

Фрактал – новое название известного свойства?

«Математики – это некоторый род французов: если говоришь им что-нибудь, они переводят это на свой язык, и тогда это становится тотчас же чем-то совсем другим». И.В. ГЁТЕ

Введение

В фундаменте математики есть такие теории, гипотезы, методы, понятия, которые на каждом очередном этапе развития науки получают новую жизнь. Прямо со страниц «Начал» Евклида в современную математику периодически возвращаются классические теоремы, понятия, алгоритмы. Приведем несколько примеров:

- алгоритм деления числа на число дал жизнь математическому объекту под названием «арифметическая цепная дробь» [1];

- обобщение этого результата М.В.Остроградским дало возможность усложнить объект, который был вторично открыт и подробно исследован В.Я.Скоробогатко – «ветвящаяся цепная дробь» [2];

- наконец, теорема о делении отрезка в крайнем и среднем отношении дала начало «математике гармонии» [3].

Метод решения системы алгебраических уравнений, известный в современной математике как метод Гаусса [4], надо думать, принадлежит фундаменту «царицы наук».

Действительно, в китайском научном труде «Математика в девяти книгах» приведено правило определения средней урожайности на множестве небольших полей (фан-чэн), который, по сути, реализовывает алгоритм современного метода Гаусса [5]. Вполне возможно, что он применялся значительно раньше, чем был описан в этой книге, датированной современниками периодом (3 в. до н.э. – 1 в. н.э.). Вероятно, что аналог этого метода существовал в индийской и арабской математике. Вполне возможно, что К.Гаусс вновь открыл этот метод решения, либо придал ему современный вид. Для нас это не является существенным. Важно только то, что метод имеет богатую историю, а значит действительно входит в золотой фонд мировой математики.

Новая трактовка алгоритма метода Гаусса

Начнем с простой системы уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_{23} \end{cases} \quad (1)$$

После цикла Гауссова исключения получаем:

$$a_{22}^{(1)}x_2 = a_{23}^{(1)}, \quad (2)$$

где

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - a_{21}b_{12}; b_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}};$$

$$a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}b_{13}; b_{13} = \frac{a_{13}}{a_{11}}.$$

Поправки (2) используются только для получения численных значений коэффициентов упрощенной системы уравнений. Другими словами, результат в виде числа, маскирует структуру поправок.

Запишем решение системы уравнений (1) в общем виде, сохраняя структуру поправочных коэффициентов:

$$x_2 = \frac{a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13}}{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}}. \quad (3)$$

Преобразуем выражение (3) одним из следующих способов (4), (5):

$$x_2 = \frac{a_{11}(a_{23}a_{11} - a_{21}a_{13})}{a_{11}(a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12})} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad (4)$$

$$x_2 = \frac{a_{23}}{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}} - \frac{a_{13}}{-a_{12} + \frac{a_{22}}{a_{21}} a_{11}}. \quad (5)$$

Очевидно, что запись (4) представляет собой решение системы (1) методом Крамера, а запись (5) является решением той же системы уравнений методом ветвящихся цепных дробей. Таким образом, можем утверждать, что между методом Гаусса, правилом Крамера и методом ветвящихся цепных дробей существует определенная связь.

Рассмотрим пример, размерность которого на единицу больше системы уравнений (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases}. \quad (6)$$

На каждом шаге Гауссова исключения точное решение будет иметь вид:

$$x_3 = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}; \quad (7)$$

$$x_3 = \frac{a_{34}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{24}^{(1)}}{a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} a_{23}^{(1)}}; \quad (8)$$

$$x_3 = \frac{(a_{34} - a_{31}/a_{11}/a_{14}) - \frac{(a_{32} - a_{31}/a_{11}/a_{12})}{(a_{22} - a_{21}/a_{11}/a_{12})} (a_{24} - a_{21}/a_{11}/a_{14})}{(a_{33} - a_{31}/a_{11}/a_{13}) - \frac{(a_{32} - a_{31}/a_{11}/a_{12})}{(a_{22} - a_{21}/a_{11}/a_{12})} (a_{23} - a_{21}/a_{11}/a_{13})}. \quad (9)$$

Анализируя решения (7), (8), (9), отмечаем, что только выражение (9) содержит исходные коэффициенты системы уравнений (6), не подвергнутые пересчету. Если в выражения (7), (8) вернуть соответствующие по индексам исходные коэффициенты системы (6) (раскрыть структуру поправок), то значения переменных перестанут быть точными. Ряд выражений (7), (8), (9) будет представлять разные по точности приближения к решению. Так метод Гаусса становится приближенным [6].

Предложение по модернизации метода Гаусса

Итак, подставим в выражения (7), (8) коэффициенты системы уравнений (6):

$$x_3^{(1)} = \frac{a_{34}}{a_{33}}, \quad (10)$$

$$x_3^{(2)} = \frac{a_{34} - a_{32}/a_{22}/a_{24}}{a_{33} - a_{32}/a_{22}/a_{23}}. \quad (11)$$

Отметим, что приближение (10) может быть получено из системы (6), если ее ограничить до простейшего уравнения:

$$a_{33}x_3 = a_{34}. \quad (12)$$

Решению (11) соответствует система уравнений, в которой появляется вторая переменная x_2 :

$$\begin{cases} a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases}. \quad (13)$$

Точное решение (9) получаем из полной системы уравнений (6). Заметим, что уравнения (13) получаются из (12) добавлением частей второй строки и второго столбца системы (6).

Процесс выделения частей системы уравнений (6) представлен наглядно в (14):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases} \quad (14)$$

Обратим внимание на то, что корректирующее слагаемое в решении (11) составлено только из коэффициентов добавленных столбца и строки системы (13). Коэффициенты системы уравнений (6), которые входят в структуру поправки, «сцеплены» между собой одинаковыми номерами столбцов и строк матрицы. Этот факт позволяет формализовать процесс получения поправочного коэффициента при переходе от решения (10) к решению (11).

Рассмотрим подробно переход от решения (10) к выражению (11). Начнем с числителя (10), где находится коэффициент с индексом 34. Последовательность преобразований (15) наглядно представляет процесс нахождения индексов коэффициентов корректирующего слагаемого.

$$\begin{array}{cccc} & 3 & y & 3 & 2 \\ 34 \Rightarrow & y & & y & \Rightarrow 2 & 2. \\ & y & 4 & 2 & 4 \end{array} \quad (15)$$

Напомним, что к уравнению (12) добавлено x_2 , следовательно, $y = 2$. После подстановки этого индекса в выражение (15) получим в правом столбце индексы коэффициентов корректирующего слагаемого из (11).

Формальное правило можно проверить на выражении (9), где добавлена переменная x_1 , а, следовательно, $y = 1$. Если систему уравнений (6) расширить введением x_0 , то каждый коэффициент выражения (9) необходимо будет скорректировать в соответствии с приведенным правилом (15), где $y = 0$.

Таким образом, модернизированный метод Гаусса содержит только обратный ход алгоритма и образует ряд приближающих значений. Каждое решение может быть представлено определенной цепной дробью с возрастающим числом этажей. Последовательность приближающих решений соответствует ряду приближающих дробей, значения которых сходятся к точному результату [2].

Обсуждение возможной модернизации метода

Модernизированный метод не имеет ограничений на число переменных (уравнений), поэтому его можно применить к бесконечной системе уравнений [7]. Перечислим некоторые свойства решения предложенного метода:

1. Увеличивая число переменных, а, следовательно, коррекций, мы получаем все более точное решение.
 2. Решение имеет сложное строение, которое обладает определенной симметрией. Она будет очевидной, если в системе уравнений не будет нулевых коэффициентов.
 3. Обнаруживает самоподобие (повторение структур), так как корректирующие слагаемые на любом этапе образуются по одному и тому же правилу. Процесс вложения кластеров поправок наглядно представляется разрастающимся графом.
 4. Происходит из метода Гаусса, из системы уравнений, которая может описываться как косный, так и живой объект.
 5. Размерность этого математического объекта равна числу циклов коррекции.
- Подобные свойства в работе [8] предлагаются для характеристики фрактала.

Геометрический аспект нового математического объекта

В работе [8] без ссылки на литературу приводится название графа древовидной формы, которое составлено из двух фамилий. Смысл графа понятен, а фамилии остаются для многих исследователей неизвестными, т.к. не входят в список общепризнанных научных авторитетов. Рискну высказать предположение, что подобные графы взаимосвязанных путей впервые предложил Г. Кирхгоф в работе 1847 года [9], рис.1. Вероятно, что отсутствие броской подписи под фиг.4 привело к тому, что переводчик посчитал этот граф лишним и не перенес его в книгу избранных трудов

Кирхгофа на русском языке [10].

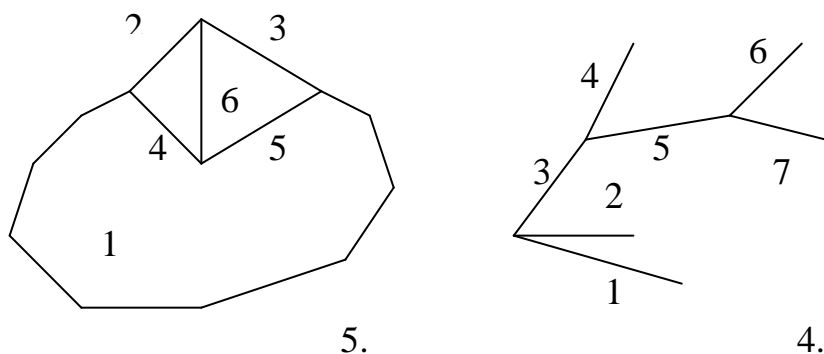


Рис. 1. Иллюстрации из оригинальной статьи Кирхгофа.

Как видно из рис.1, рисунки фиг.4 и фиг.5 не связаны между собой и используются в статье для иллюстрации разных частей текста. Рисунок фиг.4 относится к приложению.

Проведем работу по реконструкции построения, предложенного в статье [9], на примере электрической цепи, рис.2, граф которой записан с помощью множеств ветвей узлов [11]:

$$T_1 = \{1, 2, 6\}; \quad T_2 = \{1, 3, 5\}; \quad T_3 = \{3, 4, 6\}; \quad T_4 = \{2, 4, 5\},$$

где 1, 2, ... - номера ветвей графа рис. 2.

Узловые множества позволяют записать граф, представленный на рис.2, очень компактно и удобно для ввода в компьютер. Такая запись геометрического образа требует очень небольшого объема памяти по сравнению с рисунком.

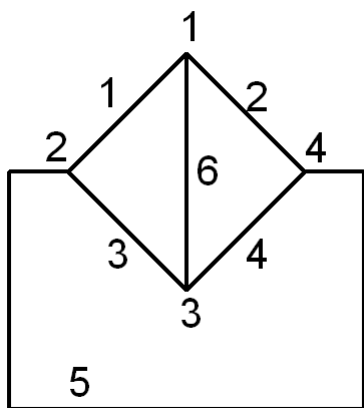


Рис.2. Граф мостовой схемы.

Начнем построение путей в графе рис.2 с узлового множества T_1 , расположив его ветви исходящими из узла 1. К узлам ветвей множества 1 пристраиваем другие узловые множества, имеющие общую ветвь с множеством T_1 . Продолжаем построение (повторяя описанный прием)

до получения структуры, внешне похожей на дерево графа, в котором прослеживаются пути от узла 1.

При построении «дерева» следим за тем, чтобы любой путь включал ветви графа электрической цепи только один раз. Очевидно, что подобному требованию соответствуют известные топологические образования – электрические контура (замкнутые пути). Итак, результат построения представлен на рис. 3 [12]. По «дереву» можно легко записать, например, множества ветвей контуров графа рис.2:

$$\{1,3,4,2\}; \{1,3,6\}; \{1,5,2\}; \{1,5,4,6\}; \{2,4,6\}; \{2,5,3,6\}.$$

В правильности результата легко убедиться на графе, рис. 2.

Реконструированный на примере рис.2 графический объект, рис. 3, только напоминает дерево. Как и задумал Г.Кирхгоф, рис.3 отображает графический алгоритм поиска системы контуров в графе, рис.2. Сам он считал результат очевидным, поэтому не описал алгоритм подробно, ограничился только изложением общей идеи. Это было очень характерно для ученого, так, например, свои законы электрических цепей он привел в приложении к своей первой статье 1845 года.

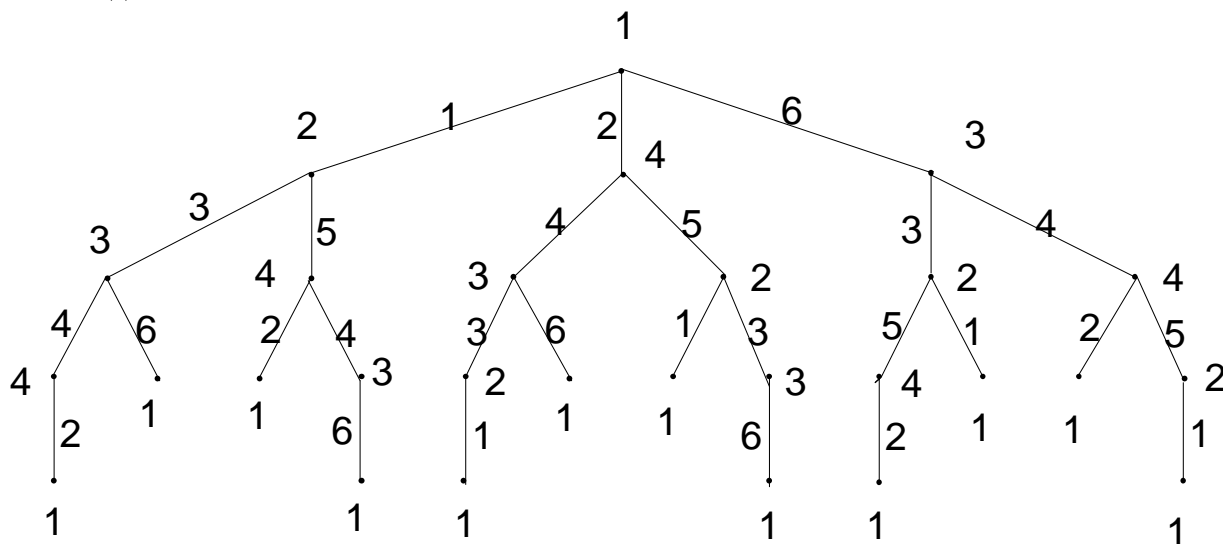


Рис. 3. «Дерево» поиска контуров в графе рис.2.

Отметим, что ничто не запрещает нам продолжить построение графа рис.3 из каждого узла, который на «дереве» выглядит конечным. Естественно, что граф усложнится, но приобретет свойство самоподобия. Точнее это свойство надо было бы назвать многократным повторением исходной структуры, так как очевидно, что граф рис.3 будет повторяться 12 раз, примыкая к каждому узлу с номером 1. Получается геометрический объект, который принято называть фракталом.

Этот алгоритм можно применить для построения системы любых путей в графе (замкнутых, разомкнутых), которые имеют определенные общие участки, т.е. являются взаимно связанными. Кроме того, рис.3 можно трактовать и как «дерево» p -адических чисел, где модуль каждого числа является передачей некоторого пути графа рис.3. Заметим, что одним из учителей Курта Гензеля (автора этих чисел) был все тот же Г.Кирхгоф.

Вернемся к нашему примеру, рис.2. Напряжение и ток являются направленными величинами, поэтому передачу сигнала по электрической цепи разумно представлять направленным графом. Отдельная направленная ветвь от узла i к узлу j с весовым коэффициентом g , обладающим физической размерностью, описывается уравнением:

$$\varphi_i \cdot g = I_j.$$

Как видим, разные узлы направленной ветви характеризуются разными переменными. Другими словами, любой узел электрической цепи рис.2 может выступать в одном из двух образов: узла-истока или узла-стока (узел 4 назначен общим). Учитывая этот факт, разделим узловые множества тем же образом: узлы-истоки узлы-стоки

$$T'_1 = \{1.1, 1.2, 1.3\}; \quad T''_1 = \{1.1, 2.1, 3.1\};$$

$$T'_2 = \{2.1, 2.2, 2.3\}; \quad T''_2 = \{1.2, 2.2, 3.2\};$$

$$T'_3 = \{3.1, 3.2, 3.3\}; \quad T''_3 = \{1.3, 2.3, 3.3\}.$$

Здесь ветви, принадлежащие узлу, представлены кортежами номеров узла-истока и узла-стока, таким образом (в данном примере) описаны направленные ветви двудольного графа.

Алгоритм, реализованный на рис.3, но примененный к двудольному графу дает следующий результат (узел-исток обозначен кругом, а узел-сток – квадратом), рис.4.

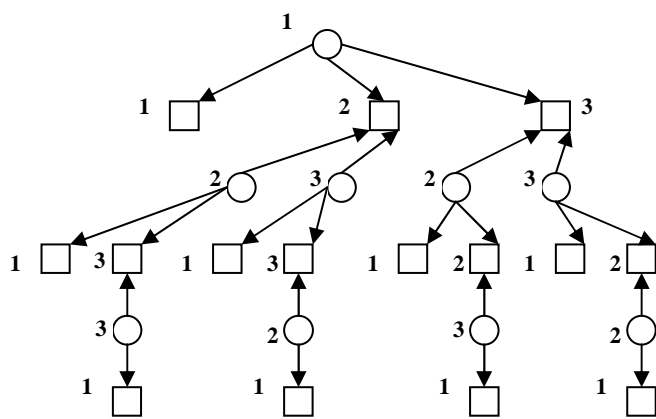


Рис. 4. «Дерево» замкнутых путей в двудольном графе цепи, рис.2.

Графическому объекту рис.4 соответствует ветвящаяся цепная дробь, структура которой приводится ниже:

$$11 - \frac{12}{22} - \frac{13}{23} \cdot \quad (16)$$

$$\frac{32}{31 - \frac{33}{23}} + \frac{23}{21 - \frac{22}{32}} + \frac{33}{31 - \frac{32}{22}}$$

$$\frac{21}{31} \quad \frac{23}{21} \quad \frac{32}{31} \quad \frac{33}{21}$$

Канонический вид дроби (16) будет иметь вид:

$$1.1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{(1.2 \frac{1}{2.2} 2.1) - \frac{1}{(1.2 \frac{1}{2.2} 2.3 \frac{1}{3.3} 3.1)^{-1}}} + \frac{1}{(1.2 \frac{1}{3.2} 3.1) - \frac{1}{(1.2 \frac{1}{3.2} 3.3 \frac{1}{2.3} 2.1)^{-1}}}$$

$$- \frac{1}{(1.3 \frac{1}{2.3} 2.1) - \frac{1}{(1.3 \frac{1}{2.3} 2.2 \frac{1}{3.2} 3.1)^{-1}}} + \frac{1}{(1.3 \frac{1}{3.3} 3.1) - \frac{1}{(1.3 \frac{1}{3.3} 3.2 \frac{1}{2.2} 2.1)^{-1}}}$$

(17)

С точки зрения теории электрических цепей выражения (16), (17) представляют структуру некоторой функции схемы, граф которой представлен на рис.2. Элементы дроби канонического вида (17) напоминают по структуре поправочные коэффициенты (2), так как обозначения ветвей «сцеплены» одинаковыми номерами столбцов и строк матрицы системы уравнений (6). Каждый из них (цепной путь [6]) представляет собой замкнутый путь в двудольном графе, который трудно представить наглядно, так как двудольное графическое представление используется редко.

В работе [13] введено аналогичное понятие, названное матричным циклом. Определен коэффициент передачи отрезков нового топологического образования. Правило передачи воздействия из правой части на соответствующую переменную системы уравнений наглядно представлено на рис.5.

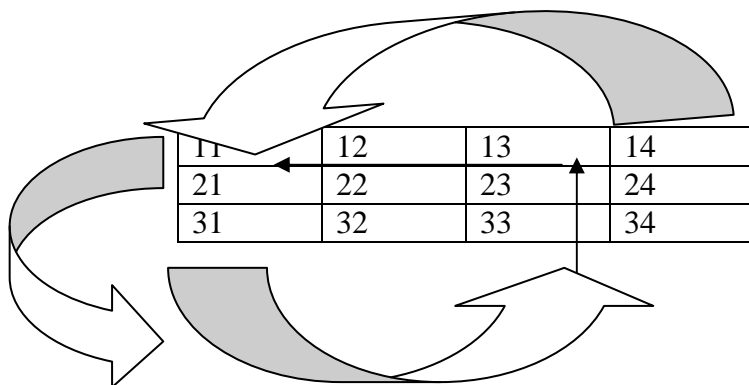


Рис. 5. Продвижение сигнала вдоль матричного цикла.

Возмущение правой части передается по строке на диагональный элемент матрицы, далее вниз по столбцу до строки переменной, воздействие на которую нас интересует. На рис.5 показан прямой путь воздействия 14 на переменную 3. Путь сигнала обратной связи (от переменной 3) указан на рис.5 тонкими стрелками: от диагонального элемента вверх по столбцу до строки действующего возмущения, а далее по строке до диагонального элемента матрицы.

Коэффициент передачи возмущения a_{14} на переменную x_3 вычисляется согласно [13] по следующей формуле:

$$a_{14} \frac{1}{a_{11}} a_{31} \cdot \quad (18)$$

Приводим выражение (18) к виду (15)

$$\frac{a_{31}}{a_{11}} \Rightarrow \frac{31}{11} \Rightarrow 34. \quad (19)$$

Отметим, что на переменную x_3 возмущение a_{14} поступает под видом собственного a_{34} . По пути обратной связи возмущение (от x_3 к x_1) приходит на x_1 тоже как собственное

$$a_{14} \frac{1}{a_{11}} a_{31} \frac{1}{a_{33}} a_{13} \Rightarrow 34 \frac{1}{33} 13 \Rightarrow \frac{13}{33} \Rightarrow 14. \quad (20)$$

Как видим, корректирующее слагаемое метода Гаусса есть ничто другое как коэффициент связи между переменными системы уравнений (6).

Заключение

В настоящей статье предложен метод решения с пошаговым увеличением числа переменных, который следует из метода Гаусса при условии сохранения структуры вычислений поправочных коэффициентов. Решение для любой переменной представляется ветвящейся цепной дробью с возрастающим числом этажей. Известно, что любую цепную дробь можно представить множеством подходящих дробей с возрастающим числом этажей. Усложнение структуры цепной дроби приводит к возрастанию точности искомой переменной [2].

Ветвящейся цепной дроби соответствует графический образ в виде обычного, либо двудольного графа [12]. Полученное решение обладает свойствами, которые приведены в работе [8], т.е. соответствует фракталу. Этот термин в настоящей статье не используется, т.к. автор разделяет мнение Черепанова О.А., который в работе [14] высказал мысль о необходимости привести в порядок новую терминологию.

Новая терминология только устанавливается, а поэтому нет точных определений. Каждый термин может быть наделен любым смыслом. Что, собственно, исследователи назвали фракталом? Объект, свойство или метод? Почему фрактал не может быть описан, если имеется его граф? Вопросов можно задать много. Но, новый термин звучит красиво...однако и числовые ряды, и цепные дроби, и итерационные методы вычислений способны проявлять свойства, признаваемые сегодня за фракталом – возможность постоянного уточнения результата.

Испытываешь некоторую неполноценность в канонаде новых, модных терминов. Корни этих слов, как правило, не связаны с парадигмой смыслов русского языка. Просто назначается имя, которое может быть любым. Так, например, создавали свой тайный язык герои одного из советских мультипликационных фильмов... Конечно, такой способ выбора термина имеет право на существование, но он не помогает развитию самого понятия, обозначенного этим словом.

Очевидно, что термин «фрактал» требует точного определения, если его нельзя заменить другим, более понятным. Остается предположить, что любой метод решения, в алгоритме которого проявляется повторение процедур, дает фрактал при условии сохранения структуры вычислений. Повторение коррекции в модифицированном методе Гаусса, которая формируется по одному и тому же алгоритму, приводит к фракталу, естественным математическим аппаратом которого является ветвящаяся цепная дробь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинчин А.Я. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978.- 112с.
2. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной технике.- М.: Наука, 1983.-312с.
3. Стахов А.П. «Математика Гармонии», основания математики и преодоление кризиса в современной математике// «Академия Тринитаризма», М., Эл №77-6567, публ.15364, 25.06.2009
4. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 248с.
5. Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия: Пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов/Под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976. – 319с.
6. Ерохов И.В. Алгоритм решения линейной системы уравнений, размерность которой последовательно увеличивается.// Автоматизация проектирования в электронике. – Киев: Техника, 1981. – вып.24. – с.23-30.
7. Ерохов И.В. Решение бесконечной системы уравнений с помощью ветвящихся цепных дробей: Отчет по НИР «Развитие импульсного метода исследования нелинейных и параметрических цепей»//приложение 1, Б-715047. – Одесса: ОЭИС, 1979.-152с.
8. Маврикиди Ф.И. Неархимедово пространство-время естественных систем // «Академия Тринитаризма», М., Эл №77-6567, публ.15367, 26.06.2009

9. Kirchhoff G. Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird//Annalen der physik und chemie. – 1847. – Band 72, № 12. – s.497-508.
10. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов // Избранные труды Г.Кирхгоф. – М.: Наука, 1988. – с. 170 – 178.
11. Максимович Н.Г. Методы топологического анализа электрических цепей. – Львов: Изд. ЛвГУ, 1970. – 258с.
12. Ерохов И.В. Исследования начал теории электрических цепей: монография. – Запорожье: КПУ, 2009. -100с.
13. Шатихин Л.Г. Структурные матрицы и их применение для исследования систем. – М.: Машиностроение, 1974. – 248с.
14. Черепанов О.А. Обоснование «золотой» арифметики: главная проблема Гильберта и парадокс Пифагора//»Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.15363, 24.06.2009