" некоторые из них можно воспринимать как теоремы, а иные как таковыми, что сейчас называем задачами на построение. Хотя, безусловно, для Евклида это гораздо больше, чем задачи на построение; это *доказательство существования* [2, с. 256], которое играет ключевую роль в самой геометрии. Конкретно предложение 2.11 как раз относится к утверждениям такого рода, но на теорему оно и отдаленно не похоже.

В целом, когда мы говорим о геометрии вообще, то возможны различного рода расширенные записи с буквенной символикой, различными уточнениями. Но если мы обсуждаем историю вопроса ЗС на языке Евклида, то подобное просто недопустимо.

Автор также волен интерпретировать любое научное суждение на свой лад.

Лишь бы не доводить его до абсурда или вносить в него заведомо неприемлемые вещи.

Возвращаясь к Евклиду, мы видим: никаких больших и меньших отрезков у него в формулировке нет!

Никаких неравных отрезков – тоже нет. Они появляются потом, в ходе решения задачи.

Буквы в формулировках отсутствуют. Но они могут использоваться в доказательствах. Одним словом не история "золотого сечения", а красивый суррогат.

Но года идут. И вот известное предложение Евклида обрастает, как всегда без ссылок, новыми всходами-отростками щупалец, но уже даже не как теорема, а *исторически первое чудо-определение* ЗС (?) [12]:

> **Теорема II.11 (Евклидово определение «Золотого Сечения»)**. *Данную прямую $AB=a$ разделить точкой C на две неравные части $AC=b$ и $CB=c$ ($AC>CB$) так, чтобы прямоугольник, заключенный между прямой AB и меньшим отрезком CB, был равен квадрату, построенному на большем отрезке AC.*

Все музы просто внимают и молчат... Комментарии излишни... Не хватает только интеграла в бесконечномерном пространстве Фибоначчи...

Ну, и уже совсем обескураживает длинная реплика [13].

1) Здесь просматривается и явное стремление к сотрудничеству: «В дальнейшем я буду использовать его (Сергиенко) алгоритм решения задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении», хотя, по нашим оценкам, этот способ не идет ни в какое сравнение с оригинальным методом Евклида и явно уступает ему по сложности.

2) Тут и запоздалое признание ученого, десятки раз писавшего и говорившего о роли Евклида в теории ЗС (с чужих слов) и, как теперь узнается, вероятно, не открывшего ни разу за всю свою жизнь "Начала" Евклида. – В частности, русского перевода [2–4] 60-летней давности с комментариями Мордухай–Болтовского (М–Б): «мне доставляет удовольствие привести здесь эти комментарии, о которых я раньше не знал» [13].

Но ведь именно об этом и говорил Виктор Белянин [6, 10]!

3) И, наконец, просто "ошеломляющее открытие про Волгу и Каспийское море" (понятное даже Ёжику-Фоме): «Во-первых, М–Б отождествляет "деление отрезка в крайнем и среднем отношении" и ЗС. Это – одна и та же задача! Во-вторых, в "Началах" Евклида имеется не одна (Предложение 2.11), а, по крайней мере, две различные формулировки задачи о ЗС» [13].

А теперь только вдумаемся, о чем идет речь.

И это становится даже не смешно. – Столько писать об истории ЗС, и не знать таких простых очевидных фактов!

4) Но и это не все. Снова, уже в который раз, вместо анализа оригинала (самих текстов Евклида) идет подмена смыслов и понятий, только уже на уровне другого комментатора, пусть даже уважаемого М–Б. Спрашивается, а где же собственные наблюдения? Уже с позиций современных знаний, но без подмены понятий. Вопрос остается открытым...

И потом «авторитет М–Б не вызывает сомнений... ставит жирную точку в споре о том – знали ли Пифагор и Платон о золотом сечении» [13] – это не факты, а скорее гипотезы.

А скоротечный вывод о том, что «М–Б видит (?) "египетский след" и явно намекает (?) на Пифагора, который 22 года провел в Египте и привез оттуда огромное количество египетских математических знаний, включая "теорему Пифагора" и "золотое сечение"», на поверку может оказаться очередной беспочвенной фантазией.

Из первых рук... Читая подобные материалы, невольно приходишь в недоумение: столько работать в области ЗС, столько раз отмечать приоритет Евклида в ЗС и только сейчас приходить в восторг о частичном подтверждении этих мыслей в "Началах" самого Евклида (в переводе М–Б), изданных на русском 60 лет назад.

Именно эта линия и была главным предметом правильного и неоднократного возмущения авторского коллектива в лице Виктора Белянина и Андрея Радзюкевича.

Евклидову геометрию можно и даже должно изучать по разным современным учебникам математики без переводов оригинала. Но если уже писать об истории ЗС и о том как она изложена у того же Евклида, просто не понятно, как можно пользоваться литературой второго-третьего пересказа, и не заглянуть в тексты самого Евклида.

Вот так часто и рождается легковесность и эрзацы в историчности ЗС под разными майонезами-соусами и приправой.

Мало кто сомневается, что история ЗС насчитывает не одно тысячелетие.

Весь вопрос, какие смыслы и понятия в него вкладывали ученые древних веков?

Есть и прогноз-ответ: намного отдаленные и совсем не такие, как человек XXI века.

Мы во многом – сторонники идей Пифагора, но считаем, что и его тоже не следует абсолютизировать. Возможно, и записи он не оставил только потому, чтобы в случае чего всегда сказать, что его не верно поняли. А он имел в виду нечто другое.

Такая своеобразная уловка. – А почему бы и нет?

Анализ формулировок Евклида.

При изложении любой теории не всё и ни всегда получается гладко.

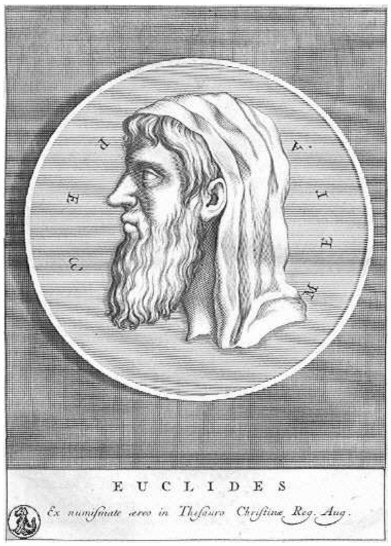
Встречаются шероховатости, бывают неувязки, не исключаются заумные доказательства вместо более простых формулировок.

Но именно в своем предложении 2.11 Евклид выглядит на высоте, если не сказать умницей. И не нужно его переиначивать или искривлять на свой лад. Не следует добавлять свое, чуждое и лишнее эпохе того времени. Хотя, в принципе не возбраняется. Только тогда нужно четко об этом заявлять, но не выдавать отсебятину от имени Евклида. Вот и все.

1. «Данную прямую разделить» – речь идет, безусловно, об ограниченном (конечном) участке прямой произвольной протяженности или фиксированном (заданном) отрезке прямой линии. Прямая в терминологии Евклида означает прямолинейный отрезок. И очень хорошо, что он начинает свою формулировку именно со слов «Данную прямую...», – далее используются два отрезка, чтобы не путаться. Ёжику-Фоме понятно, что речь идет о некотором прямолинейном исходном отрезке (ограниченной прямой). В частности, чтобы не было тавтологии, повторения и ералаша с другими отрезками, которые фигурируют в задаче.

Не исключено, что Евклид специально так писал, чтобы потом лучше различать исходный и два составных отрезка. Эдакая фальшь-панель.

2. Выражение Евклида «прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков» нужно понимать тоже буквально (даже если ёжику сначала и не очень понятно).



Тогда все становится на свои места. Прямоугольник строится именно «между целой и одним из отрезков». Просто для лучшего обозрения эта «целая» вычерчивается по вертикали! А само понятие *целого* у Евклида представляется уже квадратом на исходной прямой (целой, отрезке).

В таком контексте целое (участок прямой) легче представляется (подразумевается) в вертикальном исполнении: и между ней и "одним из отрезков" (первым по счету) строится или воспроизводится прямоугольник. А уже "на оставшемся отрезке" (по горизонтали) воспроизводится квадрат.

«Под фигурой Евклид подразумевает то, что содержится внутри каких-нибудь границ и в ряде случаев она рассматривается как часть плоскости, ... под равенством фигур Евклид понимает равенство заключенных в сравниваемых фигурах частей плоскостей, а с позиции современного представления – это равенство их площадей» [5, с. 57].

Мы специально привели эти слова, с которыми полностью согласны, чтобы было видно общее понимание данного вопроса разными авторами, что и ёжику ясно без ежовых рукавиц.

Тут Ёжик-Фома заулыбался, что называется "во весь рот", что означало явное уразумение сказанного и признание шуточного сравнения.

Слово "площадь" – возможно, правильно с точки зрения современной математики (если быть чрезмерно дотошным), но в те времена оно опускалось, считая, что и так понятно.

3. Утверждение 2.11 не детализирует, что это за отрезки:

а) равные или неравные;

б) если даже неравные, не устанавливается порядок их следования или "крепежа" к фигурам: прямоугольнику и квадрату. Это важно. Задача ставится РАЗДЕЛИТЬ (чтобы фигуры стали равными). Все!! А каким конкретно будет это деление, покажет решение.

Конечно, зная заранее ответ, можно нафантазировать в утверждении дополнительные слова. Только зачем, когда у самого Евклида это прописано просто замечательно и понятно каждому, кто ориентируется в логике и математике.

4. Кроме того, прямоугольник "между целой и одним из отрезков" идентифицирует или ассоциирует с частью плоскости, занимаемой этой фигурой или ее площадью, что уже затем непосредственно вытекает из приводимых доказательств на протяжении всех книг "Начал".

Основные резюме:

1) Понятия "*большего и меньшего*" отрезков – избыточное требование (которое может возникнуть уже потом в ходе задачи) и у такого геометра как Евклид, просто быть не может!

2) Букв в формулировках тоже нет. Но они могли появляться потом в доказательствах.

То есть буквенные обозначения в ключевых положениях геометры того времени не применяли не потому, что они не умели этого делать. В этом крылась и состояла целая философия толкования суждений в словесной форме. Во все времена формулирование утверждений или теорем на понятийном уровне составляли "высший пилотаж" в математике:

– полного финитно описываемого набора аксиом арифметики не существует (теорема Гёделя) [1, с. 100];

– понятие арифметической истины не может быть выражено средствами арифметики (Теорема Тарского о невыразимости истины);

– любое множество менее мощно, чем множество всех его подмножеств (теорема Кантора);

– касательная к линии второго порядка, проведенная в одной из вершин вписанного пятиугольника, пересекается со стороной, противоположной этой вершине, в точке, которая лежит на прямой, проходящей через точки пересечения остальных пар несмежных сторон этого пятиугольника (вариация теоремы Паскаля, в т. ч. в связи с золотым сечением);

– не существует непрерывного касательного векторного поля на сфере, которое нигде не обращается в ноль (теорема о причесывании ежа[5]) и др.

От последних слов Ёж-Фомка слегка поморщился, искоса посмотрел в зеркало и поправил две иголочки над бровями. Но когда, до него окончательно дошло (слава богу, не жираф), что в честь него назвали теорему, да еще космических масштабов, он явно загордился.

А у нас в это время окончательно сформировалось еще одно наблюдение.

Чтобы лучше понимать Евклида, желательно вообще не знакомиться с исследованиями ученых по «золотому сечению», поскольку они "зашорены" своим сечением и невольно "подгоняют" всё и вся под свои штампы.

Читать про историю ЗС нужно из книг, максимально приближенных к оригиналам, но максимально удаленных от ЗС!

Некоторые разочарования неоправданных надежд. Петр Сергиенко в ряде своих предшествующих работ небезосновательно подвергал критике известные геометрические построения ЗС через прямоугольный треугольник, когда все ключевые отношения не выстраиваются на одной прямой линии, и предлагал свои оригинальные и интересные решения. Статья же, посвященная решению задачи Евклида [14], несколько разочаровала, хотя и представлена под такой интересной рубрикой как "начала математизации гармонии".

Прежде всего, из текста не понятно, чем не устраивают автора построения Евклида.

А предложенный им алгоритм, цель которого сама по себе также не ясна, характеризуется в целом правильным, но слишком "мудреным". У Евклида, жившего тысячелетия назад, геометрическое построение гораздо проще, эффективнее и нагляднее.

Складывается также устойчивое впечатление, что автор «начал математизации гармонии» [14], говоря о Евклиде, даже не заглянул в первоисточники, и это не радует.

Мы полагаем, что о Евклиде нужно изъясняться на языке, максимально приближенному к оригиналу. А что имеем в упомянутой работе?

Начав с критических замечаний (как оппоненты решали геометрическую задачу не геометрически), он сам тут же "съезжает с темы" и, по сути, "наступает на грабли", которые пытался отставить в угол.

Опять появились неравные отрезки, которых у Евклида нет.

Невесть откуда выплывают буквенные обозначения в формулировках. Собственные доказательства приводятся в числовой форме, чего сам Евклид никогда не делал.

Снова зазвучали "больший и меньший" отрезки.

Просто удивительно, почему многие в отправной информации так тянутся к словам о «квадрате на большем отрезке» или «прямоугольнике – на малом». Так уж принципиально нужны слова "большое – малое" в контексте начального условия? Конечно, нет.

Да и откуда можно заблаговременно знать, что они неравные?

В этом то и великий смысл, что нельзя этого заранее предугадать, а значит, и не следует "тянуть за уши" в исходную формулировку. Конечно, как только начинаешь анализировать, сразу ж становится понятным, что отрезки действительно неравные.

Квадрат и вправду располагается именно на большем отрезке.

Но это уже приходит потом (!), когда начинаешь решать и осмысливать задачу.

---

[5] Например, в метеорологии это означает: если на Земле дует хоть какой-то ветер, то где-то обязательно должен быть циклон.

А так мы часть решения уже втискиваем (суем) в условие (?).

Но в исходной формулировке этого принципиально не должно быть!

Если трудно без этого, можно держать перед глазами рабочий черновик, но не "навязывать" его в целом стройную геометрию Евклида. Конечно, в ней не все безупречно, но по рассматриваемому вопросу как раз все обстоит четко и корректно.

Снова возникли "площади", хотя «равенство Евклид всегда понимает в смысле *равновеликости*» [2, с. 250]. И здесь не нужно апеллировать ни к чьему мнению. Как только начинаешь читать Евклида, сразу становится ясным, что речь идет о равновеликости геометрических фигур или сравнении их площадей. – Тут Ёж-Фомка, соглашаясь, так энергично закивал головой, что она у него едва не опрокинулась.

Из всего контекста предложения 2.11, Петр Сергиенко "докопался" до математической некорректности в виде различия между отрезком и прямой. Можно было и не предавать значения этому очевидному факту, поскольку никакой ошибки перевода с греческого нет, а прямая у Евклида, как и других древнегреческих математиков, – это ограниченная прямая фиксированной, но произвольной длины, или прямолинейный отрезок.

Но что нас буквально "сразило наповал", так это начало странной многозначительной фразы: «логично признать (?), что данная задача – это задача из серии классических геометрических построений пространственных мер, с помощью циркуля и линейки» [14].

Что значит логично признать? Да у Евклида вся геометрия на этом построена!

Здесь совершенно не требуется признание, и тем более логическое (будто открытие какое). У древнегреческих геометров, это как $2 \text{ x } 2 = 4$.

Из этого следует исходить (!), а не признавать, если мы беремся о них говорить.

У них и линейка – односторонняя, без делений. А в своих построениях они даже не допускают такую операцию как перенос длины раствором циркуля!

Немного грустно становится от прочтения подобных статей, тем более написанных ученым, за плечами которого не одна монография по геометрическим образам гармонии и золотого сечения.

Но не будем слишком придирчивы, считая это первой пробой, за которой последует расширенное толкование авторских идей. Тем более уже и сам Петр Сергиенко утверждает, что его «алгоритм раскрывает внутреннюю самоорганизацию гармоничных мер и отношений пространственной субстанции и позволяет понять принцип наименьшего действия в гармоничной самоорганизации»[6]. – Очень емкое и обстоятельное утверждение, которое требует более подробных и не менее обстоятельных пояснений в перекличке с Евклидом".

Остается набраться терпения и чуть подождать.

В любом случае, коль речь идет о построении нового алгоритма, он должен по идее сравниваться с уже существующим аналогом.

И уже отходя от конкретных персоналий, да простят меня все, но Евклид – действительно великий и в наше время, если своей философией и геометрическим мировосприятием превзошел многих современных геометров, и не только.

Вперед к Евклиду. Фомка надолго включил свою "соображалку", пытаясь осмыслить: в какую сторону предполагается движение.

Стоило большого труда ему объяснить, что это аллегория. Евклид нас впереди не ждет.

И речь идет о его багаже знаний, переосмысленных на современный лад, с которыми мы и пойдем дальше в будущее.

Итак, рассмотрим ключевое положение Евклида, имеющее непосредственное отношение к теме ЗС. Оно изложено в предложении 2.11 [2].

---

[6] П.Я. Сергиенко // Лаборатория "золотого сечения". Диспут. 08.11.2009. – http://www.a3d.ru/disput/61.

Наша локальная задача – проанализировать его в первозданном виде, который согласуется с остальной геометрией Евклида, и представить по возможности наиболее наглядным геометрическим способом, оставляя максимально историчными дух и подход древних греков (рис. 1)

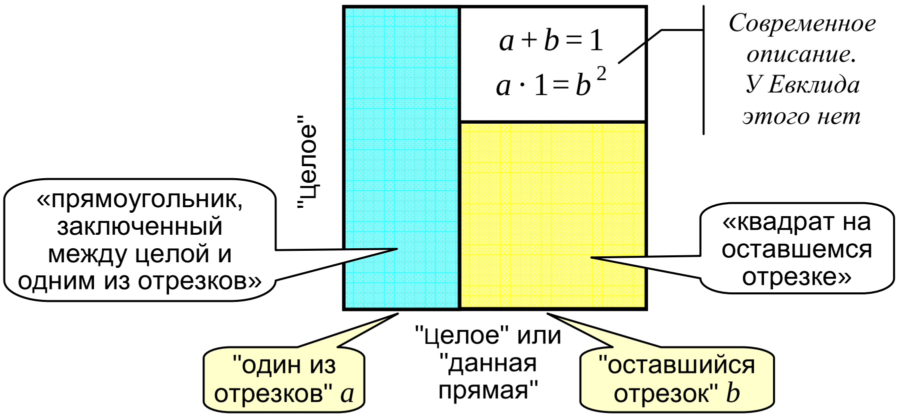


Рис. 1. Геометрическая интерпретация предложения 2.11 Евклида:
«данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке»

Обратим внимание, что речь идет не о подмене смыслов или фантазировании за самого Евклида. Его слова, геометрические построения и физическая интерпретация облекаются в совершенно адекватную описательную форму.

Единственное зримое различие: построение прямоугольника и квадрата осуществляется "на территории" (в пределах) исходного целого образования 1x1.

Что мы видим? "Целая", которая делится, – это прямолинейный отрезок. Мы его восстанавливаем до квадрата, когда появляется как бы вторая, но уже вертикальная интерпретация "целого".

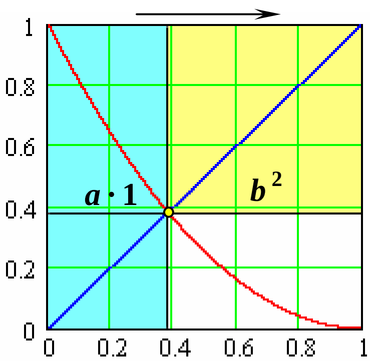


Рис. 2. Графическое решение: прямоугольник растет линейно, квадрат b^2 уменьшается "квадратично", по параболе

«Площадь квадрата, построенного на большем отрезке» – это уже «современное» адекватное описание. Евклид писал так, как думали греческие математики того времени. И если мы хотим действительно понять ход их мысли, нам не нужно за них домысливать современными мерками.

Двигая точку соприкосновения отрезков влево (вправо), мы уменьшаем (увеличиваем) прямоугольник и увеличиваем (уменьшаем) квадрат. В самом крайнем положении этой точки справа «квадрат на оставшемся отрезке» превращается в точку, а в крайнем положении слева – прямоугольник превращается в линию (рис. 2).

Зависимости (функции) непрерывные монотонные

Таким образом, можно считать, что решение существует и оно единственно.

То есть древние хорошо видели, что должна быть такая точка, относительно которой площади равны. И предложение 2.11 решает эту задачу: оно фактически доказывает геометрически само существование такой точки и показывает способ ее нахождения буквально: через построение квадрата, нахождение середины его стороны и проведения двух полуокружностей (рис. 3).

Подобные построения, близкие к оригиналу Евклида, мы находим в разных книгах по геометрии, в частности в работе [15, с. 20]. Собственно из хода и характера этих построений легко видны все основные числовых параметры-характеристики золотого сечения (рис. 4).

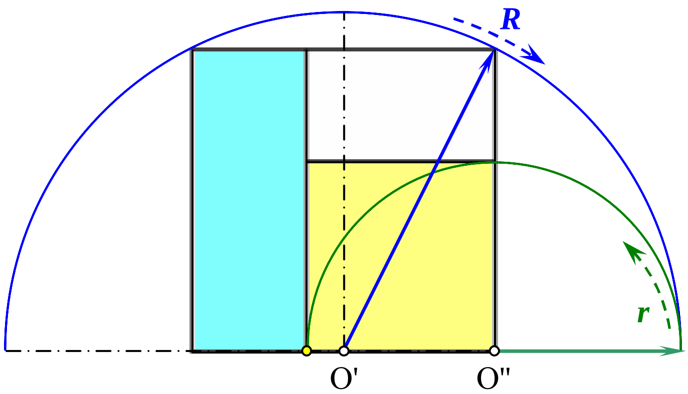
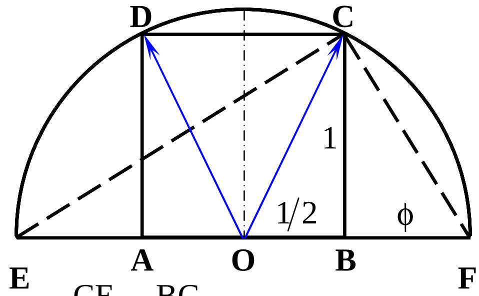


Рис. 3. Геометрическое построение-решение предложения 2.11 Евклида (циркулем и линейкой)



$$\frac{CE}{CF}=\frac{BC}{BF}=EB=AF=\Phi$$

$$EF=\sqrt{5}=\Phi+\phi=\Phi+\Phi^{-1}$$

Рис. 4. Числовые параметры ЗС согласно алгоритму Евклида

Алгоритм геометрического построения (рис. 3).

1. Строится квадрат со сторонами "целого" и мерой единичной длины.
2. Из центра O' нижней стороны квадрата описывается полуокружность (синяя).
3. Из правой нижней вершины квадрата O" проводится полуокружность (зеленая) радиусом r от конечной точки на большом диаметре.
4. Из точек пересечения малой окружности со сторонами исходного единичного квадрата восстанавливаются искомые фигуры: прямоугольник и квадрат (желтый).

Эти фигуры равны между собой, что следует из следующего доказательства.

Предварительно заметим, что «у Евклида совсем нет формул не только символической, но и риторической (словесной) алгебры» [2, с. 283]. Его "Начала" «занимаются свойствами геометрических объектов, их сравнением, но совершенно не занимаются измерением; число для них только предмет изучения, но не средство измерения».

Но для удобства и упрощения описания нам все-таки лучше представить в символьном числовом виде, хотя сами числа мы определять не будем.

Доказательство:

Радиусописанной полуокружности находим по теореме Пифагора $R=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Второй (меньший) радиус определяется как разность $r=R-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Площадь прямоугольника (зеленого) равна $S_1=1\cdot(1-r)=1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Площадь квадрата (желтого) равна $S_2=r^2=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Таким образом, "*прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков*" S_a, "*равен квадрату на оставшемся отрезке*" S_b, то есть исходная задача решена.

– С максимальным приближением к предложению 2.11 Евклида и его интерпретации на уровне понятийной основы того времени.

Примечание.

1) Построение исходного квадрата требует восстановления из заданной точки перпендикуляров, которое решается в Предложении 1.11. На точке, расположенной на прямой линии, в обе стороны откладываются одинаковые отрезки произвольной длины, а затем на полученном двойном отрезке восстанавливается равносторонний треугольник, вершина которого соединяется с исходной точкой. Евклид дает и отдельное Предложение 1.46: «Как на данной прямой надстроить квадрат» [2, с. 57].

2) Прямолинейный отрезок (у Евклида "ограниченная прямая") рассекается пополам согласно Предложению 1.10 [2, с. 24]. Сначала на нем, как на основании, циркулем строится равносторонний треугольник (Предложение 1.1), а затем угол при вершине сечется пополам прямой линией вниз до пересечения с основанием треугольника (Предложение 1.9) в искомой точке О'. Хотя можно было, конечно, построить с другой стороны отрезка еще один равносторонний треугольник, а их вершины соединить (по сути, дела построить на исходном отрезке как на диагонали квадрат и провести еще одну диагональ).

Что хочется сказать или особо отметить:

– элегантный алгоритм;
– красивая симметрия (рис. 5);
– решение задачи через квадрат и три окружности;
– расположение всех числовых объектов[7] 1, 1/2, $\sqrt{5}$, $(\phi, \Phi) = (\sqrt{5} \mp 1)/2$ в виде соизмеримых отрезков на одной прямой линии;
– незримое присутствие другого важного числа $\sqrt{2}$;
– видны геометрические фигуры прямоугольника и квадрата как у Евклида;
– большой отрезок, по сути, является средним геометрическим целого (исходного) и меньшего отрезка.

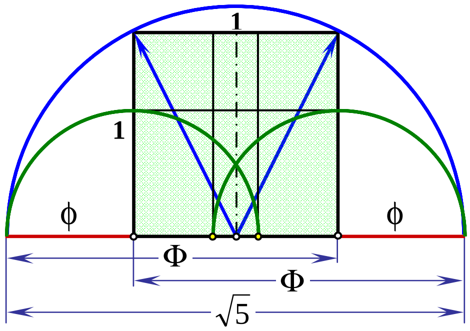


Рис. 5. Абсолютная симметрия построений-решений ЗС, вытекающих из "Начал" Евклида

В определенной мере, подобное геометрическое построение можно отнести к такой категории как «не улучшаемый алгоритм достижения поставленной цели»[8].

Знал ли Евклид о ЗС? Услышав вопрос, Ёжик-Фома засопел. Это означало, что он пытается как-то понять и осмыслить услышанное, но у него явно что-то не складывается.

А потом он и вовсе отвернулся, всем видом указывая нам на потерю всякой заинтересованности к сообразности ситуации.

Подумав, мы тоже не смогли хотя бы на йоту приблизиться к однозначному ответу.

Сказать, что Евклид, а заодно и древние геометры, не знали о специфичном делении прямолинейного отрезка на две неравные части, язык не поворачивается. Поскольку есть положения (предложения), которые, так или иначе, решают данную проблему.

Но и сказать, что Евклид знал о ЗС, значит сильно слукавить и ввести в заблуждение читателя. – Тут Фома поднял ушки, что явно свидетельствовало о проявлении интереса.

Скорее всего, наш начальный вопрос нельзя назвать корректным.

Да, Евклид ходил вокруг этой проблемы. Касался ее. Порой перешагивал. Решал. Тут же перескакивал на другие задачи. Потом возвращался, но уже в ином качестве и даже с другими буквенными обозначениями, наиболее вероятно, пересказывая других авторов без увязки в общей структуре или контексте повествования. А это верный признак отсутствия особых предпочтений. На фоне остальных, – так просто рядовая задача.

---

[7] Некоторые числа имеют разную природу. Например, отношение Ф – безразмерное число, отрезок ф подразумевает размерность м, км и т.п.

[8] С.А. Ясинский // Лаборатория "золотого сечения". Диспут. 07.11.2009. – http://www.a3d.ru/disput/61.

Да, он формировал геометрические построения. Но совершенно никак не выделял эту задачу среди остальных и не придавал ей какого-либо отличительного значения.

А в пропорциях-отношениях она вообще отсутствует, как таковая.

Более того, у Евклида нет понятия отношения чисел, хотя присутствует «отношение... однородных *величин* по количеству» (определение 5.3 [2, с. 142]).

А вот понятие пропорциональности есть уже как для величин, так и для чисел, но они проводятся независимо (раздельно), поскольку он еще не «в силах охватить эти два понятия ... в одном общем их объемлющем понятии *пропорциональности вообще*, ... так что общим у них остается только *название*» [2, с. 372].

То есть эффект "ползунка" (рис. 2), дающий ответ на вопрос о равенстве прямоугольника и квадрата, Евклиду был абсолютно понятен. И чисто геометрически (строго математически) он не только доказал существование самого ответа, но и продемонстрировал механизм построения. Собственно и все.

Может быть, он и выстраивал какую-либо концепцию, похожую на ЗС в его современном представлении, но в материалы она не вошла.

Это, примерно, все равно, что спрашивать, знали ли древние числа.

Безусловно, знали. Но разве в том объеме и с теми многочисленными новыми свойствами как сегодня? Конечно же, и близко нет.

Например, «Евклид нигде не оперирует отношениями как с числами» [2, с. 408].

«Для Евклида число – это собрание единиц (определение 7.2), так что дробь для него еще не является числом. Между геометрическими величинами и числами еще нет *взаимно однозначного соответствия*» [2, с. 371].

«У Евклида нет дробей... Абстрактная дробь заменяется отношением целых чисел, применение которого основывается на высокоразвитой теории пропорций» [3, с. 265].

Что подумалось еще. Допустим, что древние ученые знали о ЗС, скажем, почти в современном представлении. Спрашивается, а что же тогда человечество приобрело в этой части со времен того Пифагора, Евклида или Платона. Получается так ничего. Ну, разве что осовременили алгебраической геометрией в виде решения квадратного уравнения. И все!?

Даже числа Фибоначчи здесь ни при делах, поскольку согласно теореме Бернулли они выражают общие свойства всех последовательностей стремиться к максимальному корню алгебраического уравнения, которое их порождает. Кроме того, у них совершенна иная онтология, нежели у золотого сечения, хотя они и связаны где-то далеко в бесконечности.

Что-то здесь (в такой постановке вопроса) явно не сходится.

Ёжик-Фома беспомощно моргал своими глазенками. Он явно не понимал, что от него хотят, но и не желал никого огорчать.

Посмотрим на вопрос ЗС с другой стороны.

А что вообще меняет усиление или ослабление позиции о степени знаний ЗС древними? Допустим, мы скажем, что знали, но не очень. Или скажем, да знали и очень хорошо.

С позиции нынешних представлений в этом вопросе ничего не меняется. Это уже в прошлом. Хотя нет, – скорее всего, «история золотого сечения лишится ореола древности, что приведет к существенному изменению» [10] навязываемой идеологии либо смене акцентов в чьих-то личных амбициях.

На наш взгляд, важнее не то в каком объеме знали это древние (что подобные знания были, сомнений нет), а что мы знаем сегодня и какие у нас есть перспективы на завтра.

И есть ли они вообще? Ведь может так статься, что все это утопия или красивая сказка для убеленных сединой ученых.

А теперь еще раз вернемся к крайней точке зрения: древние знали ЗС очень хорошо и в полном объеме. Спрашивается в задаче, тогда почему же до сих пор за столько времени эти знания практически ничем не усилились ни в физике, ни в математике, разве что числами Фибоначчи. Но это уже "из другой оперы", у которой совершенно иная систематика, причем верная практически для любого алгебраического уравнения и соответствующих числовых последовательностей.

Тогда получается, что ЗС – метафизическая фантазия, которая закончилась в прошлые века вместе с алхимией. – Неутешительный вывод, но он логически и почти автоматически следует из концепции основательного знания теории ЗС в античные времена.

Вот и Ёж–Фома кивает.

Достаточно точно и понятно по данному вопросу высказался Сергей Алферов [16]:

> «Евклид не знал Золотую Пропорцию, как самостоятельное направление. Древние греки не выделяли понятия ЗП, не осознавали его ... Хотя и использовали. Целостность их мировоззрения формировалась без рационального оформления феномена ЗП. Если бы было иначе, они прямо бы указали на него. Но этого нет. Говорить об обратном – значит додумывать за них... И такое додумывание есть искажение в угоду каким-то своим желаниям. Это не умаляет ЗП, но бросает тень от таких исследований и исследователей. О чем говорят эти исследователи, как не о чем-то своем. Возвышая себя продлением родовитости своих занятий до Пифагора и Эвклида, но окутывая ЗП тенетами… Не надо ничего додумывать за предшественников. Такое корректирование прошлого есть свидетельство бессилия в созидании будущего».

Наверно, корректнее можно сказать, что математики античной Греции стали первыми учеными, *начавшими разбирать феномен*, известный сегодня как золотое сечение. Но знания их были тогда еще разрозненными и весьма далекими от нынешних представлений о ЗС.

Ответить на вопрос, кто же является основоположником ЗС, видимо так же трудно, как и на вопрос, а кто есть основатель чисел? Не в смысле 1, 2, 3, ..., – а чисел вообще.

Хотя у нас есть ответ. Может, он и не всех устроит.

Родоначальником чисел и ЗС является ... Человек.

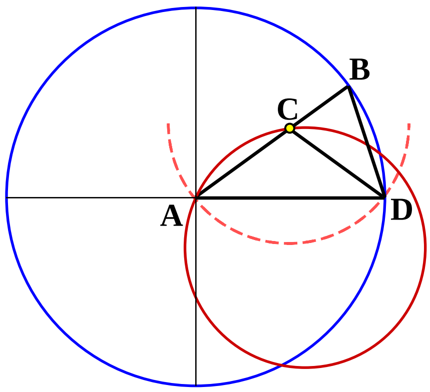


Рис. 6. Геометрические построения к Предложению 4.10 Евклида (о "золотом" треугольнике – в современной интерпретации)

***Зачем Евклиду нужна была задача ЗС*?** Один из возможных ответов достаточно прозаический и простой: для вычерчивания правильного пятиугольника (предложение 4.11) по следующей схеме.

В основу построения берется специальный равнобедренный треугольник.

Предложение 4.10. Построить равнобедренный треугольник, имеющий каждый из углов при основании, вдвое большим остающегося (рис. 6).

1. Проводим прямую AB и отмечаем на ней точку C (золотого сечения в современной терминологии).

2. Описываем окружность AB(A) – радиусом AB вокруг центра A.

3. Описываем окружность CA(C).

4. Проводим CD и BD.

Получаем равнобедренный треугольник ΔABD, у которого углы при основании B и D вдвое больше угла при вершине A.

У самого Евклида алгоритм несколько отличается. Вместо п. 2 он выполняет так называемую операцию по «вставлению в круг прямой BD, равной AC» (то есть проведению хорды заданной длины), чему посвящено отдельное Предложение 1.10 [2, с. 123] со своим доказательством.

Евклид не называет градусной меры, но для нас это углы 72^{o} и 36^{o}.

В принципе понятно, поскольку $180/5=36^{o}$.

То есть древние ученые прекрасно осознавали, чтобы построить правильный пятиугольник, нужно научиться делить полно-оборотный угол (360^{o}) на пять равных частей. Сделать это можно, например, научившись строить соответствующий треугольник. Равносторонний здесь не подходит. Из правильных фигур остается равнобедренный треугольник с соотношением углов $1:2:2$ или $3:1:1$. Первый из них и есть треугольник Евклида в Предложении 4.10, который сегодня часто называют «золотым треугольником».

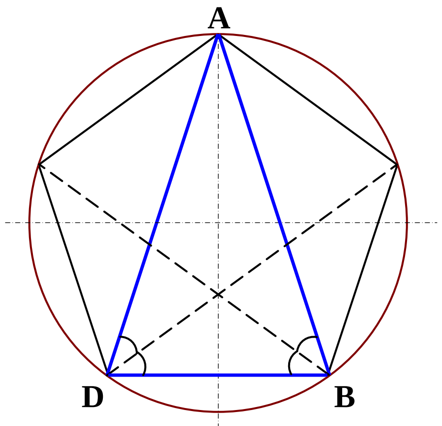


Рис. 7. Построение правильного пятиугольника (предложение 4.11)

<u>Предложение</u> <u>4.11</u>. В данный круг вписать равносторонний и равноугольный пятиугольник [2, с. 133].

1. В круг вписывается равнобедренный треугольник Δ ABD, равноугольный – "золотому" (рис. 7; построение описано в предложении 4.2 [2, с. 123]).

2. Его одинаковые углы при основании рассекаются пополам прямыми (предложение 1.9 [2, с. 23])

Получили пять равных углов, опирающихся на равные обводы (дуги), которые стягиваются одинаковыми отрезками (хордами), образующими равносторонний и равноугольный (правильный) пятиугольник.

Таким образом, можно считать, что задача ЗС нужна была греческим математикам для построения правильного пятиугольника, а на его основе – додекаэдра.

Хотя отдельные манипуляционные задачи, связанные с ЗС и расширяющие его свойства-представления, мы находим и в других местах (табл. 1).

Таблица 1

Некоторые предложения (утверждения) Евклида, связанные с золотым сечением, с их современной формульной интерпретацией (книга 13)

13.1	Если прямая линия разделена в КСО, то больший отрезок с присоединением половины всей <линии>[9] в квадратах <равен> упятеренному квадрату на половине	$\left(\phi+\frac{1}{2}\right)^2=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$
13.2	Если прямая линия в квадратах будет в пять раз больше своего отрезка, и если удвоенный упомянутый отрезок разделить в КСО, то остальная часть первоначальной прямой будет большим отрезком	
13.3	Если прямая линия разделена в КСО, то меньший отрезок с прибавлением половины большего отрезка будет в квадратах в пять раз больше квадрата на половине большего отрезка	$\left(1-\frac{\phi}{2}\right)^2=5\cdot\left(\frac{\phi}{2}\right)^2$
13.4	Если прямая линия разделена в КСО, вместе взятые квадраты на целой и на меньшем отрезке будут в три раза больше квадрата на большем отрезке	$1^2+(1-\phi)^2=3\cdot\phi^2$
13.5	Если прямая разделена в КСО и к ней приставлена <прямая>, равная большему отрезку, то вся прямая уже разделяется в КСО и большим отрезком будет первоначальная прямая	$1+\phi=\frac{1}{\phi}$

Примечание: в КСО – в крайнем и среднем отношении

[9] В угловатых скобках < > помещены добавления переводчика, необходимые для понимания иногда слишком сжатого текста Евклида

Так или иначе, но в целом можно уверенно говорить, что *история золотого сечения восходит к Евклиду, а еще ранее и к пифагорейцам*.

Но утверждать что «ЗС пронизывает все книги Евклида» (А. Стахов), – по меньшей мере, наивно. Тем более, слышать подобное от людей, которые за свою жизнь ни разу самих книг Евклида (пусть даже в переводе) и не открывали.

Как точно подметил Сергей Ясинский [5], казалось бы, в очень близких по духу задачах на ЗС, – у Евклида даже разные буквенные обозначения и чертежи.

В неодинаковых проекциях, под различными углами и с разной подсветкой софитов золотое сечение высвечивается в "Началах" отдельными своими гранями. Но пока и близко нет емкого и целостного представления о ЗС как математическом феномене. Еще слишком далеко до интегрированного и одновременного восприятия таких доколе разношерстных понятий как геометрия, теория чисел и алгебра.

Все это будет позже и делом отдаленного будущего.

И то, что нам сегодня кажется очевидным, в далекие времена достигалось невероятными усилиями и стараниями ума не одного человеческого гения.

Вместо заключения. Тут мы обратили внимание, что наш Ёж-Фомка уже спит, тихо посапывая и чуть мурлыкая во сне. С одной стороны, это служило косвенным признаком, что он удовлетворен нашими последними умозаключениями, и его мозг свободен от раздирающих противоречий, которые были в самом начале.

А с другой стороны, как нам показалось и что вполне возможно, он "переговаривался" ... с самим Евклидом, чему нам естественно, не хотелось мешать.

Мы выключили свет, вышли на балкон, вглядываясь в ночное небо и пытаясь отыскать хоть какие-то проблески золотого сечения казалось бы в единообразном мироздании, но почему-то с такими разными геометриями: Евклида, Лобачевского, Минковского ...

Упал метеорит, – наверно, по Лобачевскому – с чуть искривленной траекторией.

Вдалеке лениво пролетел, мигая, самолет, – тот уж точно – по Евклиду.

Запищал комар, – с явно диссонирующим звуком, далеким от гармонии.

В лоб ударился мотылек, – хорошо, что коровы не летают.

Рядом фантомом промелькнула ночная мышь, – точно "демон Лапласа".

Мир жил своей жизнью. Каждым своим мгновением он уверенно входил в будущее, на глазах творя свою, а заодно и нашу историю ...

А может это оно и есть, золотое сечение? – Как вечно настоящее, уверенно и устойчиво делящее мир на его прошлое и будущее, – в только ему известной пропорции.

Как в задаче Евклида, когда заранее неизвестно где больший, а где меньший отрезок.

Хотя, конечно хотелось бы, чтоб будущего было все-таки больше, чем прошлого.

Только вот в каких категориях их мерить?

«Что я измеряю время, это я знаю, но я не могу измерить *будущего*, ибо его *еще нет*; не могу измерить *настоящего*, потому что *в нем нет длительности*, не могу измерить *прошлого*, потому что его *уже нет*. Что же я измеряю?» – Св. Августин. Исповедь, книга 11.

Да... хотя и не озвучивал Евклид время, нам еще рано окончательно переворачивать те страницы прошлого и ставить на них точку.

Но и кружиться вокруг них не стоит. Нас ждут великие дела!

Только теперь уже – "математические НАЧАЛА ГАРМОНИИ".

Литература.

1. *Манин Ю.И.* Математика как метафора. – М.: МЦНМО, 2008. – 400 с.

2. *Начала Евклида*. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

3. *Начала Евклида*. Книги VII–X: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1949. – 512 с.

4. *Начала Евклида*. Книги XI–XV: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1950. – 332 с.

5. *Ясинский С.А*. "Золотое" сечение в стандартизации и теории измерения. – СПб.: ВАС, 2008. – 160 с.

6. *Белянин В.С*. К вопросу об исторической теме при изучении золотой пропорции. – 2006. – http://www.a3d.ru/architecture/stat/183.

7. *Стахов А.П*. Под знаком "Золотого Сечения": Исповедь сына студбатовца. Глава 3. Что такое "золотое сечение"? 3.2. Геометрическое определение "золотого сечения" // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13134, 24.03.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/100a/02320015.htm.

8. *Стахов А.П., Райлян И.Г*. "Золотая" научная парадигма: этапы большого пути от Пифагора, Платона и Евклида до "Математики Гармонии" // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15615, 26.10.2009. – http://trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321100.htm.

9. *Стахов А.П*. Еще раз о математической истории Золотого Сечения // Академия Тринитаризма. М.: Эл. № 77-6567, публ.13714, 25.08.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321029.htm.

10. *Белянин В.С*. Еще раз к вопросу об исторической теме при изучении золотой пропорции. – 2006. – http://www.a3d.ru/architecture/stat/184.

11. *Стахов А.П*. Есть у меня Белянин на примете... // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13799, 20.09.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321034.htm.

12. *Стахов А.П*. От «Золотого Сечения» к «Металлическим Пропорциям». Генезис великого математического открытия от Евклида к новым математическим константам и новым гиперболическим моделям Природы // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14774, 16.04.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321081.htm.

13. *Стахов А.П*. Реплика к статье П.Я. Сергиенко «Начала математизации гармонии. Задача (предложение II.11) Евклида и алгоритм ее решения» // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15635, 06.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321176.htm.

14. *Сергиенко П.Я*. Начала математизации гармонии. Задача (предложение II.11) Евклида и алгоритм ее решения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл № 77-6567, публ.15631, 04.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161570.htm.

15. *Тимердинг Г.Е*. Золотое сечение: Пер. с нем. Изд.2-е, стереотип. – М.: КомКнига, 2005. – 88 с.

16. *Алферов С.А*. О 4-х структурной формуле и хозяйстве ЗП // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15302, 21.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322070.htm.