Д.Клещев

Ошибка Пифагора

теорема несоизмеримости и фундаментальные последствия в основаниях математики

Посвящается памяти Александра Зенкина

Античными математиками была допущена логическая ошибка в теореме о несоизмеримости стороны и диагонали единичного квадрата. Перекочевав в современную математику, эта ошибка привела к многочисленным противоречиям в основаниях математической науки. В статье «Ошибка Пифагора» приводится принципиально иное решение этой задачи.

AMICUS PLATO, SED MAGIS AMICA EST VERITAS
Aristotle

Аристотель, считавший заблуждением представления многих античных мыслителей о существовании актуальной бесконечности, говорил: «*Бесконечность не существует актуально, как бесконечное тело или величина, воспринимаемая непосредственно органами чувств… Бесконечность существует потенциально, бесконечное проявляется в движении*». Тем самым он предостерегал ученых будущего о логических противоречиях, возникающих вместе с введением актуальной бесконечности. Однако последующее развитие фундаментальной науки привело к прочному укоренению данного понятия в математике.

Теорема несоизмеримости стороны и диагонали единичного квадрата

По легенде открытие иррациональных чисел связано с именем Пифагора или с одним из его учеников, который, рассматривая квадрат со стороной, равной единице, обнаружил явление несоизмеримости стороны и диагонали такого квадрата.[1] Позже, когда получили широкое распространение десятичные дроби, для числа $\sqrt{2}$ нашлось соответствующее десятичное значение 1,414213562… Но если мы взглянем на современную теорему, доказывающую иррациональность $\sqrt{2}$, то обнаружим, что в ее основе лежит все та же теорема несоизмеримости, появившаяся более двух тысяч лет тому назад благодаря пифагорейской школе.[2]

«**Теорема I: не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.**

Доказательство будем проводить методом от противного. Предположим, что существует рациональное число $\frac{m}{n}$, квадрат которого равен 2: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Если целые числа m и n имеют общие множители, то дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить, поэтому мы в праве сразу же предположить, что данная дробь несократима. Из условия $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ вытекает, что $m^2 = 2n^2$.

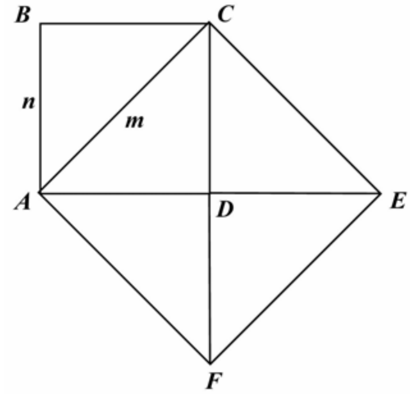
[1] «Фрагменты ранних греческих философов» / ответ. ред. И.Д.Рожанский, М., изд.«Наука», 1989, Ч.I., стр.141, 146, 476.

[2] А.В.Волошинов. «Пифагор. Союз истины, добра и красоты», М., 1993, стр.140.

Поскольку число $2n^2$ четно, то и число m^2 тоже должно быть четным. Но тогда будет четным и число m. Таким образом, получается, что число $m=2k$, где k – некоторое целое число. Подставляя число $2k$ в формулу $m^2 = 2n^2$, получаем: $4k^2 =2n^2$, откуда $n^2 = 2k^2$.

В таком случае число n^2 будет четным; но тогда будет четным и число n. Выходит, что числа m и n четные. А это противоречит тому, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Следовательно, наше исходное предположение о существовании дроби $\frac{m}{n}$, удовлетворяющей условию $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, неверно. Таким образом, не остается ничего другого как признать, что среди всех рациональных чисел нет такого, квадрат которого был бы равен 2. Поэтому уравнение $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ в множестве рациональных чисел неразрешимо…»[3]

В качестве геометрического обоснования иррациональности числа √2 приводится рассмотрение стороны и диагонали единичного квадрата (Рис.1). Так как нахождение общего отрезка, который в AB укладывался бы ровно n раз, а в AC ровно m раз, противоречит **Теореме I**, то считается, что отношение AB к AC сводится к отношению двух бесконечно больших множеств точек, из которых состоят данные отрезки.



(Рис.1)

То, о чем будет сказано далее, на первый взгляд покажется совершенно невероятным высказыванием. Но при более тщательном разборе данный подход обнаруживает в себе ряд недостатков, позволяющих говорить о том, что число √2 можно представить в виде периодической десятичной дроби или, строго говоря, рациональным числом $\left(\frac{m}{n}\right)^2$, где m и n – целые числа, $n \neq 0$.

Прежде всего, доказательство **Теоремы I** методом четных и нечетных чисел нельзя признать универсальным для всего множества действительных чисел. Так, следуя логике данного метода, невозможно доказать рациональность √9, потому что числа m и n окажутся нечетными, а отношение нечетных чисел может быть как сократимым, так и несократимым. Но самый главный изъян доказательства **Теоремы I** состоит в том, что в нем используется число k, которое принимается обязательно только целым числом, а значит, не учитывается возможность того, что √2 может быть десятичной дробью с периодом, отличным от (0) или (9). Это легко объясняется тем, что во времена Пифагора никто не имел представления о десятичных дробях, и даже обыкновенные дроби (в привычном для нас понимании) пифагорейцами не использовались, так как единица в пифагорейской школе считалась «числовым атомом» или «монадой», то есть неделимым

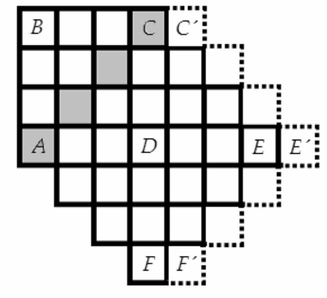
[3] Е.С.Кочетков, Е.С.Кочеткова. «Алгебра и элементарные функции», М., изд. «Просвещение», 1966, Ч.I, стр.88.

числом. Однако, исходя из определения рациональных чисел, ничто не мешает принять число k в качестве дробного $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда, в случае с √2, выражение $n^2 = 2k^2$ примет вид $1^2=2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$, и отношение $\frac{m}{n}$ окажется несократимым (это достаточно очевидный факт, так как соотношением $\left(\frac{m}{n}\right)^2$ выступает несократимая дробь $\frac{2}{1}$, которая не может быть получена возведением в квадрат сократимой дроби).

Таким образом, если учесть, что в истории науки известно достаточно много случаев длительного существования неверных представлений (например, пифагорейская теорема о сумме двух степеней с одинаковыми показателями, которую опроверг Пьер Ферма), то проверку теоремы несоизмеримости на корректность следует признать вполне справедливой и даже необходимой. Для этого есть все основания.

Топология шахматной доски и задача Пифагора

Рассматривая единичный квадрат (Рис.1), пифагорейцы пытались найти для стороны *AB* и диагонали *AC* некий эталон длины в виде отрезка. Но в 1911 году Л.Брауер доказал, что не существует топологического отображения, которое бы связывало два евклидовых пространства E^a и E^b, если $a \neq b$. [4] Поэтому попытка найти соотношение стороны и диагонали квадрата (то есть двухмерного объекта) с помощью отрезка (одномерного объекта) является заведомо невыполнимой задачей. Между тем, решение для поставленной пифагорейцами задачи существует, если разбить квадрат на элементы одинаковой размерности. Тогда сторона квадрата *AB* выразится тем же числом элементов, что его диагональ *AC* (Рис.2): *(э)AB=(э)AC*=4.



(Рис.2)

Действительно, если бы не выполнялось это равенство, то при последовательном отображении *AB* на *CD* мы бы обнаружили, что стороны квадрата *ABCD* состоят из разного числа элементов, что противоречило бы определению квадрата, у которого все стороны должны быть равными.

Разбив квадрат *ABCD* на элементы одинаковой разрядности, мы получили пространство с метрикой шахматной доски. Известно, что расстояния на шахматной доске удобнее всего определять ходом короля (если в Евклидовой геометрии расстояние от поля *a1* до поля *h8* больше, чем до поля *a8*, то на шахматной доске оба эти пути король может преодолеть ровно за семь ходов; если на Евклидовой плоскости две точки соединяет только один кратчайший путь, то на шахматной доске у короля есть 46 различных способов перейти с поля *f7* на поле *a7* за пять ходов).[5] Причем, процесс разбиения квадрата на более мелкие элементы одинаковой разрядности можно продолжать до бесконечности, поэтому любое конечное разбиение в такого рода элементарной топологии можно рассматривать как приближение к Евклидовой геометрии.

[4] Г.Е.Горелик. «Почему пространство трехмерно?», М., 1982, стр.23
[5] Е.Я.Гик. «Математика на шахматной доске», М., «Наука», 1976, стр.31

Сравнивая отношение площадей квадратов *ACEF* и *ABCD*, известное нам из Евклидовой геометрии (Рис.1) и полученное в рамках элементарной топологии (Рис.2), не сложно заметить существенное различие. Для того, чтобы получить отношение квадратов *ACEF* и *ABCD* один к двум, квадрат *ACEF* (Рис.2) необходимо достроить до фигуры *A(CC′)E′(FF′)*, для краткости ее можно обозначить как *AC′E′F′*. Скажем сразу, что фигуры *ACEF* и *AC′E′F′* не являются привычными для нас квадратами, поэтому условимся называть квадрат *ABCD* *ортогональным* квадратом, а фигуры *ACEF* и *AC′E′F′* - *диагональным* и *мнимым диагональным* квадратом соответственно. Исходя из данных представлений, можно записать следующую формулу для отношения площадей *диагонального* квадрата *ACEF* к *ортогональному* квадрату *ABCD*:

(Sэ)ACEF = 2(Sэ)ABCD - (2n – 1) или $2n^2 - (2n - 1)$,

где *n* – число элементов стороны *ортогонального* квадрата *ABCD*.

Так, для *диагонального* квадрата *ACEF*, построенного по диагонали *ортогонального* квадрата *ABCD* со стороной *(э)AB* = 4 (Рис.2), будет справедливо равенство *(Sэ)ACEF* = $2 \cdot 4^2 - (2 \cdot 4 - 1) = 25$. Обратим внимание, что площадь полученного нами *диагонального* квадрата *(Sэ)ACEF*=25 совпадает с площадью некоторого *ортогонального* квадрата $x^2 = 5^2 = 25$. Они абсолютно равны по числу элементов.

Поэтому вполне естественно предположение, что извлечение квадратного корня из числа 2 на самом деле сводится к решению аналогичной задачи. То есть, к отысканию такого *диагонального* квадрата *ACEF*, который бы оказался равен некоторому *ортогональному* квадрату x^2. Так как мы рассматриваем десятичное значение $\sqrt{2}$ = 1,414213562…, то принципиальным отличием здесь будет выступать только то условие, что необходимый нам *диагональный* квадрат *ACEF* должен строиться по диагонали *конечного десятичного ортогонального* квадрата *ABCD*: 10^2, 100^2, 1000^2… и так далее, пока не найдется нужное значение. Используя формулу *(Sэ)ACEF = 2(Sэ)ABCD - (2x – 1)*, перейдем к рассмотрению площадей соответствующих *диагональных* квадратов *ACEF*, построенных по диагонали *конечных десятичных* квадратов *ABCD*:

$2 \cdot 10^2 - (2 \cdot 10 - 1) = 181$;

$2 \cdot 100^2 - (2 \cdot 100 - 1) = 19801$;

$2 \cdot 1000^2 - (2 \cdot 1000 - 1) = 1998001$ и т.д.

Извлекая квадратные корни из чисел 181, 19801, 1998001 и т.д., мы действительно будем приближаться к десятичному значению числа $\sqrt{2}$ = 1,414213562…

$\sqrt{181}$ = 13,453624…;

$\sqrt{19801}$ = 140,716026…;

$\sqrt{1998001}$ = 1413,506632…

Сравнивая эти приближения с десятичным значением $\sqrt{2}$, целая часть которого была увеличена на соответствующую им разрядность, мы обнаружим на каждом шаге приближения десятичный остаток:

14,142135… - 13,453624… = 0,688511…;

141,421356… - 140,716026… = 0,705330…;

1414,213562… - 1413,506632… = 0,707242…

Как видим, каждый шаг приближения дает в остатке число, все более точно приближающееся к значению десятичной дроби $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 0,707106781… Таким образом, если найдется конечное значение, необходимое для построения *диагонального* квадрата *ACEF* с заданными параметрами, то десятичная дробь, $\sqrt{2}$ = 1,414213562… окажется периодической:

$\sqrt{2}$ = 1,414_ 707_ 707_ (707_),

где нижнее подчеркивание _ обозначает недостающие члены конечной последовательности.

Действительно, если вернуться к нашим приближениям и их десятичным остаткам, соединив данные численные значения так, как будто они являются неразрывными последовательностями, а затем перенести запятую целых частей в положение после первой единицы и сравнить с оригинальным значением дроби 1,414213562…, то окажется, что десятичный остаток второго порядка будет также приближаться к значению десятичной дроби $\frac{\sqrt{2}}{2}$ = 0,707106781… (разумеется, с поправкой на разрядность, которую имели приближения):

1,4142135623730950488016887242097… - 1,3453624688511… = 0,0688510…;

1,4142135623730950488016887242097… - 1,40716026705330… = 0,00705329…;

1,4142135623730950488016887242097… - 1,413506632707242… = 0,00707240….

То есть вслед за первым периодом 707_ в дроби 1,414_ 707_707_(707_) должен следовать второй, точно такой же, за ним третий, четвертый и так далее до бесконечности. Как и в любой другой периодической десятичной дроби. Конечная последовательность 1414_, полученная с помощью элементарной топологии, приводит к образованию периода (707_), который, в свою очередь, при *десятичном* $n\to\infty$ задает необходимое бесконечное множество точек евклидовой диагонали квадрата со стороной, равной единице.

Десятичное исчисление квадратного корня из двух

Элементарная топология позволяет сделать предположение о том, что десятичная дробь √2 = 1,414213562… является периодической десятичной дробью, но этого, конечно же, недостаточно. Для того, чтобы данное предположение имело право на существование, требуется привести арифметическое обоснование такого подхода. В самом деле, если √2 является периодической десятичной дробью, то должен существовать такой способ записи, при котором десятичную дробь 1,414_ 707_707_(707_) можно представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m и n – целые числа, $n\neq0$. Воспользовавшись правилами перевода десятичных дробей в обыкновенные [6], перейдем к рассмотрению следующего выражения:

$$\frac{1414\_707\_-1414\_}{999\_000\_}=1{,}414\_\ 707\_707\_(707\_).$$

С помощью калькулятора выпишем квадраты чисел, образующихся в числителе дроби $\frac{m}{n}$ на каждом шаге приближения к конечному значению 1414_707_ − 1414_:

147-14=133; 133^2=17689;

14170-141=14029; 14029^2=196812841;

1414707-1414=1413293; 1413293^2=1997397103849;

141427071-14142=141412929; 141412929^2=19997616488359041;

14142170710-141421=14142029289; 14142029289^2=199996992410933845521 и т.д.

Порядок и разрядность в расположении цифр полученных приближений позволяют говорить о том, что в случае существования периода после возведения числителя 1414_707_ − 1414_ в квадрат, мы получим конечное целое число вида 199_700000_1000. Для наглядности еще раз выпишем значения, обозначив пробелами порядок, связанный с разрядностью каждого приближения:

133^2=1 76 89;

14029^2=19 6812 841;

1413293^2=199 739710 3849;

141412929^2=1999 76164883 59041;

14142029289^2=19999 6992410933 845521 и т.д.

---

[6] Е.С.Кочетков, Е.С.Кочеткова. «Алгебра и элементарные функции», М., изд. «Просвещение», 1966, Ч.I, стр.86.

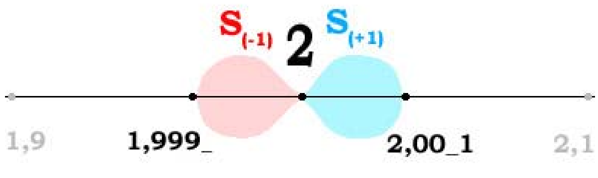
Итак, возведем отношение $\frac{m}{n}$ в квадрат и рассмотрим следующее выражение:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{(1414\_707\_-1414\_)^2}{999\_000\_^2} = \frac{199\_700000\_1000}{99\_800\_1000000} = 2{,}00\_1.$$

Как видим, вместо десятичной дроби 1,(9) мы получили число 2,00_1, которое можно признать лишь приближением к значению 2. Такой результат не соответствует нашими ожиданиями, потому что в **Теореме I** априорно не учитывается возможность применения десятичных дробей с периодом, отличным от (0) или (9). В самом деле, результат 2,00_1 не согласуется ни с результатом, который получается при возведении в квадрат отношения $\frac{m}{n}$ для квадратных чисел (например, $1(9)^2 = \frac{(19-1)^2}{9^2} = 4$), ни с результатом, который получается при возведении в квадрат отношения $\frac{m}{n}$ для десятичных дробей, период которых отличен от (0) или (9), (например, для числа $1{,}45(3)^2 = \frac{(1453-145)^2}{900^2} = 2{,}1121(7)$). И это вполне закономерно: ни тот, ни другой вид равенств не удовлетворяют всем условиям поставленной перед нами задачи, так как число 2 не является квадратным числом либо числом, которое можно представить в виде десятичной дроби с периодом, отличным от (0) или (9).

Разумеется, возникает вопрос, разве можно тогда говорить о тождестве квадрата десятичной дроби 1,414_ 707_707_(707_) и значения 2? Оказывается, можно, причем точно так же, как это делается при рассмотрении непериодической десятичной дроби 1,414…∞, когда допускается, что некоторая бесконечная операция $1{,}414\ldots\infty^2 = 1{,}(9)$ позволяет говорить о приближении к значению 2 и выполнении тождества с ним. Представление о десятичной дроби $\sqrt{2}$=1,414_707_707_(707_) тоже позволяет достигать тождества со значением 2 посредством бесконечного приближения. Принципиальная разница состоит в том, что для выполнения данного тождества указывается строго детерминированное значение одного из приближений, десятичная разрядность которого собственно и необходима для перехода к периоду бесконечной десятичной дроби 1,(9).

Всегда, когда в современной математике говорят о равенстве десятичных дробей с периодом (0) и соответствующих им десятичных дробях с периодом (9), упускается из вида важное следствие из данного равенства, выражаемое тождеством десятичных приближений с избытком и недостатком (Рис.3).



(Рис.3)

Так, для числа 2 будет справедлива запись:

1,99(9) =2,00…−0,00…1=2=2,00…+0,00…1=2,0(0)1

Правила перевода десятичных дробей в обыкновенные полностью выполняются для данных последовательностей с избытком и недостатком на сколь угодно большом шаге приближений:

$$1{,}99(9) = \frac{20\ldots-1-(2-1)}{9\ldots} = \frac{19\ldots-1}{9\ldots} = \frac{18\ldots}{9\ldots} = 2$$

$$2{,}0(0)1 = \frac{20\ldots+1-(2+1)}{9\ldots} = \frac{21\ldots-3}{9\ldots} = \frac{18\ldots}{9\ldots} = 2$$

Приняв значение 2,00_1 за одно из приближений с избытком к точке 2, выраженное отношением двух конечных целых чисел *m* и *n*, мы полностью избегаем логические затруднения, возникающие при попытках свести квадрат *непериодической* десятичной дроби к *периодическому* значению 1,(9). То, что мы получили одно единственное приближение 2,00_1 вместо, казалось бы, такой привычной для нас бесконечной периодической десятичной дроби 1,(9), полностью обусловлено строгими требованиями, предъявленными к дроби 1,414_707_707_(707_). С одной стороны, она должна быть дробью, период которой отличен от (0) или (9), иначе число 2 окажется квадратным числом. С другой стороны, ее квадрат должен задавать такое число, которое можно было бы представить в виде десятичной дроби с периодом (9). Поэтому, если бы квадратом дроби 1,414_707_707_(707_) можно было задать не одно приближение 2,00_1, а бесконечно много приближений, выразимых отношением целых чисел m и n, то мы бы пришли к одному из исключенных условием задачи вариантов. Либо число 2 оказалось бы представимо в виде десятичной дроби с периодом, отличным от (0) или (9), либо сама десятичная дробь 1,414_707_707_(707_) оказалась бы дробью с периодом (9). Ни то, ни другое недопустимо.

Мы нашли всего одно единственное приближение 2,00_1, выразимое отношением целых чисел m и n, и этого вполне достаточно для возможности выполнения бесконечного приближения к значению 2. Необходимость и достаточность существования одного такого приближения исходит из единственности значения 1,414_, стоящего до начала периода дроби 1,414_707_707_(707_) и приводящего после возведения в квадрат к появлению числа 1,99_800_1. Только в этом случае мы можем задать десятичную разрядность такого шага приближения, на котором возможно нахождение сколь угодно большого числа периодов (707_). Ничто не мешает извлекать квадраты из чисел 2,00_00_1; 2,00_00_00_1; 2,00_00_00_00_1 и т.д., находящихся на числовой прямой ближе к значению 2, и получать соответствующие приближения к значению бесконечной периодической десятичной дроби 1,414_707_707…; 1,414_707_707_707…; 1,414_707_707_707_707… и т.д. Хотя все эти извлечения уже не будут выражаться отношением целых чисел m и n, таких что $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. То же самое можно сказать о симметрично заданных приближениях с недостатком 1,999_999_; 1,999_999_999_; 1,999_999_999_999_ и т.д.

Иллюзия существования актуальной бесконечности (такие иллюзии, например, знаменитая апория Зенона об Ахиллесе и черепахе, были хорошо известны еще во времена античности), играет с человеческим разумом злую шутку, создавая впечатление, будто, рассматривая периодические десятичные дроби, мы на самом деле оперируем бесконечными величинами. Но в действительности мы всегда имеем дело лишь с конечными приближениями. Например, при возведении в квадрат дроби 1,(9) мы имеем:

$1{,}9^2 = 3{,}61$;

$1{,}99^2 = 3{,}9601$;

$1{,}999^2 = 3{,}996001$…

Даже полностью заполнив цифрами 32-разрядный калькулятор мы, разумеется, не получим десятичную дробь 3,(9): $1{,}9999999999999999999999999999999^2=3{,}9999999999999999999999999999996$…

Бесконечную десятичную дробь 3,(9), в периоде которой стояли бы только девятки, можно получить лишь на умозрительном калькуляторе с бесконечной разрядностью. Тем не менее, нет никаких сомнений в справедливости тождества $2^2=1{,}(9)^2=3{,}(9)=4$. Более того, мы нисколько не сомневаемся в существовании десятичной дроби 1,(9), даже учитывая то обстоятельство, что при извлечении квадратных корней из приближений к значению 3,(9) мы будем получать десятичные дроби, которые уже нельзя представить в виде отношения целых чисел:

$\sqrt{3{,}9}=1{,}9748417658131499017438461043723$…

$\sqrt{3{,}99}=1{,}9974984355438178915780382328058$…

$\sqrt{3{,}999}=1{,}9997499843730465697708029727336$…

То же самое можно сказать о десятичных дробях, период которых отличен от (0) или (9).

Итак, если существует геометрическое, арифметическое и логическое обоснование тождества √2=1,414_707_707_(707_), то разве можно просто взять и отбросить гипотезу периодичности? Отчего проистекает уверенность в том, что все возможные периоды бесконечных десятичных дробей можно непосредственно наблюдать на стандартном 32-разрядном калькуляторе?

Здесь необходимо отметить, что в случае с непериодической десятичной дробью 1,414…∞ получить последовательность 1(9), в которой оказались бы одни только девятки, вообще невозможно (даже на умозрительном калькуляторе с бесконечной разрядностью), так как это противоречит самому определению непериодической десятичной дроби. Действительно, бесконечное непериодическое десятичное значение может получиться лишь тогда, когда извлечение √2 удовлетворяет равенству $1{,}414...^2 = 1{,}999...a_1a_2a_3...$, где $a_1a_2a_3...$ – некая неопределенная последовательность, состоящая не только из девяток. Тогда и только тогда можно получить бесконечное непериодическое извлечение (в противном случае, извлечение должно быть либо конечным, либо периодическим). Из допущения о существовании актуальной бесконечности следует, что на бесконечно большом шаге приближения можно получить равенство $1{,}414…\infty^2$=1(9), то есть число 1,999…∞, в дробной части которого стоят одни только девятки. Но тогда бесконечно большой шаг приближения необходимо исключить из процесса извлечения √2 с получением непериодической десятичной дроби, потому что в рамках последовательной операции извлечения квадратного корня получение десятичной дроби с одними только девятками в дробной части противоречит основному правилу, в соответствии с которым было задано определение для получения непериодической десятичной дроби.

Таким образом, исключив бесконечно большой шаг приближения из процесса извлечения √2, окажется, что строгого равенства $1{,}414…\infty^2$=1(9) или $\sqrt{2}^2$ =2 не существует, либо оно должно получаться с использованием других правил извлечения, не тех, которые применяются нами для получения непериодической десятичной дроби.

Для разрешения данного логического противоречия в современной математике по отношению к десятичным дробям с периодом (9) действует формальное исключение, на котором не принято заострять внимания. Согласно этому исключению, все периодические десятичные дроби с периодом (9) не являются рациональными числами. [7] Хотя для них продолжают выполняться правила перевода десятичных дробей в обыкновенные, то есть они могут быть представлены в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m и n – целые числа, $n \neq 0$! Вряд ли такое введение «периодических десятичных дробей, не являющихся рациональными числами», может быть вполне удовлетворительным решением, так как в самой формулировке такого исключения из правил содержится явное логическое противоречие.

Наконец, осталось привести геометрическую интерпретацию полученных нами результатов, связанную с переходом от элементарной топологии к Евклидовой геометрии. Пусть целое число n элементов *ортогонального* квадрата стремится к бесконечности. Тогда разница диагонали AC и диагонали x квадрата, равновеликого *диагональному* квадрату $ACEF$, будет равна:

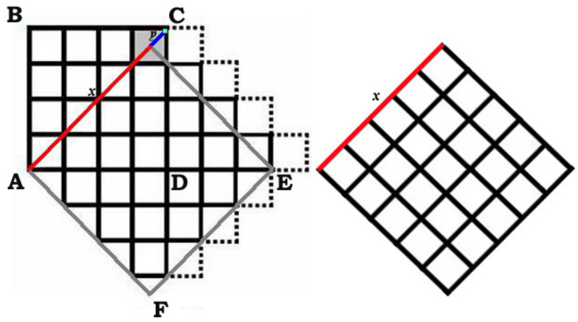
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2} - \sqrt{2n^2 - 2n - 1}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Действительно, разница $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ будет наблюдаться в построении *ортогональных* квадратов $ABCD$, состоящих из любого целого числа элементов, так что диагональ

---

[7] Е.С.Кочетков, Е.С.Кочеткова. «Алгебра и элементарные функции», М., изд. «Просвещение», 1966, Ч.I, стр.85.

заштрихованного элемента (Рис.4) при любом $n \neq 0$ будет разделена на две равные части. Теперь заметим, что существует такое разбиение *ортогонального* квадрата, при котором $S(э)ACEF = x^2$. Другими словами, повернув элементы нашего *диагонального* квадрата $ACEF$ на 45°, мы обнаружим, что сторона $x = AC - y$.



(Рис.4)

Решая пифагорейскую задачу, мы нашли *десятичный ортогональный* квадрат $S(э)ABCD$ = 1000_², такой что для него становится возможно построение *диагонального* квадрата $S(э)ACEF$=199_800_1=1414_²= x^2. Повернув этот *диагональный* квадрат на 45°, мы так же обнаружим, что $x = AC - y$.

Так как мы нашли *десятичный ортогональный* квадрат $S(э)ABCD$ = 1000_², то для заштрихованного элемента (Рис.4) станет возможно аналогичное разбиение на более мелкие клетки, число которых будет равно 1000_². Тогда для заштрихованного элемента найдется соответствующий *диагональный* квадрат 199_800_1=1414_²= x^2. А значит, найдется и еще более мелкий элемент, Евклидовая диагональ которого будет также разделена на две равные части. Для наглядности местоположение этого элемента обозначено светло-зеленой областью на диагонали AC (Рис.4). При этом окажется, что диагональная разница теперь будет определяться тождеством 1414_,707_= $AC - y'$.

Данный процесс разбиения каждого крайнего (заштрихованного) элемента можно продолжать до бесконечности. Тогда мы перейдем к дискретной решетке, состоящей из бесконечного числа элементов, диагональ которой будет задана числом 1414_,707_707_(707_). Так как число 1 можно представить в виде десятичной дроби с нулевым периодом 1,(0), то для единичного квадрата данное значение примет вид десятичной дроби 1,414_707_707_(707_).

Все, что было сказано об извлечении √2, можно отнести ко всем радикалам, несводимым к целым числам. Так, для любых несводимых радикалов второй степени описанный метод позволяет получить период, равный $\frac{x}{2}$, для несводимых радикалов третьей степени период, равный $\frac{x}{3}$, для несводимых радикалов четвертой, равный $\frac{x}{4}$, и т.д., где x – конечная последовательность, стоящая до начала периода десятичной дроби. Для большей убедительности приведем извлечение $\sqrt[3]{5}$. Куб для данного радикала будет находиться по формуле $5n^3$ - $(5n - 1)$, где n можно принять за число элементов стороны искомого десятичного куба, задающего последовательность, стоящую до начала периода. Получаем приближения:

√4951 = 17,043716779071499319794520257296…;

√4999501 = 170,99190595843849680244709982853…;

√4999995001 = 1709,9753767985232387909906145576…

Сравним полученные на каждом шаге приближения десятичные значения с оригинальным значением десятичной дроби $\sqrt[3]{5}$ = 1,7099759466766969893531088725429…, домноженным на разрядность взятых нами приближений:

17,099759466766969893531088725429… - 17,043716779071499319794520257296… = =0,05604268769547057373656846813…;

170,99759466766969893531088725429… - 170,99190595843849680244709982853… = 0,0056887092312021328637874257…;

1709,9759466766969893531088725429… - 1709,9753767985232387909906145576… = 0,000569878173750562118257985…

С поправкой на соответствующую разрядность каждое из полученных значений приближается к значению $\frac{\sqrt[3]{5}}{3}$ = 0,56999198222556566311770295751431… Выразив значение конечным целым числом, стоящим до начала периода, перейдем к периодической десятичной дроби $\sqrt[3]{5}$ = 1,709_569_569_(569). В чем можно убедиться, соединяя последовательности, образующиеся на каждом шаге рассмотренных приближений, так, как если бы они образовали непрерывную десятичную дробь, и сравнивая их с оригинальным значением $\sqrt[3]{5}$:

1,7099759466766969893531088725429… - 1,7043716 560426 = 0,00560426…

1,7099759466766969893531088725429… - 1,709919059 56887092 = 0,000056887092…

1,7099759466766969893531088725429… - 1,70997537679 5698781737 = 0,0000005698781737…

Парадоксы и перспективы фундаментальной науки

Изложенные выше доводы в пользу периодичности несводимых к целым числам радикалов не претендуют на необходимость срочного переписывания всех учебников по математике. Предложенное решение задачи Пифагора о соизмерении стороны и диагонали единичного квадрата открыто для всестороннего обсуждения. Но хочется обратить внимание, что оно основано исключительно на арифметических и геометрических закономерностях, а также правилах, которые не являются произвольным измышлением автора статьи. Тогда как в настоящее время используется представление, имеющее ряд недостатков, приводящих к логическим противоречиям.

Многочисленные парадоксы, обнаруженные в теории множеств Г.Кантора, практически с самого начала ее зарождения вызывали сомнения в корректности использованного в ней подхода. Д.Гилберт неоднократно говорил о недопустимости существования в основаниях математики логических парадоксов.[8] В 1904 году замечательный германский математик Цермело доказал возможность упорядочения любого множества, а в 1931 году К.Гёдель высказал предположение, что математика с набором существующих в ней аксиом вообще не может быть наукой, лишенной противоречий. Неоднократно критиковал диагональный метод Г.Кантора известный гарвардский физик П.Бриджмен.

Но, пожалуй, самым важным моментом в неутихающей дискуссии об основаниях математики стало доказательство несовместимости с законами логики теории бесконечных множеств Г.Кантора, приведенное российским математиком А.Зенкиным, обнаружившим, что в действительности рассуждения Г.Кантора строго математически доказывают отнюдь не актуальный (завершенный), а потенциальный характер бесконечности множества всех действительных чисел.[9] В самом деле, не смотря на различные способы упорядочения, любое действительное число можно представить в виде вполне упорядоченной последовательности. Не являются исключением и такие трансцендентальные знаменитости, как *π, φ, e,* и такие бесконечные последовательности, как 0,123456789… или 0,101001000… Более того, именно структурная упорядоченность

[8] Н.Я.Виленкин. «В поисках бесконечности», М., «Наука», 1983, стр.136
[9] А.А.Зенкин. «Ошибка Георга Кантора» // Вопросы философии, 2000, №. 2, стр. 165-168.

всех действительных чисел, носящая потенциальный характер, и только она, приводит к возможности выполнения для них общих правил и вычислительных операций.

Поскольку в доказательстве А.Зенкина не приводилось никакой альтернативной замены диагональному методу Г.Кантора, многие математики сочли такое доказательство неконструктивным. Действительно, если число √2 представлять в виде непериодической десятичной дроби, то для диагонали и стороны единичного квадрата должно устанавливаться взаимнооднозначное соответствие точек, причем этот процесс невозможно прервать на каком-либо шаге, а значит, тезис о существовании актуальной бесконечности, несмотря ни на что, будет оставаться в силе. Но гипотеза периодичности, изложенная в настоящей статье, как раз позволяет установить взаимнооднозначное соответствие точек диагонали и стороны единичного квадрата без использования тезиса о существовании актуальной бесконечности.

Затронутые нами вопросы при рассмотрении целого класса действительных чисел, помимо абстрактно-математической области, принципиально важны в области прикладной физики и компьютерного моделирования. Как известно, с иррациональными числами тесно связаны многие фундаментальные физические константы. С помощью числа √2 задается десятичная последовательность трансцендентального числа π. В этом можно убедиться, рассматривая известную формулу Ф.Виета:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$$

Либо при использовании формулы Рамануджана:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4\, 396^{4k}}$$

С числом √2 связано нахождение наиболее устойчивых состояний различных физических систем, инженерных конструкций, гармонических частот. Удачное сочетание в метрике элементарной топологии дискретных и непрерывных свойств как нельзя лучше подходит для моделирования на дискретной решетке пространства-времени движения квантов поля. Кто знает, насколько более сложные процессы можно изучить, насколько более точные устройства можно создать и как далеко можно заглянуть в глубины космоса, приступив к изучению упорядоченных бесконечных множеств? Ведь если более двух тысяч лет тому назад пифагорейцы и в самом деле допустили ошибку в одной из своих теорем, то в распоряжении науки окажутся такие инструменты познания, которые до сих пор никем никогда не использовались.

Список литературы

1. «Фрагменты ранних греческих философов» / ответ. ред. И.Д.Рожанский, М., изд. «Наука», 1989, Ч.I.
2. А.В.Волошинов. «Пифагор. Союз истины, добра и красоты», М., 1993.
3. Е.С.Кочетков, Е.С.Кочеткова. «Алгебра и элементарные функции», М., изд. «Просвещение», 1966, Ч.I.
4. Г.Е.Горелик. «Почему пространство трехмерно?», М., 1982.
5. Е.Я.Гик. «Математика на шахматной доске», М., «Наука», 1976.
6. Н.Я.Виленкин. «В поисках бесконечности», М., «Наука», 1983.
7. А.А.Зенкин. «Ошибка Георга Кантора» // Вопросы философии, 2000, №. 2.