С.Л. Василенко

Геноматрица квадратичных рядов Фибоначчи

Несмотря на свою уникальность и широкую распространенность, золотое сечение (ЗС) не является единственной пропорцией, имеющей прямое или косвенное отношение к математическим основам (началам) гармонии мироздания и в целом к процессу ее математизации.

Не менее интересным и полезным в этом плане является также квадратное уравнение общего вида, известное нам еще со школьной скамьи.

Оно порождает счетное множество возвратных числовых рядов с интересными рекуррентными закономерностями и геометрическими соотношениями целого и его частей.

Для лучшего и адекватного отражения сути излагаемого материала, сделаем сразу небольшое, но очень важное уточнение терминологического характера.

Терминология. Использование для квадратных уравнений противоестественной для них терминологии в виде «металлических пропорций» с разными интерпретациями (бронзовой, никелевой, медной и т.п.), на наш взгляд, является неудачной попыткой внедрения в один синонимический ряд с золотой пропорцией, и ничего кроме путаницы с собой не несет.

Достаточно сказать, что в зависимости от коэффициентов, конкретные алгебраические уравнения, а значит, их корни и возвратные последовательности исчисляются миллиардами, и поэтому воочию выплывает вся нелепость в названиях типа "никелево-хромовых–ванадиево-медных" или "алюминиево-кастрюльных" пропорций.

Ничего кроме удивления не вызывает и тот факт, что находятся умудренные опытом ученые, которые всерьез обсуждают и даже с энтузиазмом поддерживают подобные "сталелитейные" фантазии.

Хотя невооруженным глазом видно, что это скрытая или ненавязчиво-завуалированная форма внедрения в один синонимический ряд с золотой пропорцией, и больше ничего.

Золотое сечение уникально, неповторимо, в принципе не обобщается, ни с чем не уравнивается и ничем не подравнивается, – даже в названии.

Подобное "металлическое" наслоение выглядит явно излишним, но в определенной мере не таким уж и безобидным явлением, поскольку в конечном итоге нивелирует гармоническую пропорцию, сводя на нет тысячелетние устремления многих ученых по изучению и выделению золотого сечения в особый феномен мироздания.

Мы далеки от слепой и бездумной фетишизации ЗС.

Но в равной мере против его обезличивания под видом наслоений типа металлических пропорций или искусственных кодов (обобщений) ЗС, покрытых маревом-пеленой загадочности с претензией на оригинальность.

Особо подчеркнем, что в данном случае речь идет исключительно о применяемой терминологии. Реальный вклад отдельных разработок, выполненных «под флагом алхимического золочения», в каждом конкретном случае следует рассматривать отдельно.

От частного к общему. В области золотого сечения выполнен широкий круг исследований и получены достаточно фундаментальные результаты, которые можно попытаться перенести с ассемблированием и на другие математические формы и образы гармонии в плане соотношения (сочленения) частей в целом.

В теории ЗС и чисел Фибоначчи нашла распространение так называемая Q-матрица [1] вида $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, которая в процессе ее последовательного перемножения воспроизводит тройки соседних чисел Фибоначчи $Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ так, что согласно формуле Кассини определитель (детерминант) матрицы равен $\left|Q^n\right| = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Довольно неожиданный (на первый взгляд) результат естественным образом вытекает из суммирующего правила подсчета элементов квадратных матриц при их перемножении, что одновременно и вполне адекватно (изоморфно) согласуется с аддитивно-рекуррентной формой определения чисел Фибоначчи.

Это необычное объединение свойств достаточно разных математических объектов, каковыми являются числовые ряды и матрицы, находит свое продолжение в современных разработках [2–7] различной направленности.

Вполне естественным выглядит и наше стремление расширить свойства, характерные для Q-матрицы и ЗС, на более широкое игровое поле, каковым, в частности, является структура алгебраического квадратного уравнения общего вида, что и составляет основную задачу нашего небольшого исследования.

Математические выкладки. Итак, рассматривается квадратное уравнение $x^2 - px - q = 0$ с действительными коэффициентами p, q и положительным корнем

$$\lambda = \frac{p + p'}{2},$$

где $p' = \sqrt{p^2 + 4q}$.

Его разностный аналог $x_{n+1} = px_n + qx_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, ...$ генерирует бесконечное множество числовых рядов, которые можно условно назвать как *квадратичные ряды Фибоначчи* – рекуррентные аддитивные последовательности, порождаемые квадратным алгебраическим уравнением с его аналогом в виде возвратного уравнения второго порядка.

Для фиксированных начальных условий (x_0, x_1) рекуррентная (возвратная) последовательность $x_{n+1} = px_n + qx_{n-1}$ по теореме Д. Бернулли воспроизводит положительный корень λ уравнения таким образом, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda > 0$.

Если в качестве затравочных чисел выбрать пару $(x_0, x_1) = (0, 1)$, то элементы числовой последовательности могут быть определены в аналитическом виде по обобщенной нами [8] формуле Бине:

$$x_n = \frac{\lambda^n - (-q)^n \lambda^{-n}}{p'}.$$

Введем обобщенную g-матрицу (*геноматрицу*[1]) квадратного уравнения

[1] Название заимствовано у С.В. Петухова [4], который данные генетического кодирования представляет в виде матриц специального типа, названных им геноматрицами. Он отмечает, что «язык матричного исчисления, являющийся одним из основных во всем современном математическом естествознании и компьютерной информатике, неожиданно выступает в роли языка результативного представления системы генетического кодирования. Это открывает дополнительную возможность взаимного обогащения различных "матричных" областей науки, а также усиливает роль матричного исчисления в математическом естествознании в целом».

$$g=\begin{pmatrix} m & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначение матрицы специально выполнено маленькой буквой, поскольку заглавная буква *G,* как правило, используется для обычных последовательностей Фибоначчи с произвольными начальными условиями, но которые все равно приводят к числу ЗС (*Gold*).

С целью единообразия обозначение матрицы в принципе можно оставить таким же, как и для чисел Фибоначчи, поскольку главное отличие состоит только в ведении коэффициентов *p*, *q*, когда при $p=q=1$ мы очевидным образом приходим к уравнению ЗС.

В этом контексте геноматрица обобщает предшествующую *Q*-матрицу на случай $p \ge 1, q \ge 1$.

Заметим, что ни о каких обобщениях самого золотого сечения нет и речи!

Но те его полезные свойства, которые проявляются через числа Фибоначчи в *Q*-матрице, мы пытаемся структурировать и расширить на более широкий класс уравнений и соответствующих им пропорций частей в целом.

Можно сравнительно легко показать, что *g*-матрица при последовательном возведении ее в целочисленную степень воссоздает последовательность $x_{n+1}=px_n+qx_{n-1}$ с начальными условиями $(x_0, x_1)=(0,1)$, $n=1, 2, 3, \ldots$ в следующей записи:

$$g^n=\begin{pmatrix} x_{n+1} & x_n \\ qx_n & qx_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Для этого достаточно проверить следующее *мультипликативное* свойство:

$$g^n \cdot g = g^{n+1}.$$

Действительно,

$$g^n g=\begin{pmatrix} x_{n+1} & x_n \\ qx_n & qx_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} px_{n+1}+qx_n & x_{n+1} \\ q(px_n+qx_{n-1}) & qx_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{n+2} & x_{n+1} \\ qx_{n+1} & qx_n \end{pmatrix}=g^{n+1}.$$

Кроме того, для *g*-матрицы справедливо также *аддитивное* свойство:

$$g^{n+1}=pg^n+qg^{n-1}.$$

Действительно,

$$pg^n+qg^{n-1}=p\begin{pmatrix} x_{n+1} & x_n \\ qx_n & qx_{n-1} \end{pmatrix}+q\begin{pmatrix} x_n & x_{n-1} \\ qx_{n-1} & qx_{n-2} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} px_{n+1}+qx_n & px_n+qx_{n-1} \\ q(px_n+qx_{n-1}) & q(px_{n-1}+qx_{n-2}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{n+2} & x_{n+1} \\ qx_{n+1} & qx_n \end{pmatrix}=g^{n+1}.$$

Обратная матрица находится в зависимости от порядкового номера *n*

$$g^{-n}=\begin{pmatrix} x_{n+1} & x_n \\ qx_n & qx_{n-1} \end{pmatrix}^{-n}=\begin{pmatrix} qx_{n-1} & -x_n \\ -qx_n & x_{n+1} \end{pmatrix}\cdot(-q)^{-n}.$$

Определитель матрицы равен

$$\left|g^n\right|=(-q)^n.$$

Это следует из следующих преобразований, с учетом того, что корень λ превращает исходное уравнение в нулевое тождество $\lambda^2 - p\lambda - q = 0$:

$$\frac{\lambda^{n+1} - (-q)^{n+1}\lambda^{-n-1}}{p'} \cdot q\frac{\lambda^{n-1} - (-q)^{n-1}\lambda^{-n+1}}{p'} - q\left[\frac{\lambda^n - (-q)^n\lambda^{-n}}{p'}\right]^2 =$$

$$= q\frac{\left[\lambda^{2n} - (-q)^{n-1}\lambda^2 - (-q)^{n+1}\lambda^{-2} + (-q)^{2n}\lambda^{-2n}\right] - \left[\lambda^{2n} - 2(-q)^n + (-q)^{2n}\lambda^{-2n}\right]}{p'^2} =$$

$$= (-q)^n\frac{\lambda^2 + q^2\lambda^{-2} + 2q}{p'^2} = (-q)^n\frac{(\lambda - q\lambda^{-1})^2 + 4q}{p'^2} = (-q)^n\frac{p^2 + 4q}{p^2 + 4q} = (-q)^n.$$

Продемонстрируем свойства геноматрицы на конкретном примере.

Положим для определенности $p = 3,\ q = 2$.

Тогда для образующегося числового ряда $x_n = \{0, 1, 3, 11, 39, 139, 495, 1763, ...\}$ имеем следующую последовательность g-матриц:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 39 & 11 \\ 22 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 139 & 39 \\ 78 & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 495 & 139 \\ 278 & 78 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1763 & 495 \\ 990 & 278 \end{pmatrix},$$

$$g^{-5}(-2)^5 = \begin{pmatrix} 78 & -139 \\ -278 & 495 \end{pmatrix}, \quad g^{-6}(-2)^6 = \begin{pmatrix} 278 & -495 \\ -990 & 1763 \end{pmatrix},$$

$$\left|g^4\right| = \left|\begin{pmatrix} 139 & 39 \\ 78 & 22 \end{pmatrix}\right| = 139 \cdot 22 - 39 \cdot 78 = 16 = 2^4,$$

$$3g^5 + 2g^4 = 3\begin{pmatrix} 495 & 139 \\ 278 & 78 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 139 & 39 \\ 78 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1763 & 495 \\ 990 & 278 \end{pmatrix} = g^6.$$

Таким образом, проведенная нами трансформация исходной Q-матрицы позволяет обеспечить ее использование и в случае обобщения на квадратное уравнение.

Примечательно, что большинство известных свойств Q-матрицы, по сути, пролонгированы, хотя и в видоизмененной форме, что лишний раз подчеркивает ее фундаментальный характер, который воочию проявился при переходе от уравнения ЗС к квадратному уравнению с его многочисленными возвратными последовательностями.

Произвольные начальные условия.

Анализ числовых рядов, как правило, ограничивают фиксированной двойкой затравочных чисел, например, традиционной парой $(x_0, x_1) = (0, 1)$.

В то же время весьма интересные результаты могут быть получены и для других произвольно выбранных начальных условий.

Как и для чисел Фибоначчи, можно сравнительно легко показать, что g-матрица при последовательном возведении ее в целочисленную степень воссоздает последовательность $x_{n+1} = px_n + qx_{n-1}$ с произвольными (целочисленными) начальными условиями (x_0, x_1), $n = 1, 2, 3, ...$ в следующем виде

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} & x_n \\ qx_n & qx_{n-1} \end{pmatrix} = x_1 g^n + x_0 q g^{n-1}.$$

Пара (x_0, x_1) может содержать в общем случае любые действительные числа.

Например, для затравочных чисел $(x_0, x_1) = (3, 5)$, коэффициентов $p = 3$, $q = 2$, числовой последовательности $x_n = \{3, 5, 21, 73, 261, 929, \ ...\}$ и фиксированного порядкового номера $n = 4$ имеем

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 139 & 39 \\ 78 & 22 \end{pmatrix} + 3 \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 39 & 11 \\ 22 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 929 & 261 \\ 522 & 146 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 929 & 261 \\ 2 \cdot 261 & 2 \cdot 73 \end{pmatrix}.$$

"Размышлизмы" о ЗС и структурах, его порождающих.

Было бы весьма некорректно с нашей стороны оставить проведенные математические выкладки в чистом виде без осмысления и анализа их основных результатов в практическом и теоретическом аспекте.

Особенно важным представляется акцентирование взаимоотношений в системе «ЗС и его порождающие структуры».

Какой виделась в целом картина до проведенного обобщения Q-матрицы?

В основном восклицали и не переставали по праву удивляться уникальности чисел Фибоначчи, а заодно и ЗС, которые кроме всего прочего, могут порождаться такой простой квадратной матрицей $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, вселяющей надежду на особенную роль и плодотворность идей матричного подхода в теории ЗС.

Чем же мы располагаем на самом деле?

А де факто мы имеем зеркальное отражение ситуации, как говорят «с вероятностью до наоборот».

Есть корпоративная геноматрица $g = \begin{pmatrix} p & 1 \\ q & 0 \end{pmatrix}$, которая выражает общие свойства аддитивно-рекурсивных рядов, построенных на основе возвратных уравнений второго порядка с любыми действительными коэффициентами p, q.

Эта матрица воспроизводит самые причудливые и разнообразные числовые последовательности с различными аттракторами, включая ЗС и другие необычные числа, содержащие квадратные радикалы, получаемые в результате решения квадратных уравнений.

В частном случае $p = q = 1$ наша система вырождается в золотое сечение, но само ЗС при этом наследует системные свойства своего прародителя (уравнения второго порядка).

То есть не ЗС распространяет свои свойства на уравнение общего вида, которое никоим образом не становится его обобщающим кодом (!), а наоборот ЗС как губка через свойства геноматрицы впитывает генетические свойства квадратного уравнения.

При этом ЗС не только вступает в законные права наследника структурных свойств и отношений, характерных для квадратного уравнения, но вдобавок насыщает их дополнительными только ему присущими свойствами, по праву формируя заслуженный нимб уникальности и неповторимости.

Но уже к этим редкостным качествам ЗС само квадратное уравнение общего вида (с произвольными коэффициентами) если и имеет, то весьма отдаленное отношение.

Во всяком случае, не больше чем обезьяна к человеку, если исходить из основных научных положений теории эволюции, или просто принимать их на веру.

Воспользуемся методом аналогий.

Образно говоря, <u>золотое сечение – гениальный ребенок своих родителей</u> (обычных квадратных уравнений общего вида).

Через геноматрицу оно впитало их гены.

Внесло только ему присущую специфику за счет *единичных коэффициентов в единичном* (целом), $p = q = 1$.

Однако обратного хода (влияния) на своих родителей или братьев (других корней), в смысле их обобщения (?), ЗС уже не имеет.

Но зато оно порождает собственных "золотых наследников" в виде различных проявлений или отзвуков в структурировании мироздания, и особенно его мобильных живых систем, с определяющей ролью своего кода в форме дуально-равных половинок квадратного корня из пяти или $\frac{\sqrt[2]{2^2 + 2^0}}{2^1} \pm \frac{2^0}{2^1} \Rightarrow (\Phi, \phi)$.

Литература.

1. *Hoggat V.E.Jr*. Fibonacci and Lucas Numbers. Boston, MA: Houghton Mifflin, 1969.

2. *Stakhov O.P*. A generalization of the Fibonacci *Q*-matrix // Доповіді Національної академії наук України. – 1999. – № 9. – С. 46–49.

3. *Stakhov O.P*. Gazale formulas, a new class of the hyperbolic Fibonacci and Lucas functions, and the improved method of the "golden" cryptography // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm.

4. *Петухов С.В*. Матричная генетика, алгебры генетического кода, помехоустойчивость. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 316 с.

5. *Петухов С.В*. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение / Метафизика. – М.: Бином, 2006. – С. 216–250.

6. *Уфимцева В.Б*. Метод и алгоритмы хеширования информации на основе обобщенных матриц Фибоначчи // Коммунальное хозяйство городов. – Харьков: ХНАГХ, 2003. – Вып. 53. – С. 275–278.

7. *Якушко С.И*. Квадраты чисел ряда Фибоначчи // Віснік СумДУ. Серія "Фізика, математика, механіка". – 2008. – № 1. – С. 190–194. – http://visnyk.sumdu.edu.ua.

8. *Василенко С.Л.* Аналитика "золотых" пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.