

# НЕАРХИМЕДОВО ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ СИСТЕМ

© *Ф.И. Маврикиди (ИПНГ РАН)*

## **Введение**

Целостное, интегративное мировидение, холизм, являются прямым наследником античной натурфилософии и философии средневековой алхимии. История этого направления прервавшись три столетия назад становлением и развитием становлением механистической картины мира, вновь возродилась в 20 веке под различными названиями. Современное мировидение представлено тектологией А.А. Богданова, кибернетикой Н. Винера, общей теорией систем Л. фон Берталанфи, автопоэзисом У.Матураны и Ф.Варелы, глобальным эволюционизмом Н.Н. Моисеева, единой трансдисциплинарной теорией Э. Ласло, теорией биологической самоорганизации С. Кауфмана, бутстрапной системологией Ф. Капры. В последние десятилетия различные его формы, оставаясь в значительной степени авторскими, объединяясь, дали жизнь теории самоорганизации в самом общем его понимании - самодвижение, самоструктурирование и самодетерминация материи во всех формах ее проявления. Косные, технические объекты, традиционный объект внимания физики, составляют небольшую, хотя и хорошо развитую в математическом отношении область новой науки – здесь широкую известность приобрели синергетика Г. Хакена и диссипативные структуры И. Пригожина. В противовес им сформировалось ядро идей, питающих так называемые науки о жизни ( life sciences ). Этот термин очень точно передает «сверхзадачу» теории самоорганизации и сдвиг парадигмы, происходящий в современной науке, обозначая дистанцию между естественным и техническим мироощущениями .

Естественные системы, так как понимается этот термин в системном анализе и теории самоорганизации, существенно отличаются от объектов, традиционно рассматриваемых математической физикой. Прежде всего язык, область психики человека и биология всегда оставались вне рамок универсума классической физико–математической науки, по сей день считающимися лидерами естественнонаучного знания. Объекты экономики, экологии, социологии существенно междисциплинарны – в них, как правило переплетены процессы и явления, принадлежащие различным областям физики и других наук. Эти системные объекты всегда обладают богатой внутренней структурой, их жизнедеятельность рассматривается на временных масштабах, позволяющих различить фазы развития - от рождения до угасания или смерти. Поэтому системы в общем понимании всегда изучаются в неотрывном взаимодействии с окружающей средой. Их изолированное изучение означает, как правило, полную утрату познавательной и практической ценности научного исследования ( можно ли представить, что какой-либо биологический вид сформировался и развился в изоляции от окружающей биосферы или вне конкуренции, вне трофических связей с другими видами??) Движения естественных систем, таким образом, по классификации теоретической физики следует отнести к неинтегрируемым – невозможно устранить взаимодействия естественного объекта с окружающим

миром. Соответственно понятие материальной точки, или даже распределенной системы таких точек не является для системной науки адекватным понятием.

Системное направление получило во второй половине 20 века сильный импульс со стороны развития нелинейной науки. Общенаучное признание получило представление об окружающем мире как о существенно нелинейном, неравновесном, открытом, который развивается только за счет сил, присущих ему самому. Так сформировалась самоорганизационная парадигма науки. В арсенал ученых вошли представления о детерминированном хаосе, фрактальных структурах, динамических системах со сложным, хаотическим поведением. Пришло осознание того, что сложность мира и сложность моделей, его описывающих, вещи, в общем, разные. Было обнаружено, что простые нелинейные динамические системы, порожденные простыми рекурсивными зависимостями, алгоритмами, способны демонстрировать очень сложное, непредсказуемое поведение. Траектории изображающих точек таких систем покрывают пространство состояний, образуя фрагментированные множества типа так называемых странных аттракторов. Классические прообразы таких множеств известны в топологии как дисконтинуумы – дискретные континуумы. Наиболее известным примером их служит Канторово совершенное или триадное множество. В естествознании дисконтинуумы стали известны после работ Б. Мандельброта, который ввел для них термин *фракталы*. Фракталы, в противовес объектам классической геометрии – абсолютно непрерывным кривым и формам из них образованным, были обнаружены и их существование доказано практически в любой научной дисциплине, имеющей дело как живой так и с косной материей. Наиболее весомым аргументом в пользу изучения фрактальных структур в связи с естественными системами следует признать то, что их существование доказано и для нефизических областей – формальных и естественных языков, логики, сетевой динамики. Поэтому классические дисконтинуумы или их естественнонаучный аналог – фрактальные множества стало возможным рассматривать в качестве кандидатов на роль «теории множеств», которая может быть положена в основу изучения естественных систем

*Краткое описание фракталов:* манифест нерегулярности

Математически строгого определения фрактального множества на сегодняшний день не существует. Содержательным и интуитивно понятным является следующее его описание. Множество носит черты фрактала, если оно обладает всеми или большинством из следующих свойств :

1. Непрерывное увеличение разрешающей способности наблюдения позволяет обнаруживать “ деталь за деталью”. Картина никогда не сводится к единственной точке.
2. Имеет крайне нерегулярное, запутанное строение. Его невозможно описать или задать традиционными аналитическим или геометрическим способами, уравнениями, соотношениями..
3. Часто обнаруживает самоподобие того или иного рода – скейлинг – часть множества геометрически подобна целому. Такие фигуры, несущие информацию о целом объекте, частью которого они являются, Герон Александрийский более 2000 лет тому назад назвал гномонами (несущими знание о целом).

4. Вблизи каждой детали строения есть бесконечное число других, разделенных промежутками разной длины. Фрактал “дыряв” на всех масштабах рассмотрения
5. Имеет естественное происхождение различной природы – живое и косное вещество, язык и материя. Встречается в ситуациях “вдали от равновесия”, нестационарных явлениях, в областях действия нелинейных, циклических, автореферентных процессов, где области причин и следствий, аргументов и функций совпадают.
6. Фрактальная размерность – степень заполнения пространства субстанцией – обычно дробное число. Фрактал “странно” устроен.
7. Математически характеризуется как вырожденно – непрерывное, всюду недифференцируемое множество. Фрактальные функции, соответственно, непрерывны, но не абсолютно непрерывны, т.е. не являются сплошными (типичный объект гладкого анализа).

### ***Фрактальная феноменология***

Самый короткий путь к общенаучному пониманию основ математического описания естественных систем лежит через идею эволюции. Одни и те же законы и механизмы природы, действуя в течение длительного времени, привели к образованию всех видов систем от косных – геологических, географических, водных и т.п., через органические – биологические, экологические, до социальных образований. Было бы неразумным считать, что видимое науками различие в их природе имеет в своей основе различие в законах, их сформировавших. Эволюция принципиально междисциплинарна, природа не знает деления, чаще всего условного, на научные дисциплины (Н.Н Моисеев, Э.Ласло, Ю.В.Чайковский).

Говоря языком современной *нелинейной науки*, все естественные системы есть плод длительно действующих *нелинейных динамических систем* - косных, органических, языковых. Поэтому естественно считать, что они существуют «на странном аттракторе», в фазовом пространстве нелинейных механизмов эволюции. Поскольку для естественных систем определяющим видом движения является метаболизм, морфогенез, изменение формы, состава, то, что обычно понимается под развитием, постольку эти системы следует считать и «подмножествами» самого фазового пространства эволюции, т.е. имеющими фрактальное строение. Отсюда проистекают все хорошо известные свойства, приписываемые системам - и наблюдаемое богатство внутренней структуры систем и постоянно присущие изменения, частности дивергентные процессы, и неинтегрируемость, т.е. невычленимость из окружающей среды, и холизм – «целое больше суммы частей». Можно показать, опираясь на принятые описания хаоса и фракталов, что эти системные свойства соответствуют неразложимости аттракторов, т.е. неустранимой связи между его подмножествами, экспоненциальному разбеганию траекторий элементов объекта, существующего во фрактальной среде. Особо следует выделить то, что естественные образования, однажды возникнув, существуют на «границе хаоса и порядка» Сочетание этих двух противоположных начал, ранее не привлекавшее внимания, обеспечивает сочетание устойчивости с лабильностью, необходимых для существования систем. Эта связь и взаимопереход противоположностей интенсивно обсуждалась И. Пригожиным в его известных работа. С точки зрения математического описания такая ситуация очень

неординарна – требуется предъявить универсум рассуждений, т.е. мир математических моделей, в котором детерминизм и случайность не разделены, т.е. «аргументы» и «функции» естественных процессов имеют такую двойственную природу. Иначе говоря, в математическую модель нельзя вводить случайность «руками», прибавляя к переменным, имеющим детерминированную природу «малые возмущения» (а большие??), как это обычно делается. Либо «Бог играет в кости» - (достойное занятие для такой персоны!?), либо между детерминизмом и случайностью нет большой разницы. Ключом к решению этого парадокса служит известное представление о хаосе как о детерминированной случайности.

*Грани нелинейности: логика, множества, числа*

Феномен нелинейности как правило обращает взгляд исследователя к объектам математической физики – к нелинейным дифференциальным уравнениям и функциям. До недавнего времени в тени оставалось содержание этого понятия, связанное с философией, логикой, теорией вычислительных процессов и естественными языками. Необходимо отметить, что естественные системы и самоорганизующиеся процессы всегда изучались науками биологического плана, экономическими, языковедческими. И во всех этих науках языком изучения служит естественный язык, существенным образом обладающий самоприменимостью. В зависимости от конкретной области можно говорить о т.н. языке деловой прозы, подмножестве устоявшихся терминов данной области как некоем подобии формализации, но, в целом, естественный язык в этих «мягких» науках неустрашим. Математика, хотя и ориентируется на использование формальных систем, методов и языков, также существенно опирается на естественный язык ( интерпретации в теории моделей ).

Это является ключевым фактором, указывающим на нелинейность, присутствующую во всех этих областях и естественных процессах. На языке математики это свойство языка называется автореферентностью или самоприменимостью, которое есть свойство естественного языка и считается нежелательным при построении формальных физико-математических теорий, т.к. оно ведет к известным семантическим парадоксам.

В логике самоприменимые предложения ведут к необходимости включения аксиом типа

$$s \equiv A(s)$$

например, известный парадокс лжеца – « Я лжец», выглядит как

$$S \equiv \neg S$$

где  $p$  – логическая переменная,  $A(s)$  – логическая формула. Известно, что К. Гедель при доказательстве своей теоремы о неполноте опирался на подобную лемму об автореферентности. Поэтому эта знаменитая теорема должна присутствовать в мире естественных систем

Для значения функции истинности  $|s|$  тогда получается знакомое нелинейное уравнение

$$|s| = f(|s|)$$

где  $f$  – функция истинности формулы  $A$ . На обычных множествах поиск неподвижной точки такого отображения статическая, тривиальная задача. При

интерпретации логических переменных каждому из них соответствует множество истинности  $X$ . Тогда оно имеет следующий вид:

$$X = \{1, X\}$$

Разворачивая эти автореферентные предложения, узнаем нелинейные функции и операторы математической физики

$$y = f(x, y) = f(x, f(x, y)) = f(x, f(x, f(x, y))) = \dots$$

Поэтому логическая и теоретико-множественная автореферентность, есть обобщение известной нелинейности на те области, где использование (дифференциальных) уравнений не могло быть осуществлено. Это области анализа логических парадоксов, проектирования и управления сложными системами и вычислительными процессами

На множествах с такими свойствами уже нетривиальное решение, неподвижную точку, так называемую большую неподвижную точку, имеют рекурсивные, нелинейные, циклические процессы, т.е. существуют нетривиальные решения уравнений

$$X = X^2$$

$$X = \lambda \cdot X$$

в которых легко узнаются известные из теории хаотических динамических систем отображения типа «колоколообразная кривая», логистическое отображение, преобразование пекаря и другие им эквивалентные.

Соответственно этим структурам существуют и «нелинейные» числа, так называемые  $p$ -адические числа (о них пойдет речь дальше, здесь приводится лишь общий вид).

$$x = a_0 + p(a_1 + p(a_2 + \dots + a_i + p(a_k + \dots)) \dots$$

где цифры  $a_j$  берутся из множества  $\{0, 1, 2, 3, \dots, p-1\}$ ,  $p$ - простое число и разложение бесконечно вправо, так же как и для функций.

Такое расширение понятия нелинейности позволяет с единых математических основ объединить изучение естественных систем, имея ввиду их самоорганизационные свойства. Однако это расширение порождает две существенные особенности, касающиеся способов математического описания явлений. Во-первых, для таких множеств не выполнена одна из основных аксиом математического анализа – аксиома фундирования, она же регулярности: такие множества отрицают наличие «дна элементарности», для них бессмысленно рассматривать изолированные точки. Это существенно иррегулярный мир, мир неспрямляемых кривых, поверхностей и форм. Во – вторых, не выполнена еще одна их основных аксиом анализа – аксиома Архимеда, она же измеримости, которая устанавливает связь между геометрией и построением формул. Как следствие эти иррегулярные, фрактальные множества оказываются нерекурсивными и неразрешимыми. Движение по таким множествам возможно лишь по правилам интуиционистской логики, а элементарная точка оказывается нераспознаваемой. Простое, детальное рассмотрение этих вопросов изложено в работах автора .

### *р-Адическая феноменология единства естественных систем.*

Впервые на множества, которые позже стали называться фракталами, обратил внимание американский математик польского происхождения С. Улам в первой половине XX века. К 1964 году развитие его взглядов, предвосхитивших сегодняшние идеи во фрактальном естествознании, можно суммировать следующим образом. С. Улам задался вопросом о бесконечной сложности микромира и нескончаемом разнообразии макромира о существовании и роли бесконечностей в физике и о том, почему в таких условиях возможна физика как единой науки. Такое чудо, следует его вывод, не состоялось, если бы, образно говоря, электроны и протоны как противоположности не были бы во многом едины. Это единство суть делимость материи и существование в природе различных процессов - деления, ветвящихся. Никакими физическими законами не запрещается их бесконечность. По этой причине возникает подобие самых различных подмножеств универсума физики которое и является основой построения теории множеств, отражающей единство науки. Но тогда встают вопросы - как совместить непрерывность с дискретностью, предопределенность, (детерминированность) со случайностью. С. Улам замечает, что процессам деления соответствует строение или топология пространства - времени типа *р-адической*, или, что то же, типа Канторова совершенного множества - несчетной совокупности отдельных точек. На таком множестве сочетание противоположных свойств становится уже возможным. Эти множества, так называемые дисконтинуумы, не образуют ни непрерывного континуума в обычном смысле, ни множества дискретных точек, далее неделимых. На них нельзя ввести понятие материальной точки, так как любой объект конечных размеров, обладающий, например, массой автоматически оказывается структурированным, делимым. Это значит, что такие множества не могут иметь в основании неделимые элементы или « атомы простоты», демонстрируя бесконечность свойства и отсутствие предела процессов делимости материи. Поэтому привычные нам действительные числа, не всегда отражают физически содержательные величины. В свою очередь, с математической точки зрения, это означает, что в таком мире, построенном на идеях единства материи, не имеет места так называемая аксиома фундирования в теории множеств (англ. *foundation* - основание, фундамент), которая устанавливает существование праэлементов, «атомов простоты», «дна элементарности» в каждом множестве. Пространство - время такого бесконечно сложного, не только дискретного но и непрерывного, мира должно иметь **иерархическую** структуру и не существует

единственного пути определения однородного пространства - времени, традиционного для физики.

Здесь мы подошли к еще одной универсалии, присущей фракталам. В рассуждениях С.Улама фрактальные множества предстают как основа целостности «многопредметной», разнородной субстанции, «чуда» междисциплинарной науки. Это типичный материал экономической, экологической, психологической и глобальной проблематик. Природа в своем движении не знает деления на научные дисциплины.

### ***p - Адическая математика и картина мира***

Как следует из изложенного фрактальный и  $p$ -адический миры можно считать синонимами.  $p$ -Адические числа были введены в математику в конце XIX века немецким математиком К.Гензелем по аналогии с полиномами в комплексной области.

Оказалось, что числа и функции комплексного переменного во многом ведут себя сходным образом. Подобно тому, как комплексные числа аналогичны векторам на плоскости,  $p$ -адические числа представляют аналогию разложения в так называемый ряд Лорана произвольной функции и записываются в виде бесконечного ряда по

степеням какого-либо простого числа  $p$  :  $x = \sum_{i=-m}^{\infty} a_i p^i$ ,  $a_i \in \{0,1,2,\dots,p-1\}$ , или в

записи, подобной десятичной записи числа, только с бесконечной «целой» частью, соответствующей положительным степеням  $p$  :  $x = a_{-m}a_{-m+1}\dots a_{-1}a_0a_1a_2\dots a_n\dots$ , здесь

$a_i \in \{0,1,2,\dots,p-1\}$  - цифры, а  $p = 2,3,5,\dots,41,\dots,137,\dots$  - одно из простых чисел натурального ряда. Поскольку, как видно, все  $p$ -адические числа бесконечно велики в

обычном смысле, то величина такого числа определяется по первому ненулевому члену ряда по формуле :  $|x|_p = p^{-am}$ ,  $a > 0$ . Ее смысл в том, что она **обратно**

**пропорциональна степени делимости данного числа на фиксированное простое число  $p$** . Чем « большее количество раз » число делится на  $p$ , то есть чем больше  $m$ ,

тем меньше  $p$ -адическая величина. (Например  $|36|_2 = \frac{1}{4}$ ,  $|7|_2 = 1$ ,  $|137|_2 = 1$ ,

$|\frac{1}{64}|_2 = 64$ .) Основное отличие так вводимой величины числа заключается в ее

неархимедности, то есть в несовпадении с обычными линейными мерами, в

невыполнении условия простого сложения ( $|x_1 + x_2|_p \leq \max\{|x_1|_p, |x_2|_p\} \neq |x_1|_p + |x_2|_p$ ).

Такое определение величины числа - не просто отвлеченная теоретическая конструкция

математиков. Оказывается, что если мы хотим что-либо мерить, строить и развивать количественные оценки и методы, то выбор у нас невелик - либо обычные рациональные числа с обычным модулем (длиной), либо  $p$ -адические числа с указанной  $p$ -адической, величиной (частотой). Это фундаментальные факты из курса общей алгебры (теорема Островского). Нетрудно показать, что упомянутые выше знаменитые «фрактальные» степенные законы есть просто связь его обычной и  $p$ -адической мер для каждого физического и языкового объектов (так называемая формула произведения в  $p$ -адическом анализе). Величина параметра  $\alpha$  в этом случае совпадает с фрактальной размерностью изучаемого объекта.

Работы последних лет показали, что особенности строения  $p$ -адических чисел придают их совокупностям, то есть полям  $Z_p (m=0)$  и  $Q_p (m>0)$   $p$ -адических чисел кластерную, фрактальную структуру. Все множество натуральных чисел в  $p$ -адической норме сжимается до кластера  $0 \leq x \leq 1$ . В общем случае поле  $Z_p$  (или  $Q_p$ ) состоит из своих копий ( $Z_p = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} p^n Z_p$ . Здесь умножение на степень  $p$  означает увеличение степени разрешения наблюдения кластера в  $p$  раз). Общее строение легко уяснить из рис. 2. В зависимости от значения параметра  $\alpha$  в определении  $p$ -адической величины числа могут получаться как связанные так и несвязные образы полей чисел в обычном физическом пространстве.

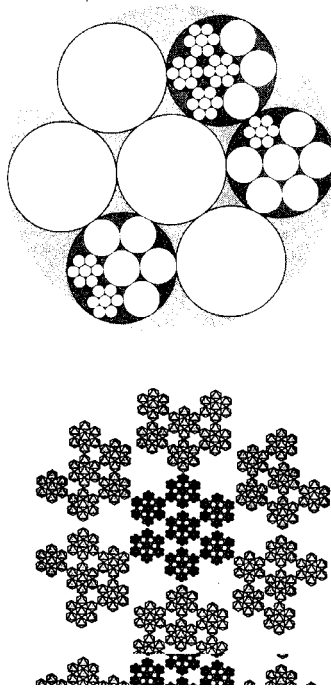


Рис. Строение поля  $Z_7$  и его фрактальный образ



С кластерной структурой корреспондирует представление полей  $p$ -адических чисел в виде плохообусловленных множеств. Аналогию легко понять, если записать это множество в «нелинейном», уже знакомом нам виде

$$Z_p = \bigcup_{i,j,k..} (a_i + p(a_j + \dots p(a_k + pZ_p) \dots))$$

Итак, все, что говорилось об этих гипермножествах выше, оказывается верным и для  $p$ -адических чисел. В частности, взаимосвязь всех его частей, обеспечивается взаимным вложением кластеров (см. Рис 2). Такие множества реализуют идею микрокосма, принципа «каждое в каждом». Как видно из определения множество  $p$ -адических чисел представимо в виде дерева с ветвлением на  $p$  частей в каждой вершине. Такое дерево иногда называют иерархическим или лексикографическим. Конкретное число получается, если следовать по некоторому выделенному пути по его ветвям, последовательно выписывая цифры в вершинах. Каждому пути соответствует определенное число и наоборот.

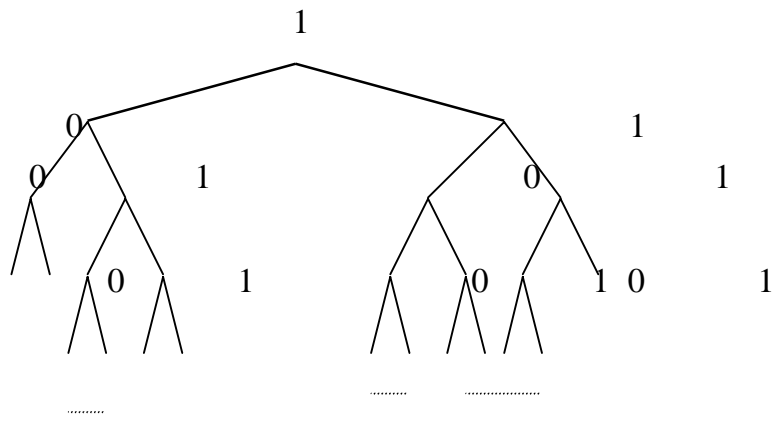


Рис. Дерево  $p$ - адических чисел  $p=2$

Эти деревья могут мыслиться как эталоны делимости материи, а также как схемы причинно - следственных связей взаимодействия объектов в различных процессах, в соответствии с заданным простым числом  $p$ . Простое число в таких случаях играет роль физического параметра. Номер уровня иерархии равен степени увеличения разрешения, с которым наблюдается структура кластеров. Если придать ветвям дерева «равноправный» вид, то получится, так называемое дерево Брюа - Титса, которое наблюдается на «поверхности», определяемой концами ветвей исходного дерева  $p$ - адических

чисел Это дерево представляет собой наглядный образ фрактальной или  $p$ -адической « ткани » Мира.

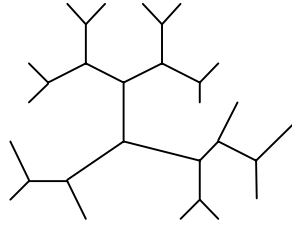


Рис. Дерево Брюа - Титса

Конечно рисунок не может передать всей иерархической полноты картины. Видны лишь кластеры, которые при увеличении разрешения в свою очередь предстают в виде деревьев. Дерево Брюа - Титса самоподобно в том смысле, что центром Мира может служить любая его вершина, нет выделенного масштаба, вершины. Из любой точки этого дерева Мир выглядит одинаково. Простые арифметические действия над  $p$ -адическими числами придают законченный вид  $p$ -адическому Миру в виде *сети*, в которой каждая вершина связана с любой другой: Взаимосвязь фракталов и сетей, как оказалось, не просто теоретическое совпадение. Исследование функционирования самой большой на сегодняшний день искусственной сети - Интернет показало фрактальный характер динамики потока заявок. Итак, мы приходим к еще одному, **сетевому** представлению о мироустройстве. Этот Мир уже существенно отличается от традиционного Декарта - Ньютонова. Сетевой Мир является миром связанным, населенным, взаимообусловленным: любой его объект существует только в связи и за счет других объектов. В этом мире нет надобности вводить **обратные связи** - они изначально существуют на **всех масштабах** и составляют ткань мироздания.

В  $p$ -адической математике показано, что  $p$ -адический мир имеет форму *соленоида*, то есть бублика.

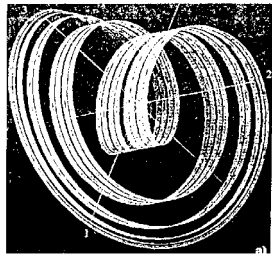


Рис.  $p$ -Адический соленоид

Известно много различных теорий, концепций и гипотез в системных науках и так называемых «науках о жизни» (англ.- *life sciences*), эмпирически основанных и группирующихся вокруг такой сетевой картины Мира.

Наконец у  $p$ -адической математики есть еще сторона, неразрывно связанная с вышеизложенным. Устройство, или топология,  $p$ -адических числовых полей позволяет рассматривать набор цифр разложения чисел как буквы некоторого алфавита  $A = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ . Тогда числа предстают в виде слов - кодов Гензеля, которые группируются в предложения, тексты, формальные языки и теории. Весь Мир тогда являет собой гипермножество  $Z_p = [0, 1, 2, \dots, p-1]^N$ . Поэтому  $p$ -адические числа пригодны для кодирования информации, описания какой-либо области алгоритмического или языкового характера. Это значит, что в  $p$ -адических фракталах, возможно впервые, соединяются материальное, физическое и символическое, языковое представления о Мире. Тема эта слишком сложна и с точки зрения математического описания, по-видимому, еще не сформирована, поэтому мы обратимся к двум другим сферам - психологии и философии, где аналогии могут быть прослежены. Отметим лишь, что сетевая структура Мира объясняет существование отмеченных выше степенных зависимостей в разнородных по природе областях - материальных, языковых. Поэтому становится возможным количественное изучение таких явлений как взаимодействие общества и внешней среды - ландшафта, экономики, а значит и исследований в русле идей коэволюции - совместной эволюции человека и природы..

### ***Мышление и системность***

Сетевая модель фрактального мира побуждает взглянуть в сторону математического моделирования в психологии. Автореферентность мыслительных процессов и сетевая структура мозга были замечены давно, а в

последние годы учеными прочувствована нелинейность их динамики и связь с понятиями хаоса и фракталов. Из существующего ряда отечественных и зарубежных работ одна близка теме настоящей статьи так как, посвящена основам применения математики в психологии [7]. Эта монография может рассматриваться как прекрасное введение в круг вышеописанных в понятий , формирующая полноценное  $p$ - адическое , «плохообусловленное» мироощущение .

Наметим существующие соответствия между, казалось бы разными, мирами. Для понимания системности как основы моделирования достаточно обратиться к феноменологии С.Улама Междисциплинарный характер процесса мышления очевиден - ибо именно оно породило все многообразие научных дисциплин, представления о дискретности и непрерывности, детерминизме и случайности. «Недизъюнктивность», «взаимопроникновение», ничем не устранимая связность, что считается основным препятствием на пути описания мышления, усматривается из структуры  $p$ -адического, «плохообусловленного» мира - «каждое в каждом». «Неаддитивность» мыслительных актов также следует из неархимедовости. Основным признается то, что мышление есть процесс, но и мир фракталов существует в полной мере лишь вдали от равновесия, то есть в движении . В монографии особое внимание уделено гипотетической математике, пригодной для моделирования процесса мышления. Считается необходимым, чтобы числовая система несла в себе идею «нестатистической, невероятностной» неопределенности и принципиальной размытости, «диффузности». Что касается первой части требования , то общим местом в литературе является то , что фрактально - хаотические явления порождаются детерминированными алгоритмами, например сетевой динамикой и часто называются «детерминированной случайностью». Обоснованность второй части требования, можно видеть из того, что  $p$ - адическое число всегда будет наблюдаться с нечетким окончанием :  $x = a_0 + a_1.p + \dots + a_{k-1}.p^{k-1} + p^k Z_p$  Первые слагаемые определения есть «четкая», рациональная составляющая, последнее слагаемое - диффузное «пятнышко», остающаяся за пределами разрешающей способности, копия исходного числового поля, представляющая искомую неопределенность. В «плохообусловленном» мире, где нет изолированных «атомов простоты», приобретает нетривиально необычное увеличение информации в процессе познания путем «исчерпывания» объекта и его связей с внешней средой. Изложение и исследование параллелей можно в

значительной степени продолжить и расширить, если исследовать движения в фрактальном,  $p$ -адическом мире. Здесь мы прервем наше рассмотрение замечанием онтологического характера. В отличие от случая с классической теорией множеств (не решен вопрос «является ли внешний мир классом четко разграниченных объектов?»), в  $p$ -адическом мире внешние объекты имеют ту же «геометрию», что и объекты психического. Психическое, таким образом, уже на формальном уровне, становится **отражением** (или частью?) внешнего Мира.

Как теперь стало понятным, фракталы - это просто результат изменения аксиоматики, постулатов теории множеств, что влечет за собой необходимость смены числовой системы. Но существует ли этот мир, строение которого можно принять в качестве аксиом? знаком ли он людям? Оказывается знаком и очень давно. Ответ мы находим в восточной философии. Восточная философия вообще в последние годы часто упоминается в связи с синергетикой и системными представлениями. Отмечено много поразительных аналогий между ею и новыми научными идеями. В изучаемом нами фрактальном мире эти аналогии обретают дальнейшее продолжение.

### *Параллели с восточной философией*

Поскольку понятия философии и математики сформированы в разных интеллектуальных сферах и детальное исследование параллелей - тема самостоятельной работы, то здесь мы ограничимся перечислением лишь наиболее очевидных аналогий. (изложение основано на статьях А.Д. Арманды, Т.П. Григорьевой и монографии А.И. Кобзева).

Фрактальное,  $p$ -адическое пространство - время, имитируемое соленоидом, есть иерархия вложенных циклов и, поэтому, вполне допускает «Дыхание Брахмы», ритмы Инь и Ян, то есть циклическую смену периодов свертывания и развертывания Вселенной. В таком замкнутом Мире формой закона сохранения энергии можно считать «закон Кармы» - за каждое свое действие мы получаем наказание или поощрение с неотвратимостью в строгом соответствии с размерами совершенных пользы или вреда.

Объединение языка и физики в  $p$ -адической математике можно трактовать как то, что  $p$ -адический, фрактальный мир представляет собой Единое, Духоматерию. Связь Духа и Материи в этом единстве аналогична принципу дополнительности Н. Бора, который сделал символ Инь - Ян своей эмблемой.

Теперь о семерке.. В формулировке « $7 \pm 2$ » это правило известно также в психологии и многих других системных науках. В  $p$ -адической математике простое число  $p=2$  занимает особое положение. Ему соответствует Канторово триадное множество. Специалистам - топологам известно, что оно также исключительно по своим свойствам в классе самоподобных (фрактальных) множеств. Существует точно 9 полностью или равномерно самоподобных множеств (экспоненциально полных); . первые два - патологичны ( это пустое множество и множество, состоящее из одной изолированной точки); . остальные 7 получаются простыми рекурсивными операциями композиции из Канторова триадного множества. Явление нетривиального самоподобия имеет точно семь компонент. В произвольных своих сочетаниях они сохраняют фрактальную или  $p$ -адическую структуру Мира.

«Срединный Путь», «наука перестает быть антропоморфной, противопоставляющей человека остальному миру» - в  $p$ -адике , как уже говорилось, сливаются язык и физика, едины человек и окружающая среда.

«Точка есть сжатая Вселенная», « бесконечное в конечном» , «Восток не знает анализа» - в нашем изложении эти представления значат, что любой, сколь угодно малый кластер фрактального, «плохообусловленного» мира есть микрокосм, сохраняющий исходную  $p$  - адическую структуру, поэтому бесконечно сложный и мироподобный.

«Мир полицентричен», «мир напоминает бескрайнюю сеть Изиды, украшенную драгоценными камнями и кусочками хрусталя,... каждая драгоценность отражает все остальные» - эти идеи демонстрируются деревом Брюа - Титса,  $p$ - адической сетью кластеров - микрокосмов, их взаимопроникновением

«Теория познания неотделима от переживания» - гласит учение Востока. Соответственно, так как  $p$ -адическая сеть строго объединяет объекты и их связи, поэтому произвольное введение наблюдателя или какой - либо другой причины извне Мира невозможно. Наблюдатель должен быть частью Мира и переживать изменения вместе с ним. Движения и процессы в таком Мире носить только характер самодвижения. Такое положение наблюдателя отвечает закону естественности, т.е. отказу от антропоморфности исследования..

« Истина вне слов» - это еще одна, малознакомая, форма широко известного логического парадокса лжеца. Как отмечалось выше, «плохообусловленный» Мир дает права на существование логических парадоксов в силу присущей ему глубины. Поэтому любой конечный текст



формально, но «дающий возможность понять Природу, исходя из нее самой, законов Бытия, а не наших представлений о нем» ?

### *Движения естественных систем – самоорганизация*

Очевидно, что движение в таком замкнутом, соленоидальном Мире возможно только как самодвижение, самоорганизация. Все объекты и явления существуют и движутся только за счет других и, их изменение вызывает отклик во всем остальном Мире. Согласно современным представлениям теории самоорганизации все системы целостного Мира существуют на границе порядка и хаоса. Сочетание этих двух противоположных начал придает целостным образованиям одновременно свойства лабильности и устойчивости. Сдвиг объекта в ту или иную сторону от этой границы определяет его способность к развитию или угасанию. Эти процессы в современных разделах наук о жизни чаще всего изучаются как раз при помощи внекоординатных моделей действительности – сетей, из которых наибольший вес приобретают так называемые «сети Кауффмана» биологической эволюции, и клеточно-автоматные представления. Именно эти модели, базирующиеся на простейших алгоритмах, дают наиболее правдоподобные картины «алгоритмической химии» самоорганизационных явлений разной физической природы. С этой точки зрения жизнедеятельность, развитие, адаптация объектов представляется как их алгоритмическое «самопреобразование», «самовычисление». С математической точки зрения эти объекты являются универсальными вычислительными устройствами. Все до сих пор известные универсальные алгоритмы в математике оказались эквивалентными. Сети и клеточные автоматы относятся к их числу.

Фракталы, как известно, обладают многими чертами универсальности, как семантической (интерпретационной), так и вычислительной. Соответственно, фрактально  $p$ -адические сети также универсальны в вычислительном плане – «сети Кауффмана» и клеточные автоматы можно рассматривать как их конечные подмножества. Фрактальные сети могут «написать» любой текст, построить любую функцию – детерминированную или случайную, воспроизвести решение любого уравнения. Поэтому любой объект в фрактальном Мире, будучи микрокосмом – частью этой сети будет обладать всей мощью «самовычисления», т.е. способностью к самоорганизации и взаимосвязи с другими объектами, реализуя взаимодействия «поверх барьеров» материальных различий.

Фрактальная математика еще очень молода. Но уже первые результаты вселяют надежду. Многое из того, что обсуждается в теории сложности, удастся получить, используя простые правила  $p$ -адической арифметики – вездесущь гиперболических распределений, фликкер-шум, бифуркационный характер протекания естественных процессов, универсальность логистического уравнения, дивергентный характер биологических и социальных процессов.

Таким образом, как представляется, фрактальная идея в науке имеет прочный математический фундамент, способный дать необходимую свободу выбора в пользу целостной, интегративной картины Мира, основу для моделирования естественных систем.



Особо следует отметить простоту фрактальной науки, которая не раз отмечалась в литературе. Сама фрактальная геометрия, по опыту автора этой работы, понятна многим нематематикам после краткого ознакомления. Порождение фрактальных структур уже сейчас можно демонстрировать школьникам в курсе информатики (или параллельно с ним). Даже основы относительно малоизвестной  $p$ -адической математики, от арифметики вплоть до понятий производной и интеграла может в недалеком будущем быть предметом преподавания в средней школе. Здесь главным является наличие массива достаточно убедительных содержательных мотивировок и интерпретаций соответствующих математических конструкций. Этот массив знаний может быть сформирован только результатами применений фрактальной и  $p$ -адической науки.

### Литература

1. В.В. Василькова *Порядок и хаос в развитии социальных систем*. Спб., 1999.
2. F. Capra *The Tao of Physics*. Shambala, 2000.
3. F. Capra *The Web of Life*. Flammarion, 1996.
4. S.Kauffman *At Home in the Universe*. Oxford, 1996.
5. И.Пригожин, И.Стенгерс *Порядок из хаоса; Время, Хаос, Квант; Конец определенности*. М., РХД, 2000.
6. Н.Н. Моисеев *Расставание с простотой*. М., Аграф, 1998.
7. K. Falconer *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 1990
8. K Falconer *Techniques in Fractal Geometry*. Wiley, 1997
9. K. Wicks *Fractals and Hyperspaces*. Springer., 1991
10. B. Mandelbrot *Fractal Geometry: What is It and What Does It Do?// Proc. Roy. Soc. London A423, pp.3-16, 1989.*
11. G. A. Edgar *Measure, Topology and Fractal Geometry*. Springer, 1992.
12. G. A. Edgar *Integral, Probability and Fractal Measure*. Springer. 1998.
13. Ю.И. Манин *Вычислимое и невычислимое*. М., Сов. радио, 1980.
14. P.Grimm, G.Mar, P.StDennis *The Philosophical Computer*. MIT Press, 1998.
15. Ф.И. Маврикиди *Математические основы системного анализа и проектирования объектов нефтегазовой отрасли промышленности*. Препринт ИПНГ РАН, 1998.
16. Ф.И. Маврикиди *Фракталы: постигая взаимосвязанный мир// Дельфис №3, 2000.*
17. М.И. Паршин *Размышления над теоремой Геделя // Вопросы философии №:6, 2000.*
18. W.Beyer, J.Mycielsky, G-G.Rota. (eds). *S. Ulam: Sets, Numbers and Universes*. MIT Press, 1974.
19. A.Robert *Euclidean Models of p-Adic Spaces*. In W.Schikhoff et.al. (eds) *p-Adic Functional Analysis*. Nijmegen, 1995.
20. J. Barwise, L. Moss *Hypersets*. Mathematical Intelligencer, v.13(4), 1991.
21. В.С. Владимиров, И.В. Волович, Е.И. Зеленев *p-Адический анализ и математическая физика*. М., Наука, 1994.
22. W. Merzenich, L. Stiger *Fractals, Dimension and Formal Languages*. In G. Rosenberg, A.Salomaа (eds). *Developmets in Language Theory*. World Scientific Publ. Co., 199.
23. А.В. Брушлинский *Мышление и прогнозирование*. М., Мысль, 1979.

24. А.Д. Арманд *Время в учениях Востока*. «Дельфис» №№ 1(14), 2(15), 1998.
25. Т.П. Григорьева *Синергетика и Восток*. Вопросы философии, 3, 1997.
26. А.И. Кобзев *Учение о символах и числах в китайской классической философии*.  
Ин-т философии РАН, 1994.
27. И.С. Дмитриев *Неизвестный Ньютон* СПб, Алетейя, 1999
28. Д.В. Чистяков *Фрактальная геометрия образов непрерывных вложений  $p$ -адических чисел и соленоидов в евклидовы пространства*// ТМФ т.109,№3, с.323-337.
29. Ф.И. Маврикиди *Фрактальная самоорганизация* / Первая Московская междисциплинарная конференция «Этика и наука будущего» М., 2001.