УДК 517
ББК 22.16
Х91

Хренников А. Ю. **Неархимедов анализ и его приложения.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 216 с. — ISBN 5-9221-0191-9.

Предлагаемая монография представляет собой краткое введение в анализ над неархимедовыми числовыми полями и приложения этого анализа к теоретической физике (в частности, основам Q_p-значной квантовой механики), теории вероятностей и обработке изображений.

Для научных работников и студентов старших курсов, специализирующихся в функциональном анализе, теории обобщенных функций, теории вероятностей, теоретической физике (квантовой теории и космологии), обработке изображений, моделировании биологических процессов.

Научное издание

ХРЕННИКОВ Андрей Юрьевич

НЕАРХИМЕДОВ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Редактор *Н.Б. Бартошевич-Жагель*
Оригинал-макет: *М.В. Башевой*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 28.03.03. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,5. Уч.-изд. л. 14. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

ISBN 5-9221-0191-9
9 785922 101912

Отпечатано с диапозитивов
в РГУП «Чебоксарская типография № 1».
428019 Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 5-9221-0191-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Эта книга представляет собой краткое введение в анализ над неархимедовыми числовыми полями и приложения этого анализа к теоретической физике, теории вероятностей и обработке изображений. В каком-то смысле неархимедов подход к описанию природных явлений является альтернативным к стандартному подходу, основанному на вещественном анализе. Напомним, что поле вещественных чисел R является архимедовой числовой системой. В R выполняется аксиома Архимеда: *для любых двух положительных вещественных величин l и L можно найти такое натуральное число n, что имеет место неравенство*

$$(n-1)l \leqslant L < nL. \tag{1}$$

Наша книга посвящена анализу над полями, в которых аксиома Архимеда нарушается.

По существу, аксиома Архимеда — это аксиома физической теории измерений. В силу этой аксиомы всегда возможно измерить любую величину L с помощью другой величины l (выбранной в качестве единицы измерения) с точностью, не меньшей, чем l, см. неравенство (1). В большинстве естественно-научных моделей считается, что такое предположение о возможности измерений обоснованно. Это влечет практически повсеместное использование вещественных чисел и анализа. Напомним, что поле вещественных чисел R и производное от него поле комплексных чисел C являются основными примерами архимедовых числовых полей.

Хорошо известным (и популярным 10–25 лет назад) примером неархимедового числового поля является поле нестандартных чисел $^*R$. Это расширение поля вещественных чисел R, содержащее бесконечно малые и бесконечно большие величины. В силу присутствия бесконечно малых и бесконечно больших величин аксиома Архимеда в поле нестандартных чисел $^*R$ нарушается. Заметим, что поле нестандартных чисел широко использовалось в математической физике. Например, Серджио Альбеверио пытался решить проблему квантовополевых расходимостей используя нестандартные числа.

Но эта книга посвящена отнюдь не анализу над $^*R$ (нестандартному анализу). Основными примерами неархимедовых полей, рассматриваемых в этой книге, являются поля p-адических чисел Q_p, где $p \geqslant 2$ простые числа. Напомним, что каждое простое число определяет некоторое локально компактное поле. Поля, соответствующие различным простым числам, например Q_2 и Q_{1999}, не изоморфны. Поля p-адических чисел неархимедовы. Более того, Q_p вообще не является упорядоченным множеством, т. е. мы не можем сравнить два произвольных p-адических числа.

Начиная с работ В.С. Владимирова и И.В. Воловича (1984) по неархимедовому супераназизу поля p-адических чисел Q_p являются базовыми примерами неархимедовых числовых полей, используемых в теоретической физике. Фундаментальная роль, которую играют p-адические числа при описании различных естественно-научных явлений, обусловливается тем, что природа устроена неожиданно просто с теоретико-числовой точки зрения. Стартуя с поля рациональных чисел Q, мы можем получить либо поле вещественных чисел R, либо одно из полей p-адических чисел Q_p (теорема Островского). Поэтому, если считать «физическими числами» только рациональные числа, то существует ровно две возможности развивать математические модели на основе рациональных физических данных. Это архимедовы вещественные модели и неархимедовы p-адические модели. Третьего не дано.

Заметим, что «физичность» рациональных чисел (и только этих чисел) довольно очевидна. В любом физическом эксперименте может быть достигнута только конечная точность, т. е. мы можем оперировать только с числами, имеющими конечное число знаков (десятичных или, например, двоичных). Это рациональные числа.

Вещественное описание естественно-научных моделей продолжается уже несколько лет. Довольно естественно (даже с общефилософской точки зрения) попробовать использовать p-адическое описание, находя модели, в которых аксиома Архимеда нарушается. Одной из первых p-адических физических моделей была модель p-адической струны (Волович, 1987). Основой этой модели была гипотеза о том, что в микромире (на так называемых планковских расстояниях $\sim 10^{-34}$ см) аксиома Архимеда может нарушаться. Работа Воловича вызвала целую волну публикаций по p-адическим струнам (Фрейнд, Виттен, Олсон, Фрамптон, Паризи, Владимиров, Маринани, Арефьева, Драгович, ...).

Эта деятельность стимулировала развитие многих других p-адических физических моделей, например моделей квантовой механики и теории поля, а в последствии и теории p-адических динамических систем с приложениями к наукам о мышлении (начиная с работ Хренникова, 1996).

Заметим, что есть две основные группы квантовых p-адических моделей. В моделях обеих групп предполагается, что пространство имеет неархимедову структуру и описывается p-адическими числами, $X = Q_p^n$.

В моделях первой группы предполагается, что волновые функции (амплитуды вероятности) по-прежнему (как и в стандартной квантовой механике) принимают комплексные значения, φ: $Q_p^n \to C$. В моделях второй группы рассматриваются волновые функции, принимающие значения в полях p-адических чисел или в алгебраических расширениях (как конечного, так и бесконечного порядков) полей Q_p, φ: $Q_p^n \to Q_p$ или C_p. Здесь символ C_p используется для обозначения поля комплексных p-адических чисел. Квантовые p-адические модели с комплекснозначными волновыми функциями являются весьма специальными, но стандартными квантовыми моделями. Рассмотрение таких моделей не требует пересмотра стандартного квантового формализма. В частности, состояния реализуются векторами в обычном комплексном гильбертовом пространстве. Хотя, конечно, использование поля p-адических чисел в качестве координатного пространства существенно усложняет построения. Одной из основных проблем p-адических квантовых моделей с комплекснозначными волновыми функциями является отсутствие представления Шредингера. Здесь нельзя ввести операторы координаты $\hat{q}$ и импульса $\hat{p}$. Формальным математическим препятствием является невозможность определить производную отображения из Q_p в R или C, φ: $Q_p \to R$, C. Таким образом, в этих моделях можно, как и в стандартной квантовой механике, описать динамику волновой функции, но, в принципе, нельзя описать динамику операторов координаты $\hat{q}(t)$ или импульса $\hat{p}(t)$.

Последовательное изложение p-адической квантовой механики для комплекснозначных волновых функций можно найти в монографии В.С. Владимирова, И.В. Воловича и Е.И. Зеленова (1994).

В p-адических квантовых моделях с Q_p-значными волновыми функциями мы не можем использовать идеологию стандартной квантовой механики. Основной проблемой, возникающей при рассмотрении Q_p-значных амплитуд, является невозможность использования стандартной (Колмогоров, 1933) теории вероятностей. Возникает необходимость построения обобщенных вероятностных моделей (неколмогоровских моделей) с Q_p-значными вероятностями. С другой стороны, большим достоинством этого класса квантовых p-адических моделей является существование аналога представления Шредингера. Здесь мы можем ввести операторы p-адических координаты и импульса, $\hat{q}$ и $\hat{p}$. Однако эти операторы действуют в p-адическом гильбертовом пространстве, где «скалярное произведение» принимает p-адические значения. В отличие от стандартной квантовой механики, операторы p-адических координаты и импульса являются ограниченными. Они удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям. Другим важным отличием от стандартного квантового формализма является наличие неэквивалентных представлений канонических коммутационных соотношений в p-адических гильбертовых пространствах. Заметим, что в стандартной квантовой теории неэквивалентные представления существуют только в случае бесконечного числа степеней свободы — теории квантовых полей.

Квантовые p-адические модели с p-адическизначными волновыми функциями развивались А.Ю. Хренниковым с 1989 года (впоследствии в тесном сотрудничестве с С. Альбеверио и Р. Чианчи). Предлагаемая монография посвящена математическим основам Q_p-значной квантовой механики.

В первой главе приводятся основные сведения о p-адических числах, причем рассматривается сразу общий случай числовых полей с неархимедовым абсолютным значением. Напомним, что абсолютное значение называется неархимедовым, если, кроме обычного неравенства треугольника $|c| \leqslant |a| + |b|$, оно удовлетворяет так называемому усиленному неравенству треугольника ($|c| \leqslant \max(|a|, |b|)$). Как мы уже отмечали, в силу теоремы Островского поля p-адических чисел Q_p — это единственные примеры неархимедовых числовых полей, получаемых пополнением поля рациональных чисел Q.

Усиленное неравенство треугольника для неархимедова абсолютного значения приводит к тому, что соответствующая метрика является ультраметрикой. Ультраметрические топологические пространства были введены в 1943 году французским математиком Краснером [1].

Ультраметрические топологические пространства обладают очень специальными топологическими свойствами. Наша стандартная геометрическая интуиция, развитая на основе евклидовой геометрии, оказывается практически бессильной в ультраметрическом случае.

Ультраметричность является основой развития анализа над неархимедовыми числовыми полями. По существу, в конкретных аналитических рассмотрениях мы никогда не используем непосредственно нарушение аксиомы Архимеда. Однако усиленное неравенство треугольника используется практически повсюду. Итак, первая глава представляет собой элементарное введение в анализ над неархимедовыми полями — ультраметрический анализ.

Вторая глава посвящена теории аналитических обобщенных функций со значениями в неархимедовых полях («ультрараспределениям»). Использование пространств основных функций, состоящих из аналитических функций, вызвано «патологическими» свойствами гладких функций. Здесь, например, существуют очень сложные гладкие функции с производной, которая тождественно равна нулю. Для аналитических функций таких патологий не возникает. Хотя, конечно, поведение многих стандартных аналитических функций существенно отличается от поведения над полями вещественных или комплексных чисел. Например, экспонента, а также синус и косинус не являются целыми аналитическими функциями. Теория обобщенных функций

---

[1] Заметим, что поля p-адических чисел были введены в 1888 году немецким математиком Гензелем, который был в основном заинтересован алгебраическими свойствами этих полей. Попытка опубликовать статью о p-адических числах привела к конфликту с Дирихле, который в течение почти 10 лет задерживал публикацию статьи.

используется для определения гауссовских и фейнмановских интегралов. Заметим, что введение даже гауссовских интегралов представляет собой серьезную проблему из-за отсутствия K-значной меры Хаара (аналога линейной меры Лебега) на неархимедовом поле K. Я ввожу гауссовские интегралы, используя трюк, предложенный в (обычном вещественном) бесконечномерном анализе для определения функциональных интегралов на математическом уровне строгости (С. Альбеверио и Р. Хоэг-Крон, О. Смолянов и Е. Шавгулидзе, А. Хренников). Этот трюк состоит в использовании преобразования Фурье и равенства Парсеваля в рамках теории обобщенных функций для определения функционального интеграла. Мне удалось использовать этот трюк в неархимедовом (конечномерном) случае. Более того, это дало возможность ввести K-значное распределение (не являющееся мерой) Хаара на K с помощью следующей весьма «извращенной» процедуры: $dx = e^{x^2}\nu(dx)$, где ν — гауссовское распределение.

Глава 3 посвящена бесконечномерному неархимедову анализу. В частности, здесь вводятся неархимедовы функциональные интегралы. Эта глава очень технична. Я рекомендую пропустить ее при первом чтении.

Глава 4 содержит формализм квантовой механики с волновыми функциями, принимающими значения в неархимедовых полях. Здесь также изучаются эволюционные уравнения, возникающие в квантовых моделях. Например, уравнение Шредингера. Заметим, что мы рассматриваем эволюцию относительно неархимедова времени. Кардинальным отличием от стандартных физических (как квантовых, так и классических) моделей является отсутствие порядковой структуры на множестве моментов неархимедова времени. Рассмотрение такой эволюции нуждается в дальнейшем физическом осмыслении и интерпретации.

Глава 5 посвящена аксиоматике неколмогоровских вероятностных моделей, в которых вероятности принимают значения в неархимедовых полях. Наибольший интерес представляют Q_p-значные вероятности. Такие обобщения теории вероятностей Колмогорова были мотивированы развитием квантовых моделей с неархимедовозначными (и, в частности, Q_p-значными) волновыми функциями. Неархимедовы вероятностные модели представляют и самостоятельный интерес. В частности, мы рассматриваем использование p-адической схемы Бернулли для описания катаклизмов; ситуаций типа: «хорошо, хорошо, ..., катастрофа». В частности, мы рассматриваем p-адическую стохастическую модель вымирания биологической популяции, динамика развития которой является «вполне благополучной» с точки зрения стандартной (колмогоровской) теории вероятностей.

Глава 6 посвящена p-адическому расширению частотной теории вероятностей Р. фон Мизеса (1919). Основная идея состоит в использовании p-адической метрики для изучения статистической стабилизации относительных частот событий. Заметим, что частоты $\nu_N = n/N$ всегда являются рациональными числами (как и любые другие результаты физических измерений).

Глава 7 посвящена некоторым аспектам теории p-адических случайных процессов. В частности, мы развиваем исчисление p-адического белого шума. Заметим, что предлагаемая теория базируется на неколмогоровских p-адических вероятностях. Эту теорию следует отличать от традиционных исследований по теории стандартной колмогоровской вероятности на локально-компактных группах (и, в частности, полях p-адических чисел). Глава 7 весьма технична и при первом чтении может быть опущена.

Глава 8 посвящена использованию p-адических чисел при обработке изображений. Эти результаты были получены совместно с Ж. Бенуа и Н. Котовичем. Рассматриваются два класса p-адических алгоритмов обработки изображений: в спектральной области и в координатном представлении. В алгоритмах первого класса мы в основном используем ультраметрическую топологию на спектрах изображений, а в алгоритмах второго класса — алгебраическую структуру поля p-адических чисел. Одним из интересных нововведений, используемых в алгоритмах второго класса, является введение p-адической системы координат в физическом пространстве.

Основные части этой книги были написаны в период моих странствий по разным странам: в Японии, Китае, Италии, Франции, Германии. Мне хотелось бы поблагодарить всех ученых, поддерживавших меня в этот трудный период. Пользуясь случаем, я выражаю глубокую благодарность Т. Хиде, С. Альбеверио, Р. Чианчи, М. Эндо, В. Шихову, А. Эскассуту, Л. Геритцену, Ж. Паризи, Л. Аккарди, К. Перез-Гарсиа, Л. Ван-Хамме.

Я также благодарен Екатерине Борзистой за огромный труд по подготовке рукописи книги, внимание и постоянную поддержку.

Мой интерес к p-адике был вызван лекциями, прочитанными В.С. Владимировым и И.В. Воловичем на конференции по комплексному анализу в Ташкенте (1989). Я глубоко благодарен им за многочисленные дискуссии, обсуждения и поддержку.

Менделеево–Генуя–Нагойя–Бохум–Пекин–Ухань–Токио–Клермон/Ферранд–Сантандер–Наймеген–Векше

Глава 1. ПЕРВЫЕ ШАГИ К НЕАРХИМЕДОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

Введение было посвящено наиболее важным аспектам неархимедовой (в частности, p-адической) математики и обсуждению основных понятий, которые будут использоваться в последующих главах. Нам нет необходимости излагать неархимедову математику в виде последовательности строгих доказательств всех получаемых результатов. Поэтому мы рассмотрим только те доказательства, которые будут нам необходимы в дальнейших исследованиях. Читатель, желающий изучить этот предмет более подробно, сможет сделать это, например, с помощью книг Малера [97] и Шихова [106]. Малер рассматривал неархимедовы поля с точки зрения теории чисел: цифры, разложения, алгебраические операции, алгоритмы этих операций. Исследования Шихова полезны с точки зрения неархимедова анализа. Полагаю, что книги этих авторов наиболее доступны для начинающих изучать неархимедову математику.

§ 1.1. Неархимедовы числовые поля

В дальнейшем везде символом K будем обозначать полное неархимедово поле с нетривиальной абсолютной величиной $|\cdot|_K$. В этой книге мы будем рассматривать только случай, когда характеристика K равна нулю.

Пусть F — поле. Абсолютная величина (в некоторой литературе просто *норма*) — это отображение $|\cdot|\colon F \to R_+$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$|x|_F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \tag{1.1}$$

$$|xy|_F = |x|_F \cdot |y|_F, \tag{1.2}$$

$$|x+y|_F \leqslant |x|_F + |y|_F. \tag{1.3}$$

Последнее неравенство хорошо известно как неравенство треугольника. Абсолютная величина является неархимедовой, если выполняется усиленное неравенство треугольника

$$|x+y|_F \leqslant \max(|x|_F, |y|_F). \tag{1.4}$$

Поле F с неархимедовой абсолютной величиной называется неархимедовым полем. Абсолютная величина является неархимедовой тогда и только тогда, когда $|n|_F \leqslant 1$ для всех элементов n из кольца, порожденного в поле F его единичным элементом. Это следует из усиленного неравенства треугольника (1.4).

Таким образом, если l и L — два ненулевых элемента, принадлежащих K, таких, что $|l|_K < |L|_K$, то невозможно найти такое натуральное n, что $|nl|_K > |L|_K$. С другой стороны, если l и L — два элемента, принадлежащих R, то всегда можно найти такое натуральное n, что $|nl| > |L|$, где $|\cdot| \equiv |\cdot|_R$ — обычная абсолютная величина в R. Вот почему мы можем рассматривать усиленное неравенство треугольника (1.4) как одну из возможных математических реализаций неархимедовой аксиомы теории измерений (см. введение).

Замечание 1.1. В случае, когда характеристика поля K равна нулю, множество натуральных чисел можно считать подмножеством множества K. Данное утверждение верно и для множества рациональных чисел Q. В дальнейшем будем считать Q подполем поля K.

Напомним, что абсолютная величина $|\cdot|_F$ на поле F называется тривиальной, если $|x|_F = 1$ для всех $x \neq 0$.

Абсолютная величина на поле F — это гомоморфизм мультипликативной группы F^* в мультипликативную группу R^*. Пусть Γ — образ K относительно этого гомоморфизма. Тогда Γ является подгруппой в R^*. Для скалярной величины $R \in \Gamma$ мы обозначим символом a_R любой элемент поля K, для которого $|a_R|_K = R$.

Любая абсолютная величина порождает метрику. Полнота поля K — это полнота относительно этой метрики, $\rho_K(x, y) = |x - y|_K$. Если абсолютная величина на K является неархимедовой, то соответствующая ей метрика имеет много необычных свойств, которые будут обсуждаться в следующем разделе.

Поле p-адических чисел Q_p — один из наиболее важных примеров неархимедовых полей. Также как и поле действительных чисел R, это поле является пополнением поля рациональных чисел Q. Но вместо обычной абсолютной величины, нормы, мы будем использовать так называемую p-адическую норму $|\cdot|_p$. Здесь p — это фиксированное простое число, $p = 2, 3, \ldots$ Для каждого p можно построить собственное поле Q_p. Достаточно определить $|\cdot|_p$ на множестве натуральных чисел. Представим натуральное n в виде произведения множителей $n = 2^{\nu_2} 3^{\nu_3} \ldots p^{\nu_p} \ldots$, где $\nu_j = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда по определению $|n|_p = p^{-\nu_p}$ (знак минус играет важную роль при доказательстве неравенства (1.4)). Таким образом, если натуральное число n делится на p^{ν_p}, то $|n|_p = p^{-\nu_p}$. Более того, мы полагаем $|0|_p = 0$. Если $x = n/m$, где n и m натуральные числа, то по определению $|x|_p = |n|_p/|m|_p$.

Например, $|3|_2 = 1$, $|4|_2 = 2^{-2}$, $|3/2|_2 = 2$, а $|3|_3 = 3^{-1}$, $|4|_3 = 1$, $|3/2|_3 = 3^{-1}$. В частности, если рациональное число представлено в виде $x = n/m$, где n и m целые числа, которые не делятся на p, то $|x|_p = 1$. Таким образом, p-адическое расстояние между точками в пространстве Q существенно отличается от действительного расстояния.

Говорят, что абсолютные величины $|\cdot|_\alpha$ и $|\cdot|_\beta$ эквивалентны, если $|x|_\alpha = |x|_\beta^c$, $c \in R$, $c > 0$.

Теорема 1.1 (Островского). Любая нетривиальная абсолютная величина на поле Q эквивалентна либо действительной $|\cdot|$, либо одной из p-адических $|\cdot|_p$.

В неархимедовом случае функция $1/|n!|_K$ возрастает. Позже нам понадобится оценка этого роста. Приведем эту оценку для поля Q_p:

$$(1/np)p^{n/(p-1)} \leqslant \frac{1}{|n!|_p} \leqslant p^{(n-1)/(p-1)}.$$

Используя теорему Островского, получаем, что $|x|_K = |x|_p^l$, $p = p(K)$, $l = l(K) > 0$. Это влечет экспоненциальную оценку

$$a^n \leqslant \frac{1}{|n!|_K} \leqslant b^n, \tag{1.5}$$

где $a = a(p,l)$ и $b = b(p,l)$, для любого неархимедового поля K. Мы будем использовать асимптотику $1/|n!|_K \sim p^{nl/(p-1)}$ для больших n.

Усиленное неравенство треугольника имеет много полезных следствий.

Теорема 1.2 (мечта плохого студента). Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in K$, сходится в K тогда и только тогда, когда $a_n \to 0$, $n \to \infty$.

Для доказательства этой теоремы нам необходимо применить теорему Коши для полных метрических пространств.

Например, ряд

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^n + \ldots$$

сходится в Q_p, так как $|p^n|_p = p^{-n} \to 0$, $n \to \infty$. Сумма ряда вычисляется по обычному правилу, как предел конечных сумм: $S = 1/(1-p)$.

Следующее утверждение также является следствием усиленного неравенства треугольника. Оно будет очень полезно при некоторых оценках и вычислениях.

Утверждение 1.1. Пусть x, $y \in K$. Тогда из неравенства $|x|_K \neq |y|_K$ следует, что $|x+y|_K = \max(|x|_K, |y|_K)$.

§ 1.2. Ультраметрики

Пусть $|\cdot|_K$ — неархимедова абсолютная величина. Рассмотрим $\rho_K(x,y) = |x-y|_K$. Легко показать, что это метрика. Используя усиленное неравенство треугольника для абсолютной величины, получаем, что $\rho_K(x,y) \leqslant \max|\rho_K(x,z), \rho_K(z,y)|$, x, y, $z \in K$.

Интересно рассмотреть общие метрические пространства X, для которых вместо стандартного неравенства треугольника

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y), \quad x,y,z \in K,$$

выполняется усиленное неравенство треугольника

$$\rho(x, y) \leqslant \max[\rho(x, z), \rho(z, y)], \quad x, y, z \in K.$$

Такие метрики называются ультраметриками, а соответствующие метрические пространства ультраметрическими. Усиленное неравенство треугольника имеет следующий геометрический смысл: *длина любой стороны треугольника не больше, чем наибольшая из длин двух других сторон.* Таким образом, в ультраметрическом пространстве все треугольники являются равнобедренными.

Обсудим основные свойства ультраметрического пространства X. Полагаем: $U_r(a) = \{x \in X : \rho(x - a) \leqslant r\}$ и $U_r^-(a) = \{x \in X : \rho(x - a) < r\}$, $r \in R_+$, $a \in X$. Это шары радиуса r с центром в точке a. Интуиция подсказывает нам, что $U_r(a)$ — замкнутый шар, а $U_r^-(a)$ — открытый. Но ситуация в ультраметрических пространствах более интересна.

Утверждение 2.1. Любой шар в пространстве X является одновременно как открытым, так и замкнутым. Любая точка шара может служить центром. Шар может иметь бесконечно много радиусов.

Доказательство. Конечно, $U_r^-(a)$ открытый, а $U_r(a)$ замкнутый шары. Теперь докажем, что $U_r(a)$ является также и открытым шаром. Пусть $b \in U_r(a)$. Покажем, что $U_r(b) \subset U_r(a)$ (это намного больше, чем нужно для доказательства того, что шар $U_r(a)$ открытый). Используя усиленное неравенство треугольника, получаем, что если $x \in B_r(b)$, то $\rho(x, a) \leqslant \max[\rho(x, b), \rho(b, a)]$, тогда $x \in U_r(a)$, т. е. $U_r(b) \subset U_r(a)$. Теперь несложно доказать (используя симметрию), что $U_r(b) = U_r(a)$ и, следовательно, любая точка b шара $U_r(a)$ является его центром.

Множества, которые являются одновременно как замкнутыми, так и открытыми, будут играть важную роль в наших дальнейших исследованиях. Для обозначения таких множеств будет использоваться термин *замкнуто-открытые* (*clopen*).

Утверждение 2.2. Пусть U и V — два шара в пространстве X. Тогда существуют только две возможности:

1) шары включаются друг в друга (т. е. $U \subset V$ или $V \subset U$);

2) шары не пересекаются.

Доказательство. Если бы ни одно из этих утверждений не было верным, то мы могли бы найти элементы $a \in U \cap V$, $x \in U \backslash V$, $y \in V \backslash U$. Тогда точка a была бы центром как U, так и V, и $\rho(y, a) > \rho(x, a)$ при $x \in U$ и $y \notin U$; $\rho(x, a) > \rho(y, a)$ при $y \in V$ и $x \notin V$, что противоречит условию.

Утверждение 2.3. Пусть G — непустое открытое подмножество множества X. Тогда существует разбиение G на шары. Более того, для $r_1 > \ldots > r_n > \ldots > 0$ G можно покрыть непересекающимися шарами вида $U_{r_n}(a_n)$, $a_n \in X$.

Для доказательства данного утверждения достаточно использовать предыдущее утверждение 2.2.

Напомним, что топологическое пространство Y называется *вполне несвязным*, если только пустое множество и одноточечные множества $\{a\}$ связны (множество O является связным, если $O = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ влечет $A = \varnothing$ или $B = \varnothing$, где A и B замкнуто-открытые множества).

Утверждение 2.4. Ультраметрическое пространство X является вполне несвязным.

Доказательство. Для любого $a \in X$ связная компонента T точки a содержится в каждой замкнуто-открытой окрестности a. Но в X существует базис замкнуто-открытых окрестностей. Следовательно, $T = \{a\}$.

Топологическое пространство Y имеет *нулевую размерность*, если для любого $a \in Y$ и любой окрестности U точки a существует замкнуто-открытое подмножество V такое, что $a \in V \subset U$. Нетрудно заметить, что *любое ультраметрическое пространство X имеет нулевую размерность.*

Функция $f\colon X \to K$ является непрерывной, если для любых $a \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для $x \in X$: $\rho(x,a) < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(a)|_K < \varepsilon$. Далее, мы будем часто использовать тот факт, что множество O является замкнуто-открытым тогда и только тогда, когда его (K-значная) характеристическая функция $\phi_0(x)$, определенная как $\phi_0(x) = 1$ для $x \in O$ и $\phi_0(x) = 0$ для $x \notin O$, является непрерывной.

Обозначим символом $S_r(a)$ сферу $\{x \in X\colon \rho(x,a) = r\}$ радиуса $r \in R_+$ с центром в точке a. В ультраметрическом случае сфера $S_r(a)$ не является границей шаров $U_r^-(a)$ и $U_r(a)$. Можно доказать, что граница шара пуста (см. утверждение 2.1.).

§ 1.3. Поля p-адических чисел

Мы начинаем рассмотрение свойств поля Q_p с проблемы представления p-адических чисел в виде рядов по степеням p. Любое положительное действительное число a может быть записано в виде десятичной дроби:

$$a = \ldots + \frac{a_{-k}}{10^k} + \ldots + \frac{a_{-1}}{10} + a_0 + a_1 \cdot 10 + \ldots + a_n \cdot 10^n = \\ = a_n \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-k} \ldots, \qquad (3.1)$$

где a_j могут принимать только десять значений: 0, 1, …, 9. Это разложение единственно, за исключением случая, когда после конечного числа членов в десятичном разложении все последующие a_k равны 9. Так, например,

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots = 1 = 1 + \frac{0}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \ldots,$$

и мы имеем два разложения для одного и того же числа 1. Десятичное представление может быть обобщено. Если $m > 1$ любое фиксированное целое число, то любое положительное действительное число a может быть записано в виде

$$a = \ldots + \frac{a_{-k}}{m^k} + \ldots + \frac{a_{-1}}{m} + a_0 + a_1 m + \ldots + a_n m^n = \\ = a_n \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-k} \ldots, \quad (3.2)$$

где a_k принимают значения $0, 1, \ldots, m-1$. Это разложение единственно, за исключением опять же случая, когда все a_k для достаточно больших k равны $m-1$. Таким образом, здесь существует второе представление, в котором начиная с некоторой позиции все числа равны нулю. Поэтому

$$\sum_{k=f}^{\infty} (m-1) \cdot m^{-k} = m^{-f+1} + \sum_{k=f}^{\infty} 0 \cdot m^{-k}.$$

Положительные целые числа могут быть записаны в базисе m как конечные суммы:

$$a = a_0 + a_1 m + \ldots + a_n m^n. \quad (3.3)$$

Более общие суммы

$$a = \frac{a_{-k}}{m^k} + \ldots + \frac{a_{-1}}{m} + a_0 + a_1 m + \ldots + a_n m^n \quad (3.4)$$

представляют собой отношение положительных целых чисел и степеней m. Они являются рациональными. Известно, что действительное число a является рациональным тогда и только тогда, когда его *m-адичное разложение является периодичным.*

Похожая ситуация имеет место для p-адического случая (на некоторое время мы ограничимся рассмотрением случая простого основания $m = p$, а общий случай будет разобран позднее). Любое p-адическое число a можно представить в виде дроби:

$$a = \frac{a_{-f}}{p^f} + \ldots + \frac{a_{-1}}{p} + a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n + \ldots = \\ = a_{-f} \ldots a_{-1}, a_0 a_1 \ldots a_n \ldots, \quad (3.5)$$

где $a_j = 0, 1, \ldots, p-1$. Это разложение схоже с представлением действительного числа в виде дроби, но отличается от действительного случая неограниченностью в направлении возрастания степеней p и ограниченностью в направлении их убывания.

Условимся писать p-адическое разложение в форме (3.5). Нет принципиальной разницы в порядке написания натуральных чисел и отношений (3.4) для действительного случая (3.2) и для p-адического случая (3.5). Число (3.3) записывается в виде $a_n \ldots a_0$ в соответствии с вещественным представлением (3.2). И то же самое число (3.3) записывается в виде $0,\, a_0 \ldots a_n$ в соответствии с p-адическим разложением (3.5).

Идея доказательства (3.5) проста. Во-первых, каждый из рядов (3.5) сходится в Q_p, так как $|p^n|_p = p^{-n} \to 0$, $n \to \infty$. Это разложение единственно, так как p-адическая норма нуля равна нулю.

Чтобы показать обратное, мы используем тот факт, что любое p-адическое число a является пределом последовательности рациональных чисел $\{u_i\}$. Если $|a|_p = p^{-f}$, то $\lim\limits_{i\to\infty} |u_i|_p = p^{-f}$. Но так как степени p^{-f} не имеют других предельных точек, кроме 0 и ∞, то может существовать только конечное число членов в последовательности $\{u_i\}$ с $|u_i|_p \neq p^{-f}$. Этими значениями можно пренебречь для $\{u_i\}$, не изменяя предела и, следовательно, можно суммировать $|u_i|_p = p^{-f}$ уже по всем i. Поэтому все u_i имеют вид $u_i = p^f \dfrac{r_i}{s_i}$, где r_i и $s_i > 0$ — целые числа такие, что $(r_i,\, s_i) = 1$ (не имеют общих делителей) и не делятся на p.

Далее, несложно доказать, что любое рациональное число c такого типа может быть представлено в виде

$$c = c_f p^f + c_{f+1} p^{f+1} + \ldots + c_{N+1} p^{N+1} + p^N (t_N / q_N), \tag{3.6}$$

где коэффициенты c_k являются цифрами и $(p, q_N) = 1$. Целое число N может быть выбрано сколь угодно большим.

Для завершения доказательства достаточно показать фундаментальность последовательности $\{u_i\}$. Фундаментальность означает, что для больших i цифры в разложении (3.6) для $\{u_i\}$ не зависят от i.

Наиболее простым способом реализации p-адических вычислений является использование канонических разложений этих чисел. Операция деления осуществляется как умножение. Если мы хотим получить $x = a/b$, то нам нужно представить a, b и x в виде (3.5) (последний с неопределенными коэффициентами), и решать шаг за шагом бесконечную систему уравнений, порожденную уравнением $xb = a$. На компьютере p-адические вычисления реализуются гораздо быстрее, чем вещественные.

Мы будем использовать каноническое разложение p-адических чисел как основу для статистического моделирования над полями p-адических чисел.

Как и в действительном случае, *p-адическое число рационально, если его каноническое разложение периодично.* Этот факт будет чрезвычайно важен в наших физических исследованиях при получении ответа на вопрос о рациональности p-адических результатов. Можно будет рассматривать эти p-адические результаты как точные физические значения. Но это сложная проблема теории чисел даже для простейших случаев. Например, из оценки (1.5) следует, что ряд

$$1 + 2! + \ldots + n! + \ldots$$

сходится в любом Q_p. Но нам ничего не известно о значении этой суммы. Мы не знаем, является ли эта сумма рациональным числом. Были предприняты попытки с помощью компьютерных исследований найти периодичность в каноническом разложении (в частности, мои студенты пытались сделать это). Но периодичность ни для какого p не была найдена.

Заметим, что сходимость в Q_p эквивалентна стабилизации цифр в каноническом разложении (3.5). Этот факт будет использоваться в теории с p-адическизначными вероятностями для нахождения статистической стабилизации в Q_p.

Единичный шар $U_1(0)$ будет играть важную роль в дальнейших рассуждениях. В теории чисел Z_p — стандартное обозначение, используемое для $U_1(0)$. Из усиленного неравенства треугольника следует, что Z_p — аддитивная подгруппа Q_p. Более того, это кольцо. Оно называется *кольцом целых p-адических чисел.* Использование такого термина имеет следующую мотивировку. Если натуральное число разложить в канонический ряд (3.5) = (3.3), то данное разложение не будет содержать отрицательных степеней p. Это справедливо и для элементов Z_p.

Мы не будем начинать запись канонического разложения целых p-адических чисел с нуля: $a = 0, a_0 a_1 \ldots$ В случаях, когда очевидно, что мы рассматриваем только Z_p, намного удобнее писать $a = a_0 a_1 \ldots$

Замечание 3.1. Каноническое разложение отрицательного целого числа можно представить в виде бесконечного ряда. Например, пусть $p = 2$, тогда

$$-1 = 1/(1 - 2) = 1 + 2 + 2^2 + \ldots = 111\ldots$$

Кольцо Z_p содержит также рациональные дробные числа. Например,

$$1/3 = 1 + 2 + 2^3 + 2^5 + \ldots = 110101\ldots$$

в Q_2.

Пусть A — подмножество множества K и число $b \in K$. Символом bA обозначим множество $\{x \in K\colon x = ba,\ a \in A\}$. Нетрудно заметить, что $p^n Z_p = U_{p^{-n}}(0)$. Эти множества в дальнейшем будут нам полезны.

И в заключение заметим, что топология Q_p (как и любого неархимедова поля K) является вполне несвязной и имеет нулевую размерность. По определению поле Q_p является полным и сепарабельным.

Утверждение 3.1. Кольцо p-адических целых чисел Z_p является компактом.

Доказательство. Пусть

$$\{x^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n = a_0^k \ldots a_n^k \ldots\}_{k=1}^{\infty} \tag{3.7}$$

последовательность в Z_p. Покажем, что эта последовательность сходится. Так как существует только конечное число возможностей для a_0^k (а именно $0, 1, \ldots, p-1$), то мы можем найти такие $b_0 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ и подпоследовательность последовательности $\{x^k\}$, что для элементов этой подпоследовательности первая цифра в (3.7) равна b_0. Повторим данную процедуру для второй цифры подпоследовательности и т. д. Доказательство завершается с помощью стандартной диагональной процедуры.

Утверждение 3.2. Множество натуральных чисел всюду плотно в кольце целых p-адических чисел.

Для доказательства этого свойства используется каноническое разложение.

Следствие 3.1. Поле Q_p локально компактно.

При анализе процедуры измерения будут также использоваться обобщения p-адических чисел. Это так называемые *m-адические числа.* m — это любое фиксированное натуральное число, $m > 1$. Заметим, что m-адические числа определяются так же, как и p-адические. В поле рациональных чисел Q вводится понятие m-адической псевдонормы $x \to |x|_m$. Если n натуральное число, то его можно представить в виде $n = m^r k$, где k и m взаимнопростые. Полагаем $|n|_m = m^{-r}$ (обычным способом эту псевдонорму можно продолжить на Q). Отличие от p-адического случая состоит в том, что для $|\cdot|_m$ не выполняется условие (1.2), если m не является простым числом. Например, пусть $m = 4$, тогда $|2|_4 = 1$, но $|2 \times 2|_4 = 1/4 \neq |2|_4|2|_4$. Вместо условия (1.2) в общем случае выполняется более слабое условие

$$|xy|_m \leqslant |x|_m |y|_m.$$

Такая функция называется *псевдонормой.* Пополнение поля рациональных чисел Q по отношению к метрике, соответствующей псевдонорме $|\cdot|_m$, и есть поле m-адических чисел Q_m. Каноническое разложение (3.5) в этом случае выглядит аналогично (если заменить p на m в (3.5); цифры принадлежат множеству $\{0,\ 1,\ \ldots,\ m-1\}$). Это каноническое разложение также единственно, в отличие от действительного случая. С его помощью реализуются алгебраические операции на Q_m. Нетрудно показать, что Q_m является кольцом. Но существуют проблемы с операцией деления.

Пример 3.1. Пусть $m = 6$. Можно найти два 6-адических числа вида $a = 2a_1a_2a_3\ldots$ и $b = 3b_1b_2b_3\ldots$ таких, что $ab = 0$. Можно шаг за шагом разрешить бесконечную систему уравнений относительно

a и b. Например, после трех шагов мы получим, что $a = 2101\ldots$ и $b = 3120\ldots$

Таким образом, если m — простое число, то в Q_m существуют делители нуля. Вот почему *это не поле, а только кольцо.*

Аналогично вводится и понятие кольца целых m-адических чисел Z_m. Это компакт, и множество целых чисел всюду плотно в Z_m. По определению кольцо Q_m является полным и сепарабельным. Его метрика является ультраметрикой. Q_m — вполне несвязное топологическое пространство размерности нуль.

Обратим внимание на случай, когда $m = p^r$, $r = 1, 2, \ldots$ — степень простого числа. Заметим, что любое каноническое m-адическое разложение можно рассматривать как разложение p-адического числа. С другой стороны, любое p-адическое разложение можно переписать как m-адическое. Поэтому Q_{p^r} и Q_p — совпадающие множества. Легко заметить, что их топологии эквивалентны. Таким образом, $Q_{p^r} = Q_p$. Данный результат можно обобщить. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ простые и различные, и пусть $m = p_1^{r_1}\ldots p_k^{r_k}$ и $l = p_1^{s_1}\ldots p_k^{s_k}$, где $r_1, \ldots, s_k$ — положительные целые числа. Повторив предыдущие рассуждения, получим $Q_m = Q_l$ (как топологические кольца). Таким образом, *рассмотрение всех m-адических пополнений можно свести к случаю, когда $m = p_1\ldots p_k$ есть произведение одного или нескольких различных простых чисел.* Следующая теорема была доказана К. Гензелем.

Теорема 3.1. Пусть $p_1, \ldots, p_k$ — это k простых различных чисел и $m = p_1\ldots p_k$. Тогда кольцо Q_m является прямой суммой p-адических полей Q_{p_i}:

$$Q_m = Q_{p_1} \oplus \ldots \oplus Q_{p_k}.$$

Отметим, что, если $p \neq q$, то p-адические поля Q_p и Q_q не изоморфны. Поле действительных чисел R не изоморфно любому Q_p.

Для нас важным также является и тот факт, что невозможно определить структуру частичного порядка $\geqslant$ на Q_p, удовлетворяющую условиям (i) $1 \geqslant 0 \geqslant -1$; (ii) если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, тогда $a + b \geqslant 0$; (iii) если $a_n \geqslant 0$ для всех n и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тогда $a \geqslant 0$.

Например,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nn! = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n! - \sum_{n=1}^{\infty} n! = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)! - \sum_{n=1}^{\infty} n! = -1$$

для любого Q_p.

§ 1.4. Расширения неархимедовых полей

1.4.1. Структура квадратичных расширений и алгебраических замыканий неархимедовых полей. Как известно, поле комплексных чисел C является квадратичным расширением поля действительных чисел R

на основе уравнения $x^2 + 1 = 0$: $C = R(i)$, $i = \sqrt{-1}$, $z = x + iy$, x, $y \in R$. В этом случае возникает достаточно простая алгебраическая структура, так как данное квадратичное расширение является в то же время и алгебраическим замыканием поля действительных чисел (полиномиальное уравнение любого порядка всегда имеет решение в C).

В p-адическом случае алгебраическая структура не так проста. Во-первых, в отличие от действительного случая, квадратичное расширение не единственно. Если $p = 2$, то существуют семь квадратичных расширений, а если $p \neq 2$, то три. Таким образом, если рассмотреть фиксированное квадратичное расширение $Q_p(\sqrt{\tau})$ поля Q_p, то существуют такие p-адические числа, для которых невозможно вычислить квадратный корень в $Q_p(\sqrt{\tau})$. Все квадратичные расширения не являются алгебраически замкнутыми. И, более того, расширения любого конечного порядка не являются алгебраически замкнутыми. Алгебраическое замыкание поля Q_p строится как бесконечная цепь расширений конечного порядка. Вот почему оно является бесконечномерным векторным пространством над Q_p и не является полным полем. Поэтому нам нужно рассмотреть пополнение данного поля. Это станет завершающим шагом наших долгих рассуждений, так как в этом случае полнота влечет алгебраическую замкнутость поля. Обозначим это поле через C_p. В литературе оно называется полем комплексных p-адических чисел.

Но возникают проблемы при использовании C_p как поля комплексных p-адических чисел в физических приложениях. Известно, что в обычной квантовой механике большую роль играет автоморфизм inv: $C \to C$, $z \to \bar{z}$. Поле действительных чисел инвариантно по отношению к действию этого автоморфизма. Следовательно, инвариантно и выражение $|z|^2 = z\bar{z}$, которое рассматривается в квантовой механике в качестве вероятности. Этот автоморфизм связан с зарядом квантовой частицы. Под действием автоморфизма изменяется знак заряда частицы. В квантовой теории поля автоморфизм соответствует симметрии частица $\to$ *античастица*. Вероятность является инвариантом автоморфизма inv. Как следствие этого в квантовой физике имеет место симметрия частиц и античастиц. Естественно, нам необходимо иметь аналог автоморфизма inv в p-адическизначной квантовой механике.

Но такого автоморфизма инволюции inv_p: $C_p \to C_p$ не существует. Самое простое решение — использовать квадратичное расширение Q_p с аналогом автоморфизма комплексного сопряжения. В основном мы будем использовать некоторое квадратичное расширение Q_p как основу физической модели. Наряду с этим мы будем использовать C_p для описания некоторых квантовых моделей в случаях, когда можно обойтись без инволюции.

Предположим, что квадратное уравнение $x^2 - \tau = 0$, $\tau \in K$, не имеет решений в поле K. Будем использовать символ Z для обозначения квадратичного расширения $K(\sqrt{\tau})$ поля K. Элементы Z можно представить в виде $z = x + \sqrt{\tau}y$, x, $y \in K$; операция сопряжения: $\bar{z} = x - \sqrt{\tau}y$; абсолютную величину на Z обозначим $|\cdot|_K$; по определению $|z|_K = \sqrt{\left||z|^2\right|_K}$. Здесь используется аналог евклидового квадрата длины $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 - \tau y^2$. Все значения этой величины принадлежат полю K (а значения абсолютного значения $|\cdot|_K$ принадлежат полю действительных чисел).

1.4.2. Квадраты в поле p-адических чисел. В квантовой механике и теории поля нас, главным образом, будет интересовать p-адический случай. Поэтому мы рассмотрим его более подробно.

Используя каноническое разложение p-адического числа $x \neq 0$, мы можем записать его в виде $x = p^m\varepsilon$, где $|\varepsilon|_p = 1$ и m — целое число. Если x — квадрат p-адического числа $y = p^m\varepsilon_0$, $|\varepsilon_0|_p = 1$, то $m = 2k$ и $\varepsilon = \varepsilon_0^2$. Поэтому для описания всех квадратов в Q_p достаточно описать все элементы ε, $|\varepsilon_p| = 1$, которые являются квадратами, $\varepsilon = \varepsilon_0^2$.

Теорема 4.1. Пусть $p \neq 2$. p-адическое число $\varepsilon = c_0 + c_1p + \ldots$ $\ldots + c_2p^2 + \ldots$, $c_i = 0, \ldots, p-1$, $c_0 \neq 0$, является квадратом тогда и только тогда, когда c_0 является квадратичным вычетом по модулю p.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \eta^2$ и $\eta = b(\operatorname{mod} p)$, где b — целое число. Тогда $c_0 = b^2(\operatorname{mod} p)$. С другой стороны, пусть $c_0 = b^2(\operatorname{mod} p)$. Рассмотрим многочлен $F(x) = x^2 - \varepsilon$. Получаем: $F(b) = 0(\operatorname{mod} p)$ и $F'(b) = 2b \neq 0(\operatorname{mod} p)$. Используя аналог метода Ньютона (см. Приложение), получаем, что существует такое $\eta \in Z_p$, что $F(\eta) = 0$ и $\eta = b(\operatorname{mod} p)$. Таким образом, $\varepsilon = \eta^2$, и теорема доказана.

Следствие 4.1. Если $p \neq 2$, то любой элемент ε такой, что $\varepsilon = 1(\operatorname{mod} p)$, является квадратом в Q_p.

Рассмотрим мультипликативную подгруппу Q_p^* поля Q_p и множество $Q_p^{*2} = \{u = v^2\colon v \in Q_p^*\}$ всех квадратов в Q_p^*.

Следствие 4.2. Если $p \neq 2$, то индекс $(Q_p^*\colon Q_p^{*2})$ равен 4.

Доказательство. Действительно, если $|\varepsilon|_p = 1$ и ε не квадрат, то отношение любых двух чисел из $(1, \varepsilon, p, \varepsilon p)$ не является квадратом в Q_p. С другой стороны, несложно доказать, что любое ненулевое p-адическое число можно представить в виде произведения чисел $(1, \varepsilon, p, \varepsilon - p)$ и квадрата.

Например, рассмотрим случай $p = 3$. Тогда 3-адическое число $x \neq 0$ является квадратом, если

$$x = 3^{2k}(1 + c_1 3 + c_2 3^2 + \ldots).$$

В частности, не существует $\sqrt{2}$ в поле Q_3. Выберем $\varepsilon = 2$ и четыре числа (1, 2, 3, 6) из предыдущего следствия. Очевидно, что любое 3-адичное число x можно представить в виде произведения одного из этих чисел и квадрата. Достаточно рассмотреть случай $|x|_3 = 1$. Если

x не квадрат, то $x = 2 + c_1 3 + c_2 3^2 + \ldots = 2(1 + c_1' 3 + c_2' 3^2 + \ldots) = 2w$, где w — квадрат.

Существуют 3 различных расширения поля Q_p при $p \neq 2$. Это $Q_p(\sqrt{\varepsilon})$, $Q_p(\sqrt{p})$, $Q_p(\sqrt{\varepsilon \cdot p})$. В частности, если $p = 3$, мы можем выбрать следующие реализации: $Q_3(\sqrt{2})$, $Q_3(\sqrt{3})$, $Q_3(\sqrt{6})$. Если $p = 5$, то не существует квадратного корня для $\varepsilon_1 = 2$ и $\varepsilon_2 = 3$. Значит, можно выбрать поля $Q_5(\sqrt{2})$, $Q_5(\sqrt{5})$, $Q_5(\sqrt{10})$ в качестве квадратичных расширений Q_5. Существует и другая возможность выбора, а именно поля $Q_5(\sqrt{3})$, $Q_5(\sqrt{5})$, $Q_5(\sqrt{15})$. Однако заметим, что $3 = 2(3/2) = 2(4 + 2 \cdot 5 + \ldots + 2 \cdot 5^n + \ldots) = 2v$, где $v = w^2$, и $\sqrt{3} = \sqrt{2} w$. Поэтому $Q_5(\sqrt{2}) \cong Q_5(\sqrt{3})$ и $Q_5(\sqrt{10}) \cong Q_5(\sqrt{15})$.

Теперь остановимся на случае $p = 2$.

Теорема 4.2. Пусть $p = 2$; 2-адичное число ε, $|\varepsilon|_2 = 1$, является квадратом тогда и только тогда, когда $\varepsilon = 1 (\mathrm{mod}\, 8)$.

Доказательство. Необходимость является следствием того, что квадрат нечетного числа всегда сравним с $1 (\mathrm{mod}\, 8)$. С другой стороны, рассмотрим многочлен $F(x) = x^2 - \varepsilon$. Тогда $F(1) = 0 (\mathrm{mod}\, 8)$ и $F'(1) = 2 \neq 0 (\mathrm{mod}\, 4)$. Снова применяем теорему 2.1 Приложения (при $\delta = 1$).

Следствие 4.2. Индекс $(Q_2^*\colon Q_2^{*2})$ равен 8.

Доказательство. Единичная сфера $S_1 \equiv S_1(0)$ является мультипликативной подгруппой в Q_2^*. Пусть S_1^2 — подгруппа квадратов в S_1. На основании теоремы 4.2. получаем, что множество чисел $A = (1, 3, 5, 7)$ представляет собой классы вычетов S_1/S_1^2. Чтобы доказать это, достаточно показать, что любой элемент $x \in S_1$ можно представить в виде $x = au^2$, $a \in A$, $u \in S_1$. В случае, когда $x = a + x_3 \cdot 2^3 + \ldots$, где $a \in A$, получаем $x = a(x/a)$. Но $1/3 = 11(01)$, $1/5 = 1011(011)$, $1/7 = 111(011)$. В данном каноническом разложении скобки используются для обозначения периода. Следовательно, если $a = 3$, то $x/3 = 100x_3\ldots$ является квадратом; если $a = 5$, то $x/5 = 100x_3\ldots$ является квадратом; а если $a = 7$, то $x/7 = 100x_3\ldots$ Поэтому существует $\sqrt{x/a}$. Если мы присоединим к множеству A произведения $2 \cdot 1$, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7$, то получим полную систему, представляющую собой классы вычетов Q_2^* по отношению к Q_2^{*2}.

Нас будут интересовать (при изучении проблемы квантования) квадратные корни из $x = -1$ в Q_p. Обозначим один из этих корней i_p (другой равен $-i_p$). Используя теоремы 4.1 и 4.2, несложно показать, что этот корень существует в Q_p при $p = 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, см. также [17]. Например, если $p = 5$, то $i_5 = 21213423032204132404\ldots$ (здесь использовалось каноническое разложение p-адических целых чисел из § 1.3).

1.4.3. Поле комплексных p-адических чисел C_p. Мы будем использовать не только квадратичные разложения, но и поле комплексных p-адических чисел C_p. Чтобы построить это поле, рассмотрим алгебраическое замыкание Q_p^a поля Q_p (минимальное расширение Q_p, где любой многочлен $p(x)$ с p-адическими коэффициентами имеет корень).

Существует единственное продолжение нормы $|\cdot|_p$ с Q_p на Q_p^a. Мы нигде не будем использовать конкретную форму этого продолжения $|\cdot|_p$. Поэтому нас не интересует процедура продолжения. Для обозначения p-адической нормы на Q_p^a будем также использовать символ $|\cdot|_p$. Но здесь возникают новые трудности. Метрическое пространство Q_p^a не является полным. Пополнение C_p поля Q_p^a называется *полем комплексных p-адических чисел*. Это алгебраически замкнутое поле.

1.4.4. Представление p-адических чисел в виде $a = x^2 - \tau y^2$. Сигнум-функция в поле p-адических чисел. Теперь обсудим следующую проблему. Пусть $Z = Q_p(\sqrt{\tau})$ – фиксированное квадратичное расширение Q_p. Нас интересуют те элементы $a \in Q_p$, которые можно представить в виде $a = |z|^2 = z\bar{z} = x^2 - \tau y^2$. Полезно изучить более общую проблему представления

$$a = x^2 - \alpha y^2, \tag{4.1}$$

где α — произвольное p-адическое число, $\alpha \neq 0$. Обозначим множество всех таких ненулевых чисел H_α. Это множество является мультипликативной группой. Действительно, если $b = x^2 - \alpha y^2$ и $b_1 = x_1^2 - \alpha y_1^2$, то

$$bb_1 = (xx_1 + \alpha yy_1)^2 - \alpha(xy_1 + yx_1)^2, \quad b^{-1} = \left(\frac{x}{b}\right)^2 - \alpha\left(\frac{y}{b}\right)^2.$$

Теорема 4.3. Если α является квадратом в Q_p, то $H_\alpha = Q_p^*$. Если α не является квадратом в Q_p, то индекс $(Q_p^* : H_\alpha) = 2$.

Доказательство теоремы см. в [17].

Пусть теперь τ — фиксированный элемент, не являющийся квадратом. Введем функцию $\operatorname{sign}_\tau(x) = 1$ при $x \in H_\tau$ и $\operatorname{sign}_\tau(x) = 0$ при $x \notin H_\tau$. Она является естественным обобщением обычной сигнум-функции (функции знака) на R (если мы представим эту функцию с помощью квадратичного расширения C). Так как H_τ является мультипликативной подгруппой Q_p^* с индексом 2, то sign_τ является мультипликативной функцией на Q_p^*: $\operatorname{sign}_\tau(ab) = \operatorname{sign}_\tau(a)\operatorname{sign}_\tau(b)$.

§ 1.5. Нормированные и локально выпуклые пространства

Пусть E — линейное пространство над K. *Неархимедова норма* на E — это отображение $||\cdot||_p$: $E \to R_+$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|_K \|x\|, \lambda \in K$,

3) $\|x+y\| \leqslant \max(\|x\|, \|y\|)$.

Если $\|\cdot\|$удовлетворяет условиям (2) и (3), то $\|\cdot\|$ — *неархимедова преднорма*. Обычным образом определим неархимедово банахово пространство B как полное нормированное пространство над K. Метрика $\rho(x,y) = \|x-y\|$ является ультраметрикой. Следовательно, любое неархимедово банахово пространство является вполне несвязным пространством размерности нуль. Все шары $U_r(a) = \{x \in B : \|x-a\| \leqslant r\}$ и $U_r^-(a) = \{x \in B : \|x-a\| < r\}$, $r \in R_+$, $a \in B$ являются замкнуто-открытыми множествами. Сопряженное пространство B' определим как пространство K-линейных функционалов l: $B \to K$. Введем норму на B':

$$\|l\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|l(x)|_K}{\|x\|}.$$

Пространство B' с данной нормой является банаховым. В теории распределений мы будем использовать простое обобщение теоремы 1.2:

Теорема 5.1. Пусть B — неархимедово банахово пространство. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in B$ сходится в B тогда и только тогда, когда $a_n \to 0$, $n \to \infty$.

Доказательство вытекает из усиленного неравенства треугольника.

Если топология на K-линейном пространстве E задается системой неархимедовых преднорм, то E называется неархимедовым локально выпуклым пространством. Окрестность точки a имеет вид $U_{\alpha,r}(a) = \{x \in E : \|x-a\|_\alpha \leqslant r\}$, $r \in R_+$, где $\|\cdot\|_\alpha \in P_E$ — одна из преднорм, определяющая топологию на E. Множество таких преднорм обозначено через P_E. В частности, последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства E сходится к $x \in E$, если $\|x-x_n\|_\alpha \to 0$, $n \to \infty$ для любой $\|\cdot\|_\alpha \in P_E$. Обычным образом определим пространство Фреше E как локально выпуклое пространство, в котором топология эквивалентна метрической топологии и которое полно относительно этой метрической топологии. Пополнение локально выпуклого пространства E является пространством Фреше в том и только в том случае, когда его топология определяется счетной системой преднорм $\{\|\cdot\|_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Неархимедовы банаховы локально выпуклые алгебры вводятся обычным образом (операция умножения является непрерывной). Если B — банахова алгебра, то выполняется следующее неравенство: $\|ab\| \leqslant C\,\|a\| \cdot \|b\|$; если E — локально выпуклая алгебра, то для любой преднормы $\|\cdot\|_\alpha \in P_E$ существует такая преднорма $\|\cdot\|_\beta \in P_E$, что выполняется неравенство $\|ab\|_\alpha \leqslant C\,\|a\|_\beta \cdot \|b\|_\beta$.

Замечание 5.1. Как мы знаем, для действительного случая локально выпуклое пространство является топологическим векторным пространством, в котором существует фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из выпуклых множеств. Существование такой системы окрестностей эквивалентно существованию фундаментальной системы, состоящей из абсолютно выпуклых уравновешенных (convex balanced) подмножеств. Для неархимедового случая понятие абсолютной выпуклости более естественно, чем понятие выпуклости. Множество $A \subset E$ абсолютно выпукло, если $\lambda x + \mu y \in A$ для x, $y \in A$; λ, $\mu \in K$, $|\lambda|_K$, $|\mu|_K \leqslant 1$. Имеет место обычное соответствие между абсолютно выпуклыми подмножествами неархимедового линейного пространства E и неархимедовыми преднормами. Пространство E является локально выпуклым тогда и только тогда, когда существует фундаментальная система окрестностей, состоящая из абсолютно выпуклых подмножеств. Неархимедова теория абсолютно выпуклых пространств рассматривается в [86, 90–92]. Далее мы будем описывать топологии только с помощью преднорм.

Замечание 5.2. В вещественной теории абсолютно выпуклые компактные подмножества в локально выпуклых пространствах играют важную роль. В неархимедовом случае попытка прямого обобщения ведет к различным патологическим примерам. Поэтому вводится новый класс объектов — компактоидов [91, 92].

Простейшим примером неархимедового банахова пространства является пространство $K^n = K \times \ldots \times K$ (n раз) с неархимедовой нормой $\|x\| = \max\limits_{1<j<n} |x_j|_K$.

§ 1.6. Непрерывные, дифференцируемые и аналитические функции

1.6.1. Локально постоянные функции. Пусть множество $O \subset K$. Символом $C(O) \equiv C(O, K)$ обозначим K-линейное пространство непрерывных функций $f\colon O \to K$. Символом $C_b(O) \equiv C_b(O, K)$ обозначим подпространство, состоящее из ограниченных функций. На $C_b(O)$ введем норму $\|f\| = \sup\limits_{x\in O} |f(x)|_K$. Это неархимедово банахово пространство. Если O — компакт, то $C(O) = C_b(O)$ и для $f \in C(O)$ получаем: $\|f\| = \max\limits_{x\in O} |f(x)|_K$.

В неархимедовом случае непрерывные функции могут быть равномерно приближены локально постоянными функциями.

Пусть $O \subset K$. По определению функция $f\colon O \to K$ является локально постоянной, если для любых $x \in O$ существует такая окрестность U точки x, что f постоянна на $U \cap O$.

Подмножество $U \in O$ называется относительно открытым, замкнутым, замкнуто-открытым, ..., если оно является открытым, замкнутым, замкнуто-открытым, ... относительно топологии на O, индуцированной из K. Характеристическая (K-значная) функция $\phi_{U,O}(x)$ относительно замкнуто-открытого подмножества $U \subset O$ (определенная как $\phi_{U,O}(x) = 1$ при $x \in U$ и $\phi_{U,O}(x) = 0$ при $x \in O\backslash U$) является локально постоянной. Если функция $f\colon O \to K$ локально постоянна, то множество O может быть представлено в виде разбиения с помощью системы относительно замкнуто-открытых множеств U_i, где i принадлежит некоторому множеству индексов, а функция f постоянна на U_i для любого i. Локально постоянные функции являются непрерывными. Локально постоянные функции на O образуют K-линейное подпространство пространства $C(O)$.

Утверждение 6.1. Пусть $O \subset K$ и $f \in C(O)$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует локально постоянная функция $g\colon O \to K$, для которой $|f(x) - g(x)|_K < \varepsilon$ для всех $x \in O$. Ограниченные локально постоянные функции образуют всюду плотное подпространство пространства $C_b(O)$.

Доказательство. Нам нужно доказать только первое утверждение. Соотношение эквивалентности $\sim$ на O определяется следующим образом: $x \sim y$, если $|f(x) - f(y)|_K < \varepsilon$. Это соотношение эквивалентности, для которого классы эквивалентности $U_i (i \in I)$ относительно замкнуты. Для каждого $i \in I$ выбираем элемент $a_i \in U_i$ и задаем функцию $g\colon O \to K$ уравнением $g(x) = f(a_i)$ для $x_i \in U_i$, $i \in I$. Тогда g постоянна на любом U_i и $|f(x) - g(x)|_K < \varepsilon$ для всех $x \in O$.

1.6.2. Аппроксимация многочленами. Непрерывные функции мы можем приближать с помощью полиномиальных функций $q(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k x^k$, где $a_k \in K$. Следующая теорема будет играть важную роль в теории неархимедовозначного интегрирования и в теории вероятностей. Доказательство этой теоремы нигде в дальнейшем не будет использоваться, поэтому читателю достаточно ознакомиться только с формулировкой.

Теорема 6.1 (Капланского). Пусть T — компактное подмножество множества K и пусть $f \in C(T)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует полиномиальная функция $q\colon K \to K$ такая, что на T выполняется неравенство $|q(x) - f(x)|_K < \varepsilon$.

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что достаточно решить эту проблему для локально постоянной функции f. В силу компактности существует такое $\delta \in (0,1)$, что функция f постоянна на каждом из шаров подмножества T радиуса δ. Поэтому можно предположить, что f — это характеристическая функция шара (в T), имеющего радиус δ. Не нарушая общности можно допустить, что $0 \in T$, $f(0) = 1$. Выберем $c_1, \ldots, c_m \in T$ такие, что $T \subset U_\delta(0) \cup U_\delta(c_1) \cup \ldots \cup U_\delta(c_m)$, где шары (в K) попарно не пересекаются и $|c_1|_K \leqslant |c_2|_K \leqslant \ldots \leqslant |c_m|_K$. Тогда $\delta < |c_1|_K$. Выберем натуральное число s такое, что $(\delta / |c_1|_K)^s < \varepsilon$. По индукции мы найдем такие целые

$n_1, \ldots, n_m$, что полиномиальная функция

$$q(x) = \prod_{j=1}^{m} (1 - (c_j^{-1}x)^s)^{n_j}$$

даст решение проблемы. Покажем, что $|q(x) - 1|_K < \varepsilon$ для $x \in U_\delta(0)$ и $|q(x)|_K < \varepsilon$ для $x \in U_\delta(c_1) \cup \ldots \cup U_\delta(c_m)$. Пусть сначала $x \in U_\delta(0)$. Тогда $[1 - (c_j^{-1}x)^s] \in U_\varepsilon(1)$ для всех j. Так как $U_\varepsilon(1)$ — мультипликативная группа (по крайней мере, для $\varepsilon < 1$), то $q(x) \in U_\varepsilon(1)$, т. е. $|q(x) - 1|_K < \varepsilon$. Данный результат не зависит от выбора $n_1, \ldots, n_m$. Пусть теперь $x \in U_\delta(c_i)$ для некоторых $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда $|x - c_i|_K \leqslant \delta$ и $|x|_K = |c_i|_K$. Отсюда

$$\left|1 - c_j^{-s}x^s\right|_K \leqslant \max(1, |x/c_j|_K^s) \leqslant |c_i/c_j|_K^s \quad (j < i),$$

$$\left|1 - c_i^{-s}x^s\right|_K \leqslant \left|1 - c_i^{-1}x\right|_K \leqslant \delta\left|c_i^{-1}\right|_K \leqslant \delta\left|c_1^{-1}\right|_K,$$

$$\left|1 - c_j^{-s}x^s\right|_K \leqslant \max(1, |x/c_j|_K^s) \leqslant 1 \quad (j > i).$$

Для того чтобы удовлетворить неравенству $|q(x)|_K < \varepsilon$, нам необходимо, чтобы

$$|c_i/c_1|_K^{sn_1} |c_i/c_2|_K^{sn_2} \ldots |c_i/c_{i-1}|_K^{sn_{i-1}} (\delta/|c_1|_K)^{n_i} < \varepsilon.$$

Если $n_1, \ldots, n_{i-1}$ уже выбраны, то всегда можно найти такое n_i, чтобы данные неравенства выполнялись, поскольку $\delta/|c_1|_K < 1$.

Теорема Капланского справедлива для любого K. Тогда как классическая теорема Вейерштрасса о приближении не верна в случае замены R на C. Если K — локально компактное поле, в частности $K = Q_p$, то теорему Капланского можно применять для шаров $T = U_r(a)$.

1.6.3. Дифференцируемые функции с нулевой производной. Производная определяется стандартным образом. Пусть W открытое подмножество множества K и $a \in W$. Функция $f\colon W \to K$ называется дифференцируемой в точке a, если существует производная

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Функция f называется дифференцируемой на множестве W, если она дифференцируема в любой точке $a \in W$. Основное отличие от архимедова случая (полей R или C) состоит в существовании функций, которые не являются постоянными или локально постоянными и в то же время имеют нулевую производную.

П р и м е р 6.1. Построим отображение $f\colon Z_p \to Z_p$, имеющее нулевую производную. Для $x = a_0 + \ldots + a_n p^n + \ldots \in Z_p$ полагаем

$$f(x) = a_0 + a_1 p^2 + \ldots + a_n p^{2n} + \ldots$$

Покажем, что для этой функции выполняется наше утверждение. Пусть $x = a_0 a_1 \ldots a_n \ldots$ и $b_0 b_1 \ldots b_n \ldots$ элементы Z_p и $|x - y|_p = p^{-j}$ для некоторых $j = 0, 1, \ldots$ Тогда $a_0 = b_0, \ldots, a_{j-1} = b_{j-1}$ и $a_j \neq b_j$. Отсюда следует, что $|f(x) - f(y)|_p = p^{-2j}$. Поэтому

$$|f(x) - f(y)|_p = |x - y|_p^2 \quad (x, y \in Z_p).$$

А это и означает, что $f'(x) = 0$ в любой точке $x \in Z_p$.

Но мы не будем углубляться в такие сложные аспекты неархимедового анализа. Основным объектом наших исследований будут аналитические (и непрерывные) функции.

1.6.4. Степенные ряды и аналитические функции. Рассмотрим степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, где x и коэффициенты $c_j \in K$. Областью сходимости этого ряда является множество всех x, для которых данный ряд сходится. Радиус сходимости определяется как

$$\rho = \left[\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|_K^{1/n}\right]^{-1}.$$

Радиус сходимости имеет те же свойства, что и в поле C. Ряд сходится на множестве $\{x \in K\colon |x|_K < \rho\}$ и расходится на $\{x \in K\colon |x|_K > \rho\}$. Для любого τ, $0 < \tau < \rho$, сходимость является равномерной на $\{x \in K\colon |x|_K \leqslant \tau\}$. Функция

$$x \to \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (|x|_K < \rho)$$

является дифференцируемой. Ее производная вычисляется обычным способом. В отличие от комплексного случая, не всегда верно, что для степенного ряда существует единственное $r \in [0, \infty]$ такое, что ряд сходится при $|x|_K < r$ и расходится при $|x|_K > r$. Поэтому ρ нельзя определить с помощью этого свойства. Например, такая ситуация имеет место для $K = Q_p$, так как абсолютное значение принимает дискретные значения p^l. Например, пусть $\rho = p$ и областью сходимости является шар $U_p(0)$, тогда ряд сходится также и на сфере $S_p(0)$. Поэтому можно выбрать любое $r \in [p, p^2)$.

В комплексном анализе большое место отводится проблеме сходимости степенного ряда на границе. Для неархимедова случая данная проблема не является сложной. Пусть $\rho < \infty$, $\rho \neq 0$. Тогда ряд сходится *либо всюду, либо нигде на сфере* $S_\rho(0)$. Заметим, что эта сфера не является границей шара $\{x\colon |x|_K < \rho\}$. Возможно также, например в C_p, существование таких рядов, для которых множество $S_\rho(0)$ пусто.

Следовательно, в неархимедовом случае область сходимости — это либо шар $U_\rho(0)$, либо $U_\rho^-(0)$.

Существует также различие между архимедовым и неархимедовым случаями в сходимости ряда и его формальной производной. В неархимедовом случае области сходимости могут быть различны.

Аналогичные рассуждения проведем для степенного ряда $\sum c_n(x-a)^n$, где $a \in K$. Областью сходимости данного ряда является либо шар $U_\rho(a)$, либо шар $U_\rho^-(a)$. Пусть O — один из этих шаров. Функция $f\colon O \to K$ является аналитической, если ее можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \quad c_n \in K. \tag{6.1}$$

Это определение совпадает с соответствующим определением в комплексном случае. Но уже на первом шаге мы получаем неожиданное отличие. Как уже отмечалось, любая точка $b \in O$ может быть выбрана в качестве центра данного шара. Зависит ли определение аналитической функции на O от точки, в которой происходит разложение? Интуитивно мы понимаем, что не зависит. И это действительно так. Если функцию f можно разложить в степенной ряд на O в одной точке a, то ее можно также разложить в любой точке $b \in O$. Процедура переразложения в ряд (6.1) в новой точке b такая же, как и в комплексном случае. Новые коэффициенты в биномиальном разложении $(x-a)^n = [(x-b)+(b-a)]^n$ вычисляются обычным образом. Но для доказательства сходимости нового ряда на O необходимо использовать усиленное неравенство треугольника. Этот результат может быть рассмотрен как утверждение о *невозможности аналитического продолжения*. Если мы разложим функцию в новой точке, то получим ту же область сходимости. Таким образом, в неархимедовом случае вся теория аналитичности функций сводится к теории аналитичности на шарах. Центр шара не играет особой роли. Вот почему мы будем рассматривать только аналитические функции на шарах с центром в нуле.

Так как шар $U_r(a)$ в K^n есть прямое произведение одномерных шаров того же самого радиуса, то все наши рассуждения можно обобщить на случай нескольких переменных. Пусть O — шар в K^n. Функция $f\colon O \to K$, где O шар в K^n, является аналитической, если ее можно разложить в ряд на O. Мы продолжим рассмотрение понятия аналитичности в начале следующей главы, где будут введены основные пространства аналитических функций на шарах в K^n.

1.6.5. Экспонента. Экспоненты играют важную роль в построении неархимедового анализа. Экспонента в K (как и в C) определяется рядом

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Используя теорему 1.2 и экспоненциальное разложение (1.5) функции $1/|n|_K$, получаем, что экспоненциальный ряд сходится при $|x|_K < b^{-1}$. В частности, в p-адическом случае он сходится при $|x|_p < p^{1/(1-p)}$.

§ 1.7. Теория Малера интегрирования на кольце целых p-адических чисел

1.7.1. Разложение Малера для непрерывных функций. Рассмотрим непрерывную функцию $f\colon Z_p \to Q_p$. Множество Z_p — компакт, поэтому любая непрерывная функция f является равномерно непрерывной. Значит, для каждого натурального s существует натуральное $t = t(s)$ такое, что из неравенства $|x - y|_p \leqslant p^{-t}$ следует, что $|f(x) - f(y)|_p \leqslant p^{-s}$. Как уже отмечалось, множество натуральных чисел является всюду плотным подмножеством в Z_p. Следовательно, любую непрерывную функцию можно задать ее значениями в натуральных точках:

$$f(0), f(1), \ldots, f(n), \ldots$$

Теперь запишем следующее выражение:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f(n-k) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{7.1}$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ — биномиальные коэффициенты. Выражения (7.1) являются стандартными в разностном исчислении. Формальный интерполяционный ряд запишем в виде

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_x^n, \tag{7.2}$$

где $C_x^n = \dfrac{x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!}$. Прежде всего рассмотрим этот интерполяционный ряд для множества натуральных чисел: $x = N$. Тогда $C_N^n = 0$ для $n > N$ и $f^*(N)$ представляет собой конечную сумму:

$$f^*(N) = \sum_{n=0}^{N} a_n C_N^n. \tag{7.3}$$

Используя свойства биномиальных коэффициентов, можно доказать, что $f^*(N) = f(N)$. Это стандартные вычисления разностного исчисления, которые никоим образом не связаны с p-адикой. Таким образом, $f(x)$ и $f^*(x)$ *совпадают на множестве натуральных чисел.* Поэтому, если мы покажем, что ряд $f^*(x)$ сходится для любых x и его сумма есть непрерывная функция, то $f^*(x) \equiv f(x)$. Но это доказательство очень громоздкое, поэтому мы сформулируем в виде теоремы только результат.

Теорема 7.1 (Малера). Пусть $f\colon Z_p \to Q_p$ — непрерывная функция и интерполяционные коэффициенты a_n вычисляются по формуле (7.1). Тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

2) интерполяционный ряд (7.2) сходится равномерно к $f(x)$ на Z_p;

3) $\|f\| = \max\{|a|_n\colon n \in \{0, 1, 2\ldots\}\}$.

Обратное утверждение также верно: если $\{a_n\}$ сходится к нулю в Q_p, то ряд (7.2) определяет непрерывную функцию на Z_p.

1.7.2. Мера как функционал. Определим Q_p-значную меру на Z_p как непрерывный Q_p-линейный функционал μ: $C(Z_p) \to Q_p$. Тогда множество мер совпадает с сопряженным пространством: $C'(Z_p)$. Используя разложение Малера, получаем

$$\mu(f) = \mu\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n C_x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mu_n, \tag{7.4}$$

где $\mu_n = \mu(C_x^n)$. Следовательно, $|\mu(f)|_K \leqslant L_\mu \max|a_n|_k = L\mu\,\|f\|$, где $L_\mu = \sup\limits_n |\mu_n|_K$ (по теореме 7.1). Таким образом, $\|\mu\| \leqslant L_\mu$. Но $\|C_x^n\| = 1$ (по теореме 7.1.3) и

$$|\mu_n|_K = |\mu(C_x^n)|_K = \frac{|\mu(C_x^n)|_K}{\|C_x^n\|} \leqslant \|\mu\|\,.$$

То есть мы доказали, что $\|\mu\| = L_\mu$ и что *любая мера на* Z_p *представляется ограниченной последовательностью* $\{\mu_n\}$ *p-адических чисел*. Обратное утверждение также верно: *любая ограниченная последовательность p-адических чисел определяет меру* μ *с помощью равенства* (7.4).

1.7.3. Мера как функция множества. Обозначим через $\Phi(Z_p)$ систему замкнуто-открытых подмножеств множества Z_p. Характеристическая функция $\phi_U(x)$ является непрерывной для любого $U \in \Phi(Z_p)$. Следовательно, существует соответствие между функцией множества $U \to \mu(U) = \mu(\phi_U)$ и мерой μ. В частности, так как линейный функционал μ аддитивен, то соответствующая ему функция множества тоже аддитивна:

$$\mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V), \quad U \cap V = \varnothing. \tag{7.5}$$

Так как линейный функционал μ непрерывен, то соответствующая ему функция множества обладает свойством ограниченности:

$$\sup\{|\mu(V)|_p :\ V \subset U,\ V \in \Phi(Z_p)\} < \infty \tag{7.6}$$

для любого $U \in \Phi(Z_p)$. Можно доказать, что любая функция множества $\mu\colon \Phi(Z_p) \to Q_p$, для которой выполняются условия (7.5) и (7.6), может быть продолжена до меры на Z_p (непрерывного линейного функционала $\mu\colon C(Z_p) \to Q_p$). Как обычно, в качестве первого шага, мы определим по линейности этот функционал на пространстве E, состоящем из линейных комбинаций характеристических функций замкнуто-открытых подмножеств множества Z_p (используя (7.5)). На втором шаге покажем ограниченность функционала $\mu\colon E \to Q_p$ (используя (7.6)):

$$\|\mu\|_E = \sup\{|\mu(\phi)|_p \,/\, \|\phi\| :\ \phi \in E,\ \phi \neq 0\} < \infty.$$

Таким образом, этот функционал является непрерывным в топологии, индуцированной из $C(Z_p)$. И для завершения доказательства остается применить теорему 6.1, чтобы продолжить по непрерывности функционал μ с E на $C(Z_p)$. Итак, мы доказали, что *существует взаимно однозначное соответствие между мерами, определенными как Q_p-линейные непрерывные функционалы на пространстве $C(Z_p)$, и функциями множества, определенными на системе $\Phi(Z_p)$ (которая состоит из замкнуто-открытых подмножеств) такими, что выполняются условия* (7.5) и (7.6).

1.7.4. Отсутствие меры Хаара. Докажем, что не существует трансляционно инвариантной меры $\mu\colon \Phi(Z_p) \to Q_p$. Как обычно, мера называется *трансляционно инвариантной*, если

$$\mu(a + U) = \mu(U), \quad a \in Z_p, \quad U \in \Phi(Z_p). \tag{7.7}$$

Сначала докажем, что p^n аддитивных комножеств вида $p^n Z_p$ в Z_p дают разбиения множества Z_p. Из канонического разложения $x \in Z_p$ получаем, что $x = a_0 + \ldots + a_{n-l} p^{n-l} + z$, где $z \in p^n Z_p$. Теперь заметим, что цифрами a_i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$ могут быть только $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, т. е. существует только p^n различных возможностей. Причем различные комножества имеют пустое пересечение.

Пусть μ трансляционно инвариантная мера. Из (7.5) и (7.7) получаем

$$\mu(Z_p) = \sum_{i=1}^{p^n} \mu(p^n Z_p) = p^n \mu(p^n Z_p). \tag{7.8}$$

Из (7.6) следует, что $\sup\limits_n |\mu(p^n Z_p)|_p < \infty$, поэтому $\mu(Z_p) = \lim\limits_{n\to\infty} p^n \mu(p^n Z_p) = 0$. Учитывая (7.8), получаем $\mu(p^n Z_p) = 0$ для любого $n = 0, 1, \ldots$ Таким образом, в силу трансляционной инвариантности получаем, что $\mu(U_r(a)) = 0$ для любого шара в Z_p (так как все радиусы имеют вид $r = p^{-n}$, $n = 0, 1, \ldots$). А любое замкнуто-открытое подмножество может быть представлено как конечное объединение непересекающихся шаров.

Заметим (см. [101], [102]), что существует трансляционно инвариантная мера μ: $\Phi(Z_p) \to Q_q$, где $p \neq q$. Данный вопрос будет обсуждаться более подробно в гл. 6 в контексте теории интегрирования Монна–Спрингера.

1.7.5. Интеграл Волкенборна (равномерное распределение). Из (7.8) получаем, что $\mu(p^n Z_p) = (1/p^n)$ для $\mu(Z_p) = 1$. Следовательно, $\mu(U_r(a)) = r$ для $r = (1/p^n)$. Поэтому можно определить трансляционно инвариантную конечную аддитивную функцию на алгебре замкнуто-открытых подмножеств с помощью значений этой меры на шарах. Но из предыдущих рассуждений следует, что она будет неограниченной. Следовательно, невозможно интегрировать все непрерывные функции с помощью этой «меры».

Существует другой способ введения данного интеграла. Интеграл Волкенборна для функции f: $Z_p \to Q_p$ определяется равенством

$$\int\limits_{Z_p} f(z)\,dx = \lim_{n\to\infty} (1/p^n)(f(0) + \ldots + f(p^n - 1)).$$

Здесь этот интеграл не будет изучаться на математическом уровне строгости. Для этого нам нужно было бы ввести новое функциональное пространство (строго непрерывно дифференцируемых функций [106]). Мы только заметим, что существуют такие непрерывные функции, для которых интеграл Волкенборна не определен. Но он корректно определен для характеристических функций шаров и

$$m(U_r(a)) = \int \phi_{U_r(a)}(x)\,dx = r, \quad r = 1/p^n.$$

Следовательно, этому интегралу соответствует (трансляционно инвариантная) аддитивная функция множества. Отметим также, что интеграл Волкенборна корректно определяется и для любых полиномиальных функций и

$$\int\limits_{Z_p} x^n\,dx = B_n, n = 0, 1, \ldots,$$

где B_n — числа Бернулли, которые определяются равенством

$$\frac{a}{e^a - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n a^n}{n!}.$$

Справедлива следующая оценка:

$$|B_n|_p \leqslant p.$$

Интеграл Волкенборна определен для аналитических функций $f\colon Z_p \to Q_p$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$\int\limits_{Z_p} f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B_n.$$

«Мера» Волкенборна в некотором смысле является равномерным распределением на кольце p-адических целых чисел. Попытаемся ввести равномерное распределение на множестве натуральных чисел N (здесь мы рассматриваем нуль как элемент N). Возьмем первые p^n чисел $0, 1, \ldots, p^n - 1$ с равномерными весами $1/p^n$. Пусть $n \to \infty$. Получим равномерное распределение. В обычном случае получить такое распределение невозможно. Мы же получаем его на множестве Z_p, в котором множество натуральных чисел плотно. Но это распределение не является мерой даже в p-адическом случае.

Интеграл Волкенборна мы будем изучать в гл. 2 на основе теории обобщенных функций. «Мера» Волкенборна будет введена как обобщенная функция (распределение).

Глава 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАУССА, ЛЕБЕГА И ФЕЙНМАНА НАД НЕАРХИМЕДОВЫМИ ПОЛЯМИ

Интегралы Гаусса и Фейнмана на числовой прямой R,

$$I_G = \int\limits_R \varphi(x) e^{-x^2/2b} \frac{dx}{\sqrt{2\pi b}}, \quad I_F = \int\limits_R \varphi(x) e^{-x^2/2bi} \frac{dx}{\sqrt{2\pi bi}},$$

определяются с помощью меры Лебега dx на R. Интеграл Гаусса I_G — это интеграл, соответствующий мере Гаусса на R, которая является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега dx. Ситуация осложняется в случае осциллирующего интеграла Фейнмана. Если функция φ интегрируема по мере dx на R, то интеграл I_G является интегралом Лебега (так как экспонента ограничена). Если φ не интегрируема по Лебегу, то интеграл рассматривается как обобщенный интеграл, определяемый в соответствии с теорией распределения на R, т. е. $I_F = (\mu_F, \varphi)$, где μ_F — соответствующее распределение (обобщенная функция) на R.

В неархимедовой теории возникает новая проблема, которая связана с отсутствием меры Лебега (Хаара) dx с неархимедовыми значениями. Отсутствие этой меры серьезно осложняет построение неархимедовой теории для интегралов Гаусса и Фейнмана.

Эта проблема была решена в работах [57–59], [64], [72]. В рамках теории распределений, распределение Гаусса рассматривается как непрерывный функционал на пространстве целых аналитических функций. Эта конструкция основана на равенстве Парсеваля. Из равенства Парсеваля следует, что, для того чтобы найти распределение некоторой функции, необходимо знать преобразование Лапласа (Фурье) этого распределения. *По аналогии с теорией действительных функций можем предположить, что преобразование Лапласа (Фурье) неархимедова распределения Гаусса — это квадратичная экспонента на неархимедовом числовом поле.*

Далее распределение Лебега в неархимедовом поле вводится как абсолютно непрерывное распределение относительно гауссовского распределения.

Для получения неархимедова аналога интеграла Фейнмана I_F также используется равенство Парсеваля. Надо отметить, что в неархимедовой теории практически не существует различия между интегралами I_G и I_F, так как поведение обеих квадратичных экспонент практически одинаково. Не представляет проблемы и поведение этих экспонент на бесконечности, так как они определены только в некоторой окрестности нуля. Это и является основной причиной специфического выбора [72] пространства основных функций неархимедова аргумента, а именно: это пространство состоит из всех функций аналитичных в нуле (вообще говоря, не определенных на всем поле).

Идея ввести неархимедовы распределения Гаусса и Фейнмана с помощью равенства Парсеваля была заимствована из теории интегралов Фейнмана для бесконечномерных действительных пространств [1], [134], [115–117], [43-45]. Для таких пространств над R мера Лебега dx также отсутствует. Бесконечномерный анализ имеет много общего с неархимедовым анализом.

Аналогичная ситуация возникает в суперанализе, где не существует меры Лебега и используются только интегралы-распределения (даже в случае конечной размерности), см. [46], [49], [50]. Об интегралах Гаусса и Фейнмана для неархимедовых суперпространств см. [51], [66], [73], [74] (также здесь вводится *интеграл Волкенборна* для суперпространств).

§ 2.1. Аналитические функции над неархимедовыми полями

Теперь рассмотрим пространства аналитических функций, которые будут играть основную роль в теории распределений. Как уже отмечалось в первой главе, мы рассматриваем только функции, определенные на шарах с центром в нуле. Намного проще рассматривать только те шары, у которых радиусы $R \in \Gamma$ (только такие шары являются «естественными шарами»).

Символом U_R обозначим шар $U_R(0)$ в K^n. Функция $f\colon U_R \to K$, $R \in \Gamma$, аналитична, если ряд

$$f(x) = \sum_{\alpha} f_\alpha x^\alpha, \quad f_\alpha \in K, \tag{1.1}$$

сходится равномерно на U_R. Здесь $\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i = 0, 1, 2, \ldots$, и $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$. Согласно неархимедову критерию Коши для сходимости ряда (1.1) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} |f_\alpha|_K \, R^{|\alpha|} = 0. \tag{1.2}$$

Для доказательства необходимости используется то, что $R \in \Gamma$. Существует такое $a_R \in K$, что $|a_R|_K \in K$. Точка $x_R = (a_R, \ldots, a_R) \in U_R$. И если ряд (1.1) сходится в этой точке, то выполняется условие (1.2).

Топология в пространстве $A(U_R) \equiv A(U_R, K)$ ($\equiv A_R$) функций, аналитичных на шаре U_R, определяется неархимедовой нормой $\|f\|_R = \max_\alpha |f_\alpha|_K \, R^\alpha$. Это неархимедово банахово пространство.

Функция f: $K^n \to K$ является *целой*, если ряд (1.1) сходится на шаре U_R для любого $R \in \Gamma$. Топология в пространстве целых функций $A(K^n) \equiv A(K^n, K)$ $(\equiv A)$ определяется системой неархимедовых норм $\{||\cdot||_R\}_{R \in R_+}$. Последовательность целых функций $\{f_n\}$ сходится в A, если она равномерно сходится на любом шаре U_R. Нетрудно заметить, что эта топология может быть определена при помощи произвольной последовательности норм $\{||\cdot||_{R_k}\}_{k=1}^{\infty}$, где $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = \infty$. Это неархимедово пространство Фреше. Такой тип топологий известен как топология проективного предела банаховых пространств:

$$A(K^n) = \lim_{R\to\infty} \operatorname{proj} A(U_R).$$

Замечание 1.1. Последовательность функций $\{f_n\}$ сходится в пространстве A к функции f, если $||f_n - f||_R \to 0$ для любой нормы $||\cdot||_R$.

Функция является аналитической в нуле, если существует радиус $R \in \Gamma$ такой, что $f \in A(U_R)$. Пространство аналитичных в нуле функций $A_0(K^n) \equiv A_0(K^n, K)$ $(\equiv A_0)$ наделяется топологией индуктивного предела

$$A_0(K^n) = \lim_{R\to 0} \operatorname{ind} A(U_R).$$

Замечание 1.2. Согласно теории индуктивных пределов последовательность функций $\{f_n\}$ сходится в пространстве A_0, если все эти функции принадлежат пространству A_R для некоторого R и эта последовательность сходится в банаховом пространстве A_R.

Пространство A_0 является полным локально выпуклым пространством.

Замечание 1.3. Если читатель не интересуется построением топологий, он может рассматривать только сходимость последовательностей функций.

Утверждение 1.1. Операторы дифференцирования $\partial/\partial x_j$: $A_\delta \to A_\delta$, $j = 1, \ldots, n$, непрерывны.

Доказательство. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \sum_\alpha \alpha_j f_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_j^{\alpha_j - 1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n},$$

то

$$|\alpha_j|_K |f_\alpha|_K \delta^{|\alpha|-1} \leqslant (1/\delta)\delta^{|\alpha|} |f_\alpha|_K \to 0, \quad |\alpha| \to \infty$$

(мы использовали оценку $|m|_K \leqslant 1$ для натуральных m).

Следовательно, $\dfrac{\partial}{\partial x_j} f(x) \in A_\delta$. Далее,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_j} f \right\|_\delta \leqslant (1/\delta)\, \|f\|_\delta\,. \tag{1.3}$$

Используя определения топологий в пространствах A и A_0, получаем, что операторы дифференцирования $\partial/\partial x_j$ непрерывны в этих пространствах. Напомним, что если линейный оператор непрерывен в любом банаховом подпространстве индуктивного предела, то он непрерывен.

Утверждение 1.2. Пространства A_δ являются неархимедовыми банаховыми алгебрами.

Доказательство. Ограничимся случаем $n = 1$. Пусть функции f и g принадлежат пространству A_δ. Тогда

$$\frac{\delta^m}{|m!|_K}\left|(fg)^{(m)}(0)\right|_K \leqslant$$
$$\leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant m}\left(\frac{\delta^k}{|k!|_K}\left|f^{(k)}(0)\right|_K\cdot\frac{\delta^{m-k}}{|(m-k)!|_K}\left|g^{(m-k)}(0)\right|_K\right).$$

Мы выберем такое N, что для $s \geqslant N$

$$\frac{\delta^s}{|s!|_K}\left|f^{(s)}(0)\right|_K,\quad \frac{\delta^s}{|s!|_K}\left|g^{(s)}(0)\right|_K \leqslant \frac{\varepsilon}{\max\left(\|f\|_\delta, \|g\|_\delta\right)}.$$

Пусть $m \geqslant 2N$. Если $k \geqslant N$, то

$$\frac{\delta^m}{|m!|_K}\left|(fg)^{(m)}(0)\right|_K \leqslant \frac{\varepsilon\|g\|_\delta}{\max\left(\|f\|_\delta, \|g\|_\delta\right)} \leqslant \varepsilon.$$

Если $k < N$, то $m - k \geqslant N$ и

$$\frac{\delta^m}{|m!|_K}\left|(fg)^{(m)}(0)\right|_K \leqslant \frac{\varepsilon\|f\|_\delta}{\max\left(\|f\|_\delta, \|g\|_\delta\right)} \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, $\dfrac{\delta^m}{|m!|_K}\left|(fg)^{(m)}(0)\right|_K \to 0, m \to \infty$ и

$$\|fg\|_\delta \leqslant \|f\|_\delta\,\|g\|_\delta\,. \tag{1.4}$$

Как следствие этих утверждений мы получаем, что пространство A является неархимедовой алгеброй Фреше (так как неравенство (1.4) справедливо для любой нормы, определяющей топологию на A), а пространство A_0 неархимедовой локально выпуклой алгеброй (так как в индуктивном пределе неравенства (1.4) влекут непрерывность операции умножения).

§ 2.2. Аналитические распределения, распределения Гаусса и Фейнмана

Выберем пространства аналитических функций $A(K^n)$ и $A_0(K^n)$ в качестве пространств основных функций и пространства K-линейных непрерывных функционалов $A'(K^n)$ и $A_0'(K^n)$ в качестве пространств распределений (обобщенных функций). Эти пространства распределений допускают явное описание в виде пространств дифференциальных операторов бесконечного порядка с коэффициентами поля K. Для дифференциального оператора бесконечного порядка

$$P = \sum_{\alpha} P_\alpha \delta^{(\alpha)}(x),$$

где $P_\alpha \in K$, $\delta(x)$ — функция Дирака, мы полагаем

$$\|P\|_\rho = \sup |P_\alpha|_K \, |\alpha!|_K \, \rho^{-|\alpha|}.$$

Вводим пространства $D_\rho = \Big\{P: \ \|P\|_\rho < \infty\Big\}$. Как обычно, обобщенная производная функции Дирака определяется с помощью уравнения: $\big(\delta^{(\alpha)}(x), f(x)\big) = (-1)^\alpha f^{(\alpha)}(0)$. Дифференциальный оператор можно рассматривать как функционал: $(P, f) = \sum\limits_{\alpha} P_\alpha f^{(\alpha)}(0)$. Следующая теорема дает представление пространства распределений (непрерывных линейных функционалов) с помощью дифференциальных операторов бесконечного порядка.

Теорема 2.1. $A' = \cap D_\rho$ и $A'_0 = \cup D_\rho$.

Таким образом, дифференциальный оператор бесконечного порядка P является распределением на пространстве целых аналитических функций, если $\|P\|_\rho < \infty$ для всех $\rho > 0$. Более того, дифференциальный оператор бесконечного порядка P является распределением на пространстве функций, аналитичных в нуле, если $\|P\|_\rho < \infty$ для некоторого $\rho > 0$. Доказательство этой теоремы основано на следующем утверждении.

Утверждение 2.1. Мономы $e_\alpha = x^\alpha$ образуют базис в локально выпуклых пространствах A и A_0, причем $||e_a||_R = R^{|\alpha|}$.

Таким образом, степенное разложение любой целой аналитической функции сходится в пространстве Фреше A. Это разложение сходится в неархимедовом локально выпуклом пространстве A_0 для любой аналитичной в нуле функции. Доказательство этого утверждения основано на прямой оценке, основанной на определении нормы $|| \cdot ||_R$. Затем применяется теорема 5.1 из гл. 1. И чтобы закончить доказательство для пространства A_0, мы должны использовать основное свойство сходящихся последовательностей в индуктивных пределах (см. замечание 1.3).

В частности, это утверждение позволяет представлять пространства основных функций A и A_0 в виде пространств K-последовательностей. Такое представление иногда очень удобно при вычислениях. По теореме 2.1 пространства распределений A' и A'_0 можно представить в виде последовательностей. Если $P = (P_\alpha)$ и $f = (f_\alpha)$, то $P(f) = (P, f) = \sum\limits_{\alpha} P_\alpha f_\alpha \alpha!$.

Введем топологии в пространствах распределений, используя утверждение теоремы 2.1:

$$A' = \lim_{\rho\to\infty} \operatorname{ind} D_\rho, \quad A'_0 = \lim_{\rho\to 0} \operatorname{proj} D_\rho.$$

Утверждение 2.2. Мономы $e'_\alpha = (-1)^\alpha \delta^{(\alpha)}(x)$ образуют базис в пространстве A', наделенном индуктивной топологией, и в пространстве A'_0, наделенном проективной топологией.

Заметим для дальнейших рассмотрений (гл. 3), что $(e'_\alpha, e_\alpha) = \alpha!$.

Более подробные исследования свойств пространств A, A_0, A', A'_0 вы можете найти в работе [57]. В частности, в этой работе было доказано, что пространства основных функций A и A_0 рефлексивны: $A'' = A$ и ${A'}'_0 = A_0$.

Использование аналитических функций является наиболее простым путем к неархимедовому обобщению теории распределения. Эта аналитическая теория необходима в приложениях неархимедовой математической физики. Как обычно, удобно использовать символ интеграла для обозначения действия распределения на основную функцию. Для нас удобна следующая запись:

$$J(F) = (J, F) = \int\limits_{K^n} J(dx) f(x), \quad J \in A'_0, \quad f \in A_0,$$

$$\mu(f) = (f, \mu) = \int\limits_{K^n} f(x)\mu(dx), \quad \mu \in A', \quad f \in A.$$

То есть мы записываем распределения класса A'_0 слева, а распределения класса A' — справа от основной функции. Прямое произведение двух распределений J_1 и $J_2 \in A'_0$ определяется как

$$\int\limits_{K^{n+m}} J_1 \otimes J_2(dudv) f(u, v) = \int\limits_{K^n} J_1(du) \int\limits_{K^m} J_2(dv) f(u, v).$$

Простые (но достаточно громоздкие) вычисления со степенными рядами показывают, что прямое произведение $J_1 \otimes J_2$ является непрерывным K-линейным функционалом на пространстве A_0. Значит, оно принадлежит пространству A'_0. Все оценки в этих вычислениях основаны на усиленном неравенстве треугольника. Поэтому операция прямого произведения распределений корректно определена в пространстве A'_0. Свертка двух распределений J_1, $J_2 \in A'_0$ определяется равенством

$$\int\limits_{K^n} J_1 * J_2(dv) f(v) = \int\limits_{K^{2n}} J_1 \otimes J_2(dv_1 dv_2) f(v_1 + v_2).$$

Данная операция также корректно определена в пространстве A_0'. Операции прямого произведения и свертки в пространстве A мы введем аналогичным образом. Доказательства всех утверждений, касающихся операций $\otimes$ и $*$, можно найти в работе [69].

Обычным образом мы можем ввести операцию дифференцирования в пространствах распределений A_0' и A': $(\partial J/\partial y_j, \phi) = -(J, \partial\phi/\partial y_j)$, $J \in A_0'$, $\phi \in A_0$, и аналогично для $\mu \in A'$, $\phi \in A$. Эта операция корректно определена, так как операторы $\partial/\partial y_j$, $j = 1, \ldots$, являются непрерывными в локально выпуклых пространствах A_0 и A.

Обычным образом мы можем также ввести в пространствах распределений операцию умножения распределения на основную функцию: $(gJ, \phi) = (J, g\phi)$, $J \in A_0'$, $g, \phi \in A_0$, и аналогично в случае $\mu \in A'$, $g, \phi \in A$. Эта операция корректно определена, так как пространства основных функций являются локально выпуклыми алгебрами.

Введем скалярное произведение на K^n, полагая $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Определение 2.1. Преобразованием Лапласа распределения $g \in A_0'$ называется функция $L(g)(y) = (g, \exp\{(y, \cdot)\})$.

Как уже отмечалось в гл. 1, экспоненциальная функция является аналитической в некоторой окрестности нуля; эта окрестность зависит от поля K. Следовательно, функция $\exp\{(y, \cdot)\}$ является аналитической в окрестности нуля для любого $y \in K^n$, т. е. она принадлежит A_0 для любого $y \in K^n$ и преобразование Лапласа корректно определено. Вот почему пространство основных функций A_0 выбрано нами как базис для неархимедового преобразования Лапласа.

Теорема 2.2. Преобразование Лапласа L: $A_0' \to A$ является изоморфизмом.

Мы получим точно такой же результат для случая бесконечной размерности в гл. 3. Полное доказательство этой теоремы для случая конечной размерности можно найти в работе [72].

Таким образом, мы получили неархимедово исчисление Лапласа

$$A_0' \xrightarrow{L} A, \quad A_0 \xleftarrow{L'} A'. \tag{2.1}$$

Неархимедово преобразование Лапласа имеет такие же свойства, как и в обычном случае. Пусть J, J_1, $J_2 \in A_0'$ и μ, μ_1, $\mu_2 \in A$. Тогда:

1) $L(J_1 * J_2) = L(J_1)L(J_2)$ и $L'(\mu_1 * \mu_2) = L'(\mu_1)L'(\mu_2)$;
2) $L(y_j J) = \partial L(J)/\partial x_j$ и $L'(x_j \mu) = \partial L'(\mu)/\partial y_j$;
3) $L(\partial J/\partial y_j) = -x_j L(J)$ и $L'(\partial\mu\, \partial x_j) = -y_j L'(\mu)$.

Эти свойства вытекают из определений. Согласно определению сопряженного оператора мы имеем *равенство Парсеваля*

$$\int\limits_{K^n} L(g)(y)\mu(dy) = \int\limits_{K^n} g(dx)L'(\mu)(x). \tag{2.2}$$

Определение 2.2. Распределение Гаусса на K^n (со средним значением $a \in K^n$ и ковариационной матрицей B) определяется как распределение $\gamma_{a,B} \in A_0'$ с преобразованием Лапласа $L'\ (\gamma_{a,B})(x) = \exp\{1/2(Bx, x) + (a, x)\}$.

Если вместо K рассмотреть R, то мы получим обычное гауссовское распределение для ковариационной матрицы $B > 0$.

Для интеграла, соответствующего распределению Гаусса, мы используем обозначение

$$\int\limits_{K^n} \varphi(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}(B^{-1}(x-a), (x-a))\right\} dx.$$

Произведение квадратичной экспоненты на dx — это только символ, определяющий гауссовское распределение $\gamma_{a,B}$. Но этот символ удобен при вычислениях. Формально мы можем работать с квадратичной экспонентой как с обычной плотностью по отношению к мере dx. Но чтобы обосновать такие вычисления, мы должны использовать преобразование Лапласа. Это символическое представление для гауссовского распределения $\gamma_{a,B}$ содержит единичную нормировку интеграла

$$\int\limits_{K^n} \exp\left\{-\frac{1}{2}(B^{-1}(x-a), (x-a))\right\} dx.$$

Используя равенство Парсеваля (2.2), мы имеем

$$\int\limits_{K^n} L(g)(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}(B^{-1}(x-a), (x-a))\right\} dx = \\ = \int\limits_{K^n} g(dx) \exp\left\{\frac{1}{2}(Bx, x) + (a, x)\right\}. \quad (2.3)$$

То есть можно вычислить любой интеграл Гаусса, используя только преобразование Лапласа.

Отметим также, что формула интегрирования по частям для распределения Гаусса выглядит так: если $\varphi \in A$, $a \in K^n$, то

$$\int\limits_{K^n} \varphi(x)(a, x) \exp\left\{-\frac{1}{2}(B^{-1}x, x)\right\} dx = \\ = \int\limits_{K^n} \left(Ba, \frac{\partial}{\partial x}\right)(\varphi)(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}(B^{-1}x, x)\right\} dx.$$

Мы представим доказательство этой формулы, чтобы продемонстрировать технику преобразования Лапласа для гауссовских интегралов. Используя (2.3) и свойства L, получаем

$$I = \int\limits_{K^n} \varphi(x)(a,x)\exp\left\{-\frac{1}{2}(B^{-1}x,x)\right\}dx =$$
$$= \int\limits_{K^n} L^{-1}(\varphi) * \rho_a(dy)\exp\left\{\frac{1}{2}(By,y)\right\},$$

где $\rho_a = (\operatorname{grad}\delta, a) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \dfrac{\partial\delta(x)}{\partial x_j}$. Следовательно,

$$I = \int\limits_{K^n} L^{-1}(\varphi) \otimes \rho_a(dy_1, dy_2)\exp\left\{\frac{1}{2}(By_1 + y_2, y_1 + y_2)\right\} =$$
$$= \int\limits_{K^n} L^{-1}(\varphi)(dy)(Ba,y)\exp\left\{\frac{1}{2}(By,y)\right\}.$$

Более того, мы видим, что $L((Ba,\cdot)L^{-1}(\varphi)) = (Ba, \operatorname{grad}\varphi)$. Для завершения доказательства применим равенство (2.3) еще раз.

Все предыдущие рассуждения можно повторить и для аналитических функций $f\colon K^n \to Z$, $Z = K(\sqrt{\tau})$. Здесь используется пространство целых функций $A(K^n, Z)$, пространство $A_0(K^n, Z)$ функций, аналитичных в нуле, и пространства распределений $A'(K^n, Z)$ и $A'_0(K^n, Z)$. В рамках теории распределений вводится гауссовское распределение, для которого $a \in Z$ и элементы матрицы B принадлежат Z. Для Z-значной теории мы также вводим *преобразование Фурье*:

$$F(g)(y) = \int\limits_{K^n} g(dx)\exp\left\{\sqrt{\tau}(y,x)\right\}.$$

Теорема 2.3. Преобразование Фурье $F\colon A'_0(K^n, Z) \to A(K^n, Z)$ является изоморфизмом.

Преобразование Фурье имеет обычные свойства. Отличие заключается только в замене $i \to \sqrt{\tau}$ во всех стандартных формулах. Если $K = Q_p$ и $p \neq 1 (\operatorname{mod} 4)$, то может быть рассмотрено квадратичное расширение $Z = Q_p(i)$, $i = \sqrt{-1}$. В этом случае преобразование Фурье определяется той же формулой, что и в действительном случае, а все формулы совпадают с комплексными аналогиями.

Пример 2.1. Каноническое распределение Гаусса $\nu(dx) = e^{-x^2}dx$.

$$M_n = \int\limits_{K} x^n e^{-x^2}dx = \frac{\partial^n}{\partial y^n} e^{y^2/4}\bigg|_{y=0}.$$

Следовательно, $M_{2k+1} = 0$, $M_{2k} = (2k-1)!!/2^k$. Используя утверждение 2.1, мы получаем формулу для вычисления интеграла Гаусса для любой целой функции $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n x^n$:

$$\int\limits_K f(x) e^{-x^2}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{2n}(2n-1)!!}{2^n}.$$

Многие «необычные», с точки зрения теории действительных функций, функции являются интегрируемыми. Пусть $K = Q_p$. Тогда функция $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n! x^n$ является интегрируемой и

$$\int\limits_{Q_p} f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2n)!](2n-1)!!}{2^n}.$$

Теперь введем *эрмитовы полиномы* над полем K:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Здесь, как обычно,

$$\int\limits_K H_n(x) H_m(x) e^{-x^2}\, dx = 0, \quad n \neq m.$$

Вычислим интеграл $\int\limits_K H_n^2(x) e^{-x^2}\, dx$. Чтобы сделать это, заметим, что произведение основной функции $H_n \in A$ и распределения $\nu \in A'$ равно обобщенной производной $(-1)^n \dfrac{d^n}{dx^n}(\nu)$ от ν:

$$\int\limits_K H_n^2(x) e^{-x^2}\, dx = (-1)^n \int\limits_K H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\, dx\right) =$$
$$= \int\limits_K \frac{d^n}{dx^n}(H_n(x)) e^{-x^2}\, dx = 2^n n! \int\limits_K e^{-x^2}\, dx = 2^n n!.$$

Пример 2.2. Каноническое гауссовское распределение $\gamma(dz, d\bar{z}) = e^{-z\bar{z}} dz d\bar{z}$.

Пусть $K = Z$; обозначим через z и $\bar{z}$ независимые переменные на Z; $\omega = (z, \bar{z})$ — переменная на Z^2, $z\bar{z} = 1/2(B\omega, \omega)$, где B имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\gamma(dz, d\bar{z})$ — это распределение Гаусса на Z^2

с нулевым средним значением и ковариационной матрицей B, причем:

$$\int_{Z^2} z^n \bar{z}^m e^{-z\bar{z}} dz d\bar{z} = \frac{\partial^{n+m}}{\partial \bar{z}^n \partial z^m} e^{z\bar{z}} \bigg|_{z=0,\bar{z}=0} = \delta_{nm} n!.$$

Например, функция $f(z,\bar{z}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{p^{p^n}}{n!} z^n \bar{z}^n$ принадлежит пространству $A(Z^2, Z)$ и для нее имеем

$$\int_{Z^2} f(z,\bar{z}) e^{-z\bar{z}} dz d\bar{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{p^n}}{n!} z^n \bar{z}^n.$$

Как уже отмечалось, z и $\bar{z}$ — две независимые переменные на Z^2, $\omega_1 = z$ и $\omega_2 = \bar{z}$.

§ 2.3. Неархимедово гильбертово пространство

Квантование над неархимедовыми числовыми полями должно быть основано на неархимедовом аналоге гильбертова пространства. В математической литературе [101], [106] понятие неархимедового гильбертова пространства, соответствующего физическим приложениям, еще не выработано. Понятие ортогональности в неархимедовых пространствах основано на норме, а не на скалярном произведении. Напомним, что система векторов $\{e_j\}_{j\in J}$ в неархимедовом нормированном пространстве E является ортогональной, если

$$\left\| \sum_{j\in S} x_j e_j \right\| = \max_{j\in S} |x_j|_K \, \|e_j\|$$

для каждого конечного множества $S \subset J$ и любого $x_j \in K$. Ортогональная система $\{e_j\}_{j\in J}$ называется ортогональным базисом в E, если $x = \sum x_j e_j$ для любого вектора $x \in E$. В этом случае пространство E называется ортогонализируемым. По теореме ортогонализации Дж. П. Серра каждое дискретно-нормированное неархимедово банахово пространство является ортогонализируемым.

Не существует стандартного определения скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ в ортогональном пространстве E. Предположим, что векторы $\{e_j\}$ должны быть ортогональны не только относительно нормы, но и относительно скалярного произведения. Тогда

$$(x,x) = \sum \lambda_j x_j^2,$$

где $\lambda_j = (e_j, e_j)$. Данный ряд сходится тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{j\to\infty} |x_j|_K \sqrt{|\lambda_j|_K} = 0$. Но банахово пространство E содержит такие x, для которых $\lim\limits_{j\to\infty} |x_j|_K \, ||e_j|| = 0$. Если $||e_j||^2 \in \Gamma$, то в качестве λ_j мы можем взять любой элемент поля K такой, что $|\lambda_j|_K = ||e_j||^2$. Если $||e_j||^2 \notin \Gamma$, то вообще невозможно найти $\lambda_j \in K$. Поэтому естественно включить числа λ_j в определение неархимедового гильбертова пространства. Далее мы будем рассматривать только счетные множества индексов. Для последовательности $\lambda = (\lambda_n) \in K^\infty$, $\lambda_n \neq 0$, мы полагаем

$$H_\lambda = \{f = (f_n) : \text{ ряд } \sum f_n^2 \lambda_n \text{ сходится}\}.$$

Из неархимедового критерия Коши следует, что

$$H_\lambda = \Big\{ f = (f_n) : \lim_{n\to\infty} |f_n|_K \sqrt{|\lambda_n|_K} = 0 \Big\}.$$

В пространстве H_λ введем норму, относительно которой векторы $e_j = (e_j^i) = (\delta_j^i)$ являются ортогональными, $\|f\|_\lambda = \max\limits_n |f_n|_K \sqrt{|\lambda_n|_K}$. Пространство H_λ является неархимедовым банаховым пространством. В пространстве H_λ введем скалярное произведение, полагая $(f, g)_\lambda = \sum f_n g_n \lambda_n$. Квадрат длины вектора $f \in H_\lambda$ определяется равенством $|f|_\lambda^2 = \sum f_n^2 \lambda_n$. Скалярное произведение $H_\lambda \times H_\lambda \to K$ непрерывно. Имеет место *неравенство Коши–Буняковского*:

$$|(f, g)_\lambda|_K \leqslant \|f\| \, \|g\| \,. \tag{3.1}$$

Определение 3.1. Тройка $(H_\lambda, (\cdot,\cdot)_\lambda, ||\cdot||_\lambda)$ называется координатным гильбертовым пространством [64], [72].

В абстрактном неархимедовом линейном пространстве E скалярное произведение задается произвольной невырожденной симметричной билинейной формой $(\cdot,\cdot)$: $E \times E \to K$. Очевидно, что невозможно ввести аналог положительно определенной билинейной формы. Например, для поля p-адических чисел любой элемент $\gamma \in Q_p$ можно представить в виде $\gamma = (x, x)_\lambda$, $x \in H_\lambda$ (см. [17]).

Тройки $(E_j, (\cdot,\cdot)_j, ||\cdot||_j)$, $j = 1, 2$, где E_j — неархимедовы банаховы пространства, $||\cdot||_j$ — нормы и $(\cdot,\cdot)_j$ — скалярные произведения, удовлетворяющие неравенству (3.1), являются изоморфными, если пространства E_1 и E_2 алгебраически изоморфны и алгебраический изоморфизм $E_1 \to E_2$ является изометрическим и унитарным, т. е.

$$||Ix||_2 = ||x||_1, \quad (Ix, Iy)_2 = (x, y)_1.$$

Определение 3.2. Тройка $(E, (\cdot,\cdot), ||\cdot||)$ является неархимедовым гильбертовым пространством, если она изоморфна координатному гильбертову пространству $(H_\lambda, (\cdot,\cdot)_\lambda, ||\cdot||_\lambda)$ для некоторых λ.

Отношение изоморфизма делит класс гильбертовых пространств на классы эквивалентности. Мы задаем класс эквивалентности гильбертовых пространств некоторым координатным представлением H_λ.

Пример 3.1. Пусть $\lambda = (1)$ и $\mu = (2^n)$. Пространства H_λ и H_μ принадлежат одному и тому же классу эквивалентности для поля $K = Q_p$, $p \neq 2$, но различным классам для поля $K = Q_2$.

По аналогии можно ввести неархимедовы гильбертовы пространства над квадратичными расширениями $Z = K(\sqrt{\tau})$. Для последовательности $\lambda = (\lambda_n) \in K^\infty$, $\lambda_n \neq 0$, мы вводим

$$H_\lambda = \{f = (f_n) \in Z^\infty : \text{ ряд } \sum |f_n|^2 \lambda_n \text{ сходится в поле } K\} =$$
$$= \{f = (f_n) : \lim_{n\to\infty} |f_n|_K \sqrt{|\lambda_n|_K} = 0\};$$

$$\|f\|_\lambda = \max_n |f_n|_K \sqrt{|\lambda_n|_K};$$

$$(f, g) = \sum f_n \bar{g}_n \lambda_n; \quad |f|_\lambda^2 = (f, f)_\lambda = \sum |f_n|^2 \lambda_n \in K.$$

Тройка $(H_\lambda, (\cdot,\cdot)_\lambda, ||\cdot||_\lambda)$ называется неархимедовым комплексным координатным гильбертовым пространством. Неархимедово комплексное координатное гильбертово пространство $(E, (\cdot,\cdot), ||\cdot||)$ определяется как изоморфный образ координатного гильбертова пространства.

Заметим, что пространство, сопряженное с неархимедовым гильбертовым пространством, не совпадает с ним.

Поэтому оснащенное гильбертово пространство естественно определить как четверку вложенных пространств $V \subset E \subset E' \subset V'$, где V — топологическое линейное пространство, плотно вложенное в E.

Мы также будем использовать в некоторых физических моделях неархимедово гильбертово пространство над полем комплексных p-адических чисел C_p. Все квадратные корни $\sqrt{\lambda_j}$ можно вычислить в C_p, поэтому нет необходимости включать эти коэффициенты в определение гильбертова пространства. Таким образом, нам нужно определить только стандартное пространство последовательностей:

$$H(C_p) = \{f = (f_n),\ f_n \in C_p : \text{ ряд } \sum f_n^2 \text{ сходится}\}.$$

Но имеется существенное отличие от обычного комплексного случая, так как в поле C_p нет инволюции. Скалярное произведение на $H(C_p)$ определяется как $(f, g) = \sum f_n g_n$. То, что скалярное произведение (f, f) принимает свои значения в поле C_p, а не в Q_p, является серьезной проблемой для наших дальнейших физических исследований.

§ 2.4. Пространство $L_2(K^n, e^{-|x|^2}dx)$ функций, квадратично интегрируемых относительно распределения Гаусса

В пространстве целых функций $A(K^n, Z)$ рассмотрим каноническое распределение Гаусса

$$\nu(dx) = e^{-|x|^2}dx, \quad |x|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2.$$

Используя тот факт, что пространство A является алгеброй, введем на нем скалярное произведение

$$(f, g) = \int\limits_{K^n} f(x)\bar{g}(x)e^{-|x|^2}dx \tag{4.1}$$

и квадрат длины функции f

$$|f|^2 = \int\limits_{K^n} |f(x)|^2 e^{-|x|^2}dx \in K. \tag{4.2}$$

Алгебра A является топологической, поэтому скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ непрерывно на $A \times A$. Символом $H_\alpha(x)$ будем обозначать полиномы Эрмита, соответствующие гауссовскому распределению ν,

$$H_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)}(x_1,\ldots,x_n) = H_{\alpha_1}(x_1)\ldots H_{\alpha_n}(x_n).$$

Утверждение 4.1. Полиномы Эрмита $H_\alpha(x)$ ортогональны относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ и

$$\int\limits_{K^n} H_\alpha^2(x)e^{-|x|^2}dx = 2^{|\alpha|}\alpha!.$$

Это утверждение вытекает из примера 1.1.

Теорема 4.1 (оценка роста коэффициентов Эрмита для целых функций). Пусть $f \in A$. Тогда для коэффициентов Эрмита $\tilde{f}_\alpha = (f, H_\alpha)/(H_\alpha, H_\alpha)$ выполняется неравенство

$$\left|\tilde{f}_\alpha\right|_K \leqslant \frac{\|f\|_R}{|\alpha!|_K \left(R\,|2|_K\right)^{|\alpha|}} \tag{4.3}$$

для всех $R \geqslant 1/\sqrt{|2|_K}$.

Доказательство. Пусть $n = 1$. Тогда, используя пример 1.1, получаем

$$\pi_n = (f, H_n) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{n+2j}(2j+1)\cdot\ldots\cdot(2j+n)(2j-1)!!\,2^{-j}.$$

Следовательно,

$$|\pi_n|_K \leqslant \sup_j \left(|f_{n+2j}|_K\, R^{n+2j}\right)\left(\frac{1}{|2|_K\, R^2}\right)^j \frac{1}{R^n}.$$

Теорема 4.2. Полиномы Эрмита $H_\alpha(x)$ задают базис в пространстве целых функций A.

Доказательство. Пусть $n = 1$. Оценим нормы полиномов Эрмита в A. Используя рекурентное соотношение $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$, получаем

$$\|H_{n+1}\|_R \leqslant |2|_K\, R\max\left(\|H_n\|_R\,, \|H_{n-1}\|_R\right) \leqslant \leqslant \left(|2|_K\, R\right)^{n+1}, \quad R \in \Gamma, \quad R \geqslant 1.$$

Используя оценку (4.3), получаем

$$\left|\tilde{f}_n\right|_K \|H_n\|_R \leqslant \|f\|_{R_1} R^n/R_1^n\, |n!|_K \leqslant \|f\|_{R_1} (bR/R_1)^n \to 0$$

при $R_1 > bR$. Следовательно, ряд Фурье, соответствующий эрмитовым полиномам $\sum \tilde{f}_n H_n(x)$, сходится в пространстве A для всех $f \in A$. Докажем, что он сходится к f. Для этого нам достаточно показать, что $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$, где $g(x)$ — сумма ряда. С помощью прямых вычислений покажем, что

$$g(0) = \sum \tilde{f}_n H_n(0) = f(0).$$

Аналогично можно рассмотреть производную в нуле. Таким образом, мы доказали, что

$$f(x) = \sum_\alpha \tilde{f}_\alpha H_\alpha(x) \tag{4.4}$$

для любых $f \in A$.

Утверждение 4.2. Пусть f, $g \in A$. Тогда

$$(f, g) = \sum_\alpha \tilde{f}_\alpha \tilde{g}_\alpha 2^{|\alpha|}. \tag{4.5}$$

Для доказательства этого утверждения достаточно использовать теорему 4.1 и утверждение 4.1.

Введем на пространстве A норму, относительно которой полиномы Эрмита ортогональны:

$$\|f\| = \max_{\alpha} |f_\alpha|_K \sqrt{|\alpha!|_K \, |2|_K^{|\alpha|}}.$$

Пополнение пространства целых функций относительно этой нормы называется пространством функций, квадратично интегрируемых относительно распределения Гаусса ν. Оно обозначается через $L_2(K^n,\, \nu)$.

Утверждение 4.3. $L_2(K^n, \nu) = \{f = \sum\limits_{\alpha} \tilde{f}_\alpha H_\alpha$: ряд $|f|^2 = \sum \left|\tilde{f}_\alpha\right|^2 \alpha! 2^{|\alpha|}$ сходится $\} = \{f = \sum\limits_{\alpha} \tilde{f}_\alpha H_\alpha$: $\lim\limits_{|\alpha|\to\infty} \left|\tilde{f}_\alpha\right|_K |\alpha!|_K \, |2|_K^{|\alpha|} = 0\}$.

Скалярное произведение (4.5) непрерывно на $L_2(K^n, \nu)$, и выполняется неравенство Коши–Буняковскго (3.1). Тройка $(L_2(K^n, \nu), (\cdot, \cdot), \|\cdot\|)$ является неархимедовым комплексным гильбертовым пространством класса $H_{(\alpha! 2^{|\alpha|})}$. Четверка

$$A(K^n, Z) \subset L_2(K^n, \nu) \subset L_2'(K^n, \nu) \subset A'(K^n, \nu) \tag{4.6}$$

является оснащенным гильбертовым пространством. Будем использовать равенства (4.1) и (4.2) для скалярного произведения и квадрата длины на $L_2(K^n, \nu)$. Заметим, что

$$\int\limits_{K^n} f(x)\bar{g}(x) e^{-|x|^2} dx = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{K^n} f_N(x) g_N(x) e^{-|x|^2} dx,$$

где

$$g_N(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant N} \tilde{g}_\alpha H_\alpha(x), \quad f_N(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant N} \tilde{f}_\alpha H_\alpha(x).$$

Утверждение 4.4. Справедливы включения $A(U_{\rho_1}, Z) \subset L_2(K^n, \nu) \subset A(U_{\rho_2}, Z)$, где

$$\rho_1 > \sqrt{\frac{b}{|2|_K}}, \quad \rho_2 > \sqrt{\frac{1}{b\,|2|_K}}.$$

Доказательство. (A) Пусть $f \in L_2$. Докажем, что ряд (4.4) сходится в $A(U_{\rho_2}, Z)$:

$$\left|\tilde{f}_n\right|_K \|H_n\|_{\rho_2} \leqslant \left(\left|\tilde{f}_n\right|_K \sqrt{|n! 2^n|_K}\right) |2|_K^{n/2} \, b^{n/2} \rho_2^n$$

при условии, что $\|f\|_{\rho_2} \leqslant \max \left|\tilde{f}_n\right|_K \|H_n\|_{\rho_2} \leqslant \|f\|$.

(Б) Пусть $f \in A(U_{\rho_1}, Z)$. Для вычисления коэффициентов Эрмита мы используем формулу

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{|H_n|^2} \sum_{j=n}^{\infty} f_i j(j-1) \cdot \ldots \cdot (j-n+1) \int\limits_K x^{j-n} e^{-x^2} dx.$$

Согласно теореме 4.1 найдем

$$\left|\tilde{f}_n\right|_K \leqslant \|f\|_{\rho_1} / (\rho_1 |2|_K)^n \, |n!|_K \, .$$

Рассмотрим функцию $g(x) = \sum \tilde{f}_n H_n(x)$. Покажем, что $g \in L_2(K^n, \nu)$. Действительно,

$$\left|\tilde{f}_n\right|_K \sqrt{|n!2^n|_K} \leqslant \|f\|_{\rho_1} / \left(\rho_1^n \sqrt{|2|_K^n \, |n!|_K}\right) \leqslant \|f\|_{\rho_1} \left(\frac{1}{\rho_1} \sqrt{\frac{b}{|2|_K}}\right)^n .$$

Более того,

$$\left|\tilde{f}_n\right|_K \|H_n\|_R \leqslant \left(\frac{bR}{\rho_1}\right)^n ,$$

т. е. если $R < \rho_1/b$, то ряд Фурье (4.4) сходится в пространстве $A(U_R, Z)$. Аналогично доказательству теоремы можно показать, что $\sum \tilde{f}_n H_n(x) = f|_{U_R}$.

Замечание 4.1. Таким образом, в неархимедовом случае все целые функции являются квадратично интегрируемыми относительно канонического распределения Гаусса, и все квадратично интегрируемые функции аналитичны.

§ 2.5. Пространство $L_2(K^n, dx)$ функций, квадратично интегрируемых относительно распределения Лебега

Введем функциональное пространство

$$U(K^n, Z) = \{f(x) = \varphi(x) e^{-|x|^2} : \varphi(x) \in A(K^n, Z)\}.$$

Топология на пространстве U индуцируется из пространства A целых функций с помощью изоморфизма $I \colon U \to A$, $I(f)(x) = f(x) e^{|x|^2}$. Пространство U является рефлексивным неархимедовым пространством Фреше. Мы выбираем это пространство в качестве пространства основных функций, а пространство U' как пространство обобщенных функций. Пространство обобщенных функций U' изоморфно пространству A', $I' \colon A' \to U'$.

Определение 5.1. Распределением Лебега на неархимедовом пространстве K^n называется обобщенная функция $dx = I'(\nu) \in U'(K^n, Z)$.

Для обозначения действия распределения Лебега dx на основную функцию $f \in U$ мы используем интегральную запись

$$(dx, f) = \int\limits_{K^n} f(x)\, dx.$$

Отметим основные свойства интеграла по распределению Лебега dx.

1. Линейность:

$$\int\limits_{K^n} (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int\limits_{K^n} f(x)\, dx + \mu \int\limits_{K^n} g(x)\, dx.$$

2. Предельный переход под знаком интеграла:

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{K^n} f_m(x)\, dx = \int\limits_{K^n} f(x)\, dx$$

при $f_m \to f$.

3. Теорема Фубини:

$$\int\limits_{K^n} f(x)\, dx = \int\limits_{K^n} \Big(\ldots \int\limits_{K^n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots \Big) dx_n.$$

Для доказательства теоремы Фубини достаточно показать, что распределение Лебега dx может быть представлено в виде прямого произведения распределений, т. е. $dx = dx_1 \otimes \ldots \otimes dx_n$.

Введем функциональное пространство

$$W(K^n, Z) = \{f(x) = \varphi(x) e^{-|x|^2/2} :\ \varphi(x) \in A(K^n, Z)\}.$$

Топология в пространстве W индуцируется из пространства A с помощью изоморфизма J: $W \to A$, $J(f) = f e^{|x|^2/2}$. Заметим, что если f, $g \in W$, то произведение $f \cdot g \in U$.

Формула интегрирования по частям (f, $g \in W$):

$$\int\limits_{K^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) g(x)\, dx = -\int\limits_{K^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\, dx.$$

Доказательство. Действительно,

$$\int\limits_{K^n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) g(x)\, dx + f(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) \right) dx = \int\limits_{K^n} \left(\frac{\partial J(f)}{\partial x}(x) J(g)(x) + \right.$$
$$\left. + J(f)(x) \frac{\partial J(g)}{\partial x}(x) - 2x J(f)(x) J(g)(x) \right) \nu(dx) =$$
$$= \left(L^{-1}(J(f)) \otimes L^{-1} J(g)(x,y), (x+y) \exp \frac{(x+y)^2}{4} \right) -$$
$$- 2 \left(L^{-1}(J(f)) \otimes L^{-1} J(g)(x,y), \frac{\partial}{\partial x} \exp \frac{(x+y)^2}{4} \right) = 0.$$

Чтобы ввести скалярное произведение и квадрат длины на функциональном пространстве W, мы используем обычные формулы

$$(f, g) = \int\limits_{K^n} f(x) \bar{g}(x)\, dx, \tag{5.1}$$

$$|f|^2 = \int\limits_{K^n} |f(x)|^2\, dx. \tag{5.2}$$

Скалярное произведение $(\cdot, \cdot)\colon W \times W \to Z$ непрерывно (см. неравенство (3.1)). Функции Эрмита $\varphi_\alpha(x) = H_\alpha(x) e^{-|x|^2/2}$ ортогональны. Из предыдущей теоремы 4.1 следует, что функции Эрмита задают базис Шаудера в пространстве W, т. е. для любой функции $f \in W$ ряд

$$f(x) = \sum \tilde{f}_\alpha \varphi_\alpha(x),$$

где

$$\tilde{f}_\alpha = \frac{\int\limits_{K^n} f(x) \varphi_\alpha(x)\, dx}{\int\limits_{K^n} \varphi_\alpha^2(x)\, dx},$$

сходится в пространстве W. Отсюда следует, что (5.1) и (5.2) можно представить в координатной форме:

$$(f, g) = \sum_\alpha \tilde{f}_\alpha \tilde{g}_\alpha \alpha! 2^{|\alpha|}, \tag{5.3}$$

$$|f|^2 = \sum_\alpha |f_\alpha|^2 \alpha! 2^{|\alpha|}. \tag{5.4}$$

На функциональном пространстве W введем норму, относительно которой функции Эрмита ортогональны:

$$\|f\| = \max_{\alpha} |f_\alpha|_K \sqrt{|\alpha!|_K\, |2|_K^{|\alpha|}}.$$

Пополнение пространства $W(K^n, Z)$ по этой норме называется пространством функций, квадратично интегрируемых по распределению Лебега, и обозначается $L_2(K^n, dx)$. Заметим, что

$$L_2(K^n, dx) = \{f(x) = \sum_{\alpha} \tilde{f}_\alpha \varphi_\alpha(x) : \text{ряд } \sum_{\alpha} |f_\alpha|^2\, \alpha! 2^{|\alpha|} \text{ сходится}\} =$$
$$= \{f(x) = \sum_{\alpha} \tilde{f}_\alpha \varphi_\alpha(x) : \lim_{|\alpha|\to\infty} \left|\tilde{f}_\alpha\right|_K \sqrt{|\alpha!|_K\, |2|_K^{|\alpha|}} = 0\}.$$

Изоморфизм $J\colon W \to A$ продолжается до изоморфизма гильбертова пространства $J\colon\ L_2(K^n, dx) \to L_2(K^n, \nu)$. В частности, возникает оснащенное гильбертово пространство:

$$W(K^n, Z) \subset L_2(K^n, dx) \subset L_2'(K^n, dx) \subset W'(K^n, Z).$$

Утверждение 5.1. Имеет место включение $L_2(K^n, dx) \subset \subset A(U_\delta,\, Z)$, $\delta < \sqrt{|2|_K/b}$.

Доказательство. Функция $e^{-|x|^2/2}$ принадлежит пространству $A(U_\gamma, Z)$ при всех $\gamma < \sqrt{|2|_K/b}$. Из предыдущего утверждения 4.3 получаем

$$L_2(K^n, dx) \subset L_2(K^n, \nu) e^{-|x|^2/2} \subset A(U_{1/\sqrt{b|2|_K}}, Z) \subset A(U_\gamma, Z).$$

Замечание 5.1. Таким образом, в неархимедовом случае все функции, квадратично интегрируемые относительно распределения Лебега, являются аналитическими.

По аналогии мы можем ввести пространство K-значных функций, квадратично интегрируемых относительно распределений Гаусса и Лебега.

§ 2.6. Пространство $F_2(Z^n, \gamma)$ аналитических функций, квадратично интегрируемых относительно канонического комплексного распределения Гаусса

В пространстве целых функций $A(Z^{2n}, Z)$ рассмотрим каноническое распределение Гаусса $\gamma(dzd\bar{z}) = e^{-(z,\bar{z})}dzd\bar{z}$ (в случае большой размерности оно определяется так же, как и для размерности один, см.

пример 1.2). Введем скалярное произведение и квадрат длины в пространстве $A(Z^n, Z)$:

$$(f, g) = \int\limits_{Z^{2n}} f(z)\bar{g}(z)e^{-(z,\bar{z})}dzd\bar{z}; \quad |f|^2 = (f, f). \tag{6.1}$$

Мономы $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$, $\alpha_j = 0, 1, \ldots$, ортогональны, причем $|z^\alpha|^2 = \alpha!$. Более того, имеет место координатное представление для скалярного произведения (6.1): $(f, g) = \sum\limits_{\alpha=0}^{\infty} f_\alpha \bar{g}_\alpha \alpha!$. В пространстве $A(Z^n, Z)$ введем норму, относительно которой мономы z^α ортогональны: $\|f\| = \max\limits_\alpha |f_\alpha|_K \sqrt{|\alpha!|_K}$. Пополнение пространства $A(Z^n, Z)$ относительно этой нормы является пространством Z-аналитичных функций, являющихся квадратично интегрируемыми относительно распределения Гаусса γ. Это пополнение будем обозначать символом $F_2(Z^n, \gamma)$.

Утверждение 6.1. $F_2(Z^n, \gamma) = \{f(z) = \sum\limits_\alpha f_\alpha z^\alpha$: ряд $|f|^2 = \sum\limits_\alpha |f_\alpha|^2 \alpha!$ сходится в $K\} = \{f(z)\colon \lim\limits_{|\alpha| \to \infty} |f_\alpha|_K \sqrt{|\alpha!|_K} = 0\}$.

Теорема 6.1. Имеет место включение $F_2(Z^n, \gamma) \subset A(U_\rho, Z)$, где $\rho = 1/\sqrt{b}$.

Четверка пространств

$$A(Z^n, Z) \subset F_2(Z^n, \gamma) \subset F_2'(Z^n, \gamma) \subset A'(Z^n, Z)$$

является оснащенным гильбертовым пространством.

Теорема 6.2. Пусть $\sqrt{2} \in Z$, тогда пространства $L_2(K^n,\ dx)$ и $F_2(Z^n, \gamma)$ изоморфны.

Как обычно, изоморфизм $S\colon L_2(K^n, dx) \to F_2(Z^n, \gamma)$ определяется интегральным оператором

$$S(\varphi)(z) = \int\limits_{K^n} \varphi(x) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(|x|^2 - 2\sqrt{2}(x, z) + (z, z)\right)\right\} dx.$$

Мы можем сравнить пространства аналитических функций, квадратично интегрируемых относительно распределения Гаусса: в архимедовом случае — $F_2(C, \gamma)$; в неархимедовом случае — $F_2(Z, \gamma)$. Все полиномы с рациональными коэффициентами принадлежат обоим этим пространствам. Однако, например, функция $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^{n+1}$

не принадлежит пространству $F_2(C,\gamma)$, но принадлежит пространству $F_2(Z,\gamma)$:

$$|f|^2 = \int\limits_{Z^2} |f(z)|^2 \, e^{-(z,\bar{z})} dz d\bar{z} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (n+1)! = 2.$$

В тоже время функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ не принадлежит пространству $F_2(Z,\gamma)$, но принадлежит $F_2(C,\gamma)$: $|f|^2 = e$.

Таким образом, переход к неархимедовому случаю делает возможным интегрирование функций, которые в обычной теории не являются интегрируемыми. С другой стороны, в неархимедовом случае многие «хорошие» (с вещественной точки зрения) функции не интегрируемы.

§ 2.7. Неограниченность p-адического распределения Гаусса

Неархимедово распределение Гаусса корректно определено на пространстве целых аналитических функций. Можно ли продолжить гауссовское распределение до меры и определить интеграл Гаусса от произвольной непрерывной функции? Ответ на этот вопрос отрицательный (в противоположность действительному случаю). Данный параграф содержит (довольно нетривиальное) доказательство того, что p-адическое распределение Гаусса не является ограниченным. Как обычно, в p-адической теории случай $p = 2$ является «патологическим». В этом случае наше доказательство не работает для большого класса гауссовских корреляций. Таким образом, в общем случае вопрос о неограниченности p-адического распределения Гаусса остается открытым.

Пусть λ — некоторая мера в кольце p-адических целых чисел Z_p, см. гл. 1. Тогда λ определяется с помощью коэффициентов $\lambda_n = \lambda(C_x^n)$, где $C_x^n = \dfrac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!}$ — биномиальные полиномы (см. разложение Малера). Так как мера — это ограниченный Q_p-линейный функционал на пространстве непрерывных функций $C(Z_p)$, то последовательность λ_n ограничена. С другой стороны, если мы рассматриваем Q_p-линейный функционал λ на пространстве полиномов, таких что соответствующая последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена, то этот функционал можно расширить до непрерывного Q_p-линейного функционала на пространстве непрерывных функций $C(Z_p)$ — Q_p-значной меры.

Пусть λ некоторый Q_p-линейный функционал на пространстве полиномов. Мы можем определить формальный степенной ряд $f(x) = f_\lambda(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n.$$

Как обычно, формальный степенной ряд называется *ограниченным*, если коэффициенты $\{\lambda_n\}$ ограничены. Формальный степенной ряд $f(x) = f_\lambda(x)$ ограничен тогда и только тогда, когда функционал λ ограничен. Это соответствие (ограниченные формальные степенные ряды $f(x) \to$ меры $\lambda = \lambda_f$) является взаимнооднозначным и обратимым. Более подробное изложение можно найти в работе [70]. Более того, если

$$\lambda(x^n) = \int\limits_{Z_p} x^n d\lambda(x) = \alpha_n, \quad \lambda(C_x^n) = \int\limits_{Z_p} C_x^n d\lambda(x) = \lambda_n,$$

то

$$g(z) = f(e^z - 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (e^z - 1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^n.$$

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} (\log(1+x))^n,$$

где

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Попробуем реализовать p-адическое распределение Гаусса (обобщенную функцию) $\lambda = \gamma_{0,b}$, $b \in Q_p$ (для случая размерности один), как меру на Z_p. Наши рассуждения будут основываться на формуле для моментов:

$$\alpha_{2k} = \frac{2k!}{k!} \left(\frac{b}{2}\right)^k, \quad \alpha_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Формальный степенной ряд, соответствующий распределению Гаусса, имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n = \exp\left\{\frac{b}{2} (\log(1+x))^2\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{b}{2}\right)^n (\log(1+x))^{2n}.$$

Далее будет доказано, что коэффициенты разложения функции $f(x)$ не ограничены.

Теорема 7.1 (Эндо–Хренникова). Пусть $b/2 = p^a u$, где a — целое число и $|u_p| = 1$.

1) Если a четное, то для всех простых p коэффициенты $\{\lambda_n\}$ не ограничены.

2) Если a нечетное, то для всех нечетных p коэффициенты $\{\lambda_n\}$ не ограничены.

Для $l = 2np^{[a/2]+1}$, где $n = p^b$ (a — степень p), выполняется равенство

$$|\lambda_n|_p = p^{2n(1-\delta)+(n-1)/(p-1)},$$

где $\delta = 0$, если a четное, и $\delta = 1/2$, если a нечетное.

Доказательство этой теоремы будет основано на серии лемм.

Лемма 7.1. Пусть $n = a_0+a_1p+\ldots+a_tp^t$ p-адическое разложение положительного целого n. Тогда число $n!$ делится на степень p^g, где $g = (n-s)/(p-1)$ и $s = s_n = a_0+\ldots+a_n$.

Этот факт хорошо известен в теории чисел, см., например, [17], [106]. В частности, на этой лемме основывается важная оценка (1.5) гл. 1.

Лемма 7.2. Пусть $x_1,\ldots,x_n$ — неотрицательные действительные переменные, и пусть A — фиксированное положительное число. При условии, что $x_1+\ldots+x_n = A$ произведение $x_1\cdot\ldots\cdot x_n$ достигает своего максимального значения $(A/n)^n$, когда $x_1 = \ldots = x_n = A/n$.

Лемма 7.3. Пусть $f(x) = (A/x)^x$ функция от положительной действительной переменной. Тогда $f(x)$ достигает своего максимального значения при $x = A/e$; функция $f(x)$ монотонно возрастает на интервале $(0, A/e)$ и монотонно убывает на интервале $(A/e, \infty)$.

Лемма 7.4. Пусть $n = p^b$ — степень числа p, а m — фиксированное целое число такое, что $n < m < np$. Допустим, что значение $1/|x_1\cdot\ldots\cdot x_{2m}|_p$ достигает своего максимума для целочисленных переменных $x_1,\ldots,x_{2m}$, удовлетворяющих соотношению $x_1+\ldots+x_{2m} = 2np^{c+1}$. Тогда для некоторого u

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{2m-u} = p^{c+1},$$

$$x_{2m-u+1} = x_{2m-u+2} = \ldots = x_{2m-1} = p^c,$$

$$x_{2m} = kp^c, \quad 1 \leqslant k \leqslant p-1.$$

Доказательство. Мы можем изменить порядок переменных так, что $|x_1|_p \leqslant |x_2|_p \leqslant \ldots \leqslant |x_{2m}|_p$. Также можно допустить, что все, кроме последнего, x_i являются степенями p. Действительно, если $x_i = kp^d$ для $k \geqslant 2$, то $y_i = p^d$ и $y_{2m} = x_{2m}+(k-1)p^d$. Тогда $|y_{2m}|_p \leqslant |x_{2m}|_p$, и, следовательно,

$$1/|x_1x_2\cdot\ldots\cdot x_i\cdot\ldots\cdot x_{2m}|_p \leqslant 1/|x_1x_2\cdot\ldots\cdot y_i\cdot\ldots\cdot y_{2m}|_p.$$

Таким образом, можно допустить, что $x_1 = p^d,\ldots,x_{2m-1} = p^e$, $x_{2m} = kp^f$ при условии, что $d \geqslant \ldots \geqslant e \geqslant f$ и $(k,p) = 1$. Далее мы покажем, что $d = c+1$, $f = c$ и $k \leqslant p-1$.

Сначала покажем, что $f \geqslant c$. Будем доказывать методом от противного. Пусть $f < c$, тогда из условия $x_1+\ldots+x_{2m} = 2np^{c+1}$ следует, что $d \geqslant c+1$. Из этого же условия мы получаем, что $f = e = \ldots$ и сумма $z = x_{2m-v+1}+x_{2m-v+2}+\ldots+x_{2m}$ должна делиться на p^{f+1}

при некотором $v(\leqslant p)$. То есть мы получили, что $y_1 = p^{d-1}, \ldots, y_{v-1} = p^{d-1}$, $y_v = (p - v + 1)p^{d-1}$. Тогда

$$y_1 + \ldots + y_v + x_2 + \ldots + x_{2m-v} + z = 2np^{c+1},$$

$$1/|x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2m}|_p < 1/|y_1 \cdot \ldots \cdot y_v x_2 \cdot \ldots \cdot y_{2m-v} z|_p.$$

Но по условию $1/|x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2m}|_p$ достигает максимального значения. Противоречие. Следовательно, f должно быть $\geqslant c$.

Теперь покажем, что $d \leqslant c + 1$. Будем использовать метод доказательства от противного. Пусть $d > c + 1$. Тогда из условия $x_1 + \ldots + x_{2m} = 2np^{c+1}$ следует, что $f = c$. Аналогично предыдущим рассуждениям получаем, что сумма $z = x_{2m-v+1} + x_{2m-v+2} + \ldots + x_{2m}$ должна делиться на p^{c+1}. Получаем $y_1 = p^{d-1}, \ldots, y_{v-1} = p^{d-1}$, $y_v = (p - v + 1)p^{d-1}$. Тогда

$$1/|x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2m}|_p < 1/|y_1 \cdot \ldots \cdot y_v x_2 \cdot \ldots \cdot y_{2m-v} z|_p,$$

т. е. мы пришли к противоречию. Следовательно, d должно быть $\leqslant c + 1$.

Наконец покажем, что $k \leqslant p - 1$. Если $k = qp + r$, то $y_{2m-1} = qp^{f+1}$ и $y_{2m} = (r + 1)p^f$. Как было показано выше,

$$1/|x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2m}|_p < 1/|x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot y_{2m-1} y_{2m}|_p.$$

А это противоречит условию максимальности, т. е. k должно быть $\leqslant p - 1$.

Доказательство теоремы 7.1. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{b}{2}\right)^n (\log(1 + x))^{2n}.$$

Покажем, что последовательность коэффициентов $\{\lambda_l\}$ не ограничена. Напомним, что

$$\log(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Следовательно, коэффициенты λ_l при x^l можно записать в виде суммы

$$\sum_{m \leqslant l/2} \frac{(-1)^l}{m!} \left(\frac{b}{2}\right)^m \sum_{x_1, x, \ldots, x_{2m}} \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_{2m}}, \tag{7.1}$$

где суммирование производится по всем положительным целым числам $x_1, \ldots, x_{2m}$, удовлетворяющим условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2m} = l$.

Рассмотрим случай $b/2 = p^a u$, где a — целое и $|u_p| = 1$.

Пусть $a = 2(k+\delta)$ с целыми k, т. е. $\delta = 0$, если a четное, и $\delta = 1/2$, если a нечетное. И пусть $l = 2np^{k+1}$. Ниже будет показано, что значения $|\lambda_l|_p$ становятся произвольно большими с ростом $n = p^b$ (степень p).

Фактически, мы получили значение

$$|\lambda_l|_p = p^{2n(1+\delta)+(n-1)/(p-1)}, \tag{7.2}$$

которое равно $p^{2n+(n-1)/(p-1)}$ при $a = 2k$ и $p^{n+(n-1)/(p-1)}$ при $a = 2k+1$, для $n = p^b$ (степень p). Покажем, что только один член суммы (7.1) для коэффициентов λ_l принимает максимальное значение (7.2), тогда как все остальные члены этой суммы строго меньше, чем значение (7.2). Затем, используя утверждение 1.1 из гл. 1, мы получаем равенство (7.2) для коэффициентов λ_l.

Пусть $l = 2np^{k+1} = 2p^bp^{k+1} = 2p^{b+k+1}$ фиксировано. Обозначим

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) = \left|\frac{1}{m!}\left(\frac{b}{2}\right)^m (1/x_1, x_2, \ldots, x_{2m})\right|_p$$

и

$$M(m) = \max\{M(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}):\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{2m} = 2np^{k+1}\},$$

где x_1, …, x_{2m} принимают положительные целые значения. Будет показано, что только $M(n) = M(x_1, x_2, \ldots, x_{2m})(x_1 = \ldots = x_{2n} = p^{k+1})$ достигает максимального значения (7.2) среди всех членов коэффициентов λ_l.

Из леммы 7.2 следует, что $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2m} \leqslant ((2n/2m)p^{k+1})^{2m}$. Если $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2m} = p^c u$ при $(p, u) = 1$, то $|x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2m}|_p = p^{-c}$. Так как все x_1, …, x_{2m} являются положительными целыми числами, то

$$\begin{aligned} M(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) &= p^{(m-s)/(p-1)-am}|(1/x_1x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2m})|_p = \\ &= p^{(m-s)/(p-1)-am}p^c \leqslant p^{(m-s)/(p-1)-am}p^c u = \\ &= p^{(m-s)/(p-1)-am}x_1, x_2, \ldots, x_{2m} \leqslant \left(\frac{n}{m}p^{1-\delta+1/2(p-1)}\right)^{2m} p^{m-s/(p-1)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $m = n$. Если $x_1, \ldots, x_{2n} \neq p^{k+1}, \ldots, p^{k+1}$, то по лемме 7.2 $x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2n} < p^{2n(k+1)}$. Тогда, из предыдущих рассуждений следует, что

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) < p^{2n(1-\delta)+(n-1)/(p-1)}.$$

Покажем, что

а) Если $m = n$, то $M(n) = p^{2n(1-\delta)+(n-1)/(p-1)}$ достигает своего максимального значения только когда $x_1 = \ldots = x_{2n} = p^{k+1}$.

Так как $0 \leqslant \delta < 1$ и $ep^{-1} < p^{1-\delta+1/2(p-1)} < ep$, то из леммы 7.3 мы получаем:

б) Если $m > np$, то $M(m) < M(np)$.

в) Если $m < n/p$, то $M(m) < M(n/p)$.

Более того, $M(np) = (p^{-\delta+1/2(p-1)})p^{-1/(p-1)} < M(n)$.

Теперь покажем, что

г) Если $n < m < np$, то $M(m) < M(n)$.

д) Если $n/p < m < n$, то $M(m) < M(n/p)$, где $\delta > (2p-3)/2(p-1)$ и $M(m) < M(n)$, где $\delta < (2p-3)/2(p-1)$.

е) $M(n/p) < M(n)$ тогда и только тогда, когда $\delta<(2p-3)/2(p-1)$.

Очевидно, что все наши рассуждения выполняются и в случае $\delta = 0$ (для четных a) или $\delta = 1/2$ (для нечетных a). Таким образом, для случая $p = 2$ и нечетного a покажем, что $M(n)$ является максимальным значением.

Продолжим доказательство *г*). Пусть $n < m < np$. Если $M(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{2m})$ достигает максимального значения $M(m)$, то согласно лемме 7.4 получаем

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{2m-u} = p^{k+1}, \quad x_{2m-u+1} = \ldots = x_{2m-1} = p^k,$$

$$x_{2m} = ip^k, \quad 1 \leqslant i \leqslant p-1.$$

Так как $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2m} = 2np^{k+1}$, то получаем

$$(2m-u)p^{k+1} + (u-1)p^k + ip^k = 2np^{k+1},$$

$$2(m-n)p = u(p-1) - (i-1). \tag{7.3}$$

Далее заметим, что

$$M(m) = M(x_1, \ldots, x_{2m}) = p^{2(m-s)/(p-1)-am+(2m-u)(k+1)+uk} =$$
$$= p^{(m-s)/(p-1)+2m(1-\delta)-u}.$$

Так как $M(n) = p^{(n-1)/(p-1)+2n(1-\delta)}$, то из этого следует, что $M(n)/M(m) = p^{2(n-m)(1-\delta)+(n-m)/(p-1)+u+(s-1)/(p-1)}$. Используя (7.3), мы получаем, что показатель степени в правой части этой формулы имеет вид

$$2(n-m)\left\{\frac{1}{2(p-1)} + (1-\delta)\right\} + \frac{1}{p-1}\{2(m-n)p + (i-1)\} + \frac{s-1}{p-1} =$$
$$= 2(m-n)\left\{\frac{1}{2(p-1)} + \delta\right\} + \frac{i-1}{p-1} + \frac{s-1}{p-1} > 0.$$

Значит, $M(n) > M(m)$.

Теперь докажем *д*). Здесь ситуация схожа с *г*). Если $n/p < m < n$ и $M(x_1, \ldots, x_{2m})$ достигает своего максимума $M(m)$, то по лемме 7.4 получаем, что

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{2m-u} = p^{k+2}, \quad x_{2m-u+1} = \ldots = x_{2m-1} = p^{k+1},$$

$$x_{2m} = ip^{k+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant p-1.$$

Далее,

$$(2m-u)p^{k+2} + (u-1)p^{k+1} + ip^{k+1} = 2np^{k+1},$$

$$2(pm-u)=(p-1)u-(i-1).$$

Так как

$$M(m)=p^{(m-s)/(p-1)+2m(2-\delta)-u}$$

и

$$M(n/p)=p^{(n/p-1)/(p-1)+2n(2-\delta)/p},$$

то

$$M(n/p)M(m)=p^{(s-1)/(p-1)+(n-pm)/(p(p-1))+2((n-pm)/p)(2-\delta)+u}.$$

Нетрудно заметить, что показатель степени в правой части этой формулы имеет вид

$$\frac{n-pm}{p(p-1)}+\frac{s-1}{p-1}+\frac{2(n-mp)}{p}(2-\delta)+\frac{2(mp-n)}{p-1}+\frac{i-1}{p-1}=$$
$$=\frac{mp-n}{p(p-1)}\left[-1-(p-1)(2-\delta)+2p\right]+\frac{s-1}{p-1}+\frac{i-1}{p-1}.$$

Мы показали, что $M(n/p)>M(m)$ при $\delta>(2p-3)/2(p-1)$.

Пусть теперь $\delta<(2p-3)/2(p-1)$. Тогда

$$\frac{M(n)}{M(m)}=\frac{p^{(n-1)/(p-1)+2n(1-\delta)}}{p^{(m-s)/(p-1)+2m(2-\delta)-u}},$$

т. е. показатель степени имеет вид

$$\frac{n-m}{p-1}+\frac{s-1}{p-1}+2(n-m)(1-\delta)-2m+2m+2\frac{m-n}{p-1}+\frac{i-1}{p-1}.$$

Следовательно, в этом случае $M(m)<M(n)$.

И, наконец, докажем (f). Очевидно, что

$$\frac{M(n)}{M(n/p)}=p^{(n/p)\{2(1-\delta)(p-1)-1\}}.$$

Это означает, что $M(n)>M(n/p)$ тогда и только тогда, когда $2(1-\delta)(p-1)>1$, т. е. $\delta<(2p-3)/2(p-1)$.

Мы рассмотрели распределение Гаусса для $b\in Q_p$. Несложно обобщить наши рассуждения на случай $b\in C_p$. Получаем следующий результат:

Теорема 7.2. Пусть $|b/2|_p=p^{-a}$, где $a=2(k+\delta)$, $0\leqslant\delta<1$.

1) Если $\delta<(2p-3)/2(p-1)$, то $M(n)=p^{2n(1-\delta)+(n-1)/(p-1)}$ является единственным максимальным значением.

2) Если $\delta>(2p-3)/2(p-1)$, то $M(n/p)=p^{2n(2-\delta)/p+(n-p)/p(p-1)}$ является единственным максимальным значением.

Основная проблема состоит в следующем: ограничен или не ограничен p-адический интеграл Гаусса в случае, когда b принадлежит полю C_p и $\delta=(2p-3)/2(p-1)$? (В частности, когда $p=2$ и a нечетное.)

§ 2.8. Равномерное распределение Волкенборна

«Мера» Волкенборна уже изучалась в гл. 1. Но она не являлась корректно определенным математическим объектом, так как эта мера не была действительно неархимедовой мерой. Она не ограничена на алгебре замкнуто-открытых множеств. Теперь эта мера будет введена как распределение (обобщенная функция). Это элемент пространства $A'(Q_p)$. Используя определение гл. 1, мы получаем, что

$$u(a) = \int_{Z_p} e^{ax} dx = \frac{a}{e^a - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n a^n}{n!}.$$

Эта функция принадлежит пространству A_0. И мы вводим распределение Волкенборна как элемент A' с преобразованием Лапласа $L'(m)(a) = u(a)$.

Глава 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАУССА И ФЕЙНМАНА НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НАД НЕАРХИМЕДОВЫМИ ПОЛЯМИ

По аналогии со случаем конечной размерности (гл. 2) определения интегралов Гаусса и Фейнмана основываются на теории распределений. Вариант этой теории предложен в работе [69], где пространства аналитических функций на неархимедовых бесконечномерных пространствах используются в качестве пространств основных функций (функции с бесконечномерным аргументом часто называют функционалами, но мы не будем использовать этот термин). Эта теория неархимедовых пространств является естественным обобщением на неархимедов случай теории аналитических бесконечномерных распределений [38], [43–45], [47], [48] над полями комплексных чисел и суперкоммутативными банаховыми алгебрами [49], [50], [52], [55], [56]. Другие (неаналитические) теории распределений на бесконечномерных пространствах были также разработаны для полей комплексных чисел. Это распределения на пространстве с фиксированной гауссовской мерой, а также распределения и обобщенные меры, соответствующие теории дифференцируемых мер Фомина. Об этих теориях см. [7], [34–36] (теория Гаусса) и [11], [115], [134] (теория, инвариантная относительно выбора меры). Подобные теории также могут быть построены в неархимедовом случае. Частный случай (функционалы p-адического белого шума) был рассмотрен в работе [64], см. гл. 6.

§ 3.1. Непрерывные полилинейные формы

Для неархимедового банахова пространства E полагаем

$$\Gamma_E = \{r \in R_+ : \ r = \|x\|, x \in E\} \equiv \|E\|.$$

Лемма 1.1. $\Gamma_{A(U_R,K)} = \Gamma$.

Утверждение 1.1. Пусть E неархимедово банахово пространство, для которого $\Gamma_E = \Gamma$. Тогда

$$\sup_{\|x_j\|\leqslant 1} |b(x_1, \ldots, x_n)|_K = \sup_{\|x_j\|\neq 0} |b(x_1, \ldots, x_n)|_K / \|x_1\| \ldots \|x_n\|.$$

Доказательство.

1. Действительно,

$$\|b\| = \sup_{\|x_j\| \leqslant 1} |b(x_1, \ldots, x_n)|_K \leqslant |||b||| = \\ = \sup_{\|x_j\| \neq 0} |b(x_1, \ldots, x_n)|_K / \|x_1\| \ldots \|x_n\|.$$

2. Так как по условию $\Gamma_E = \Gamma$, то существует такой элемент a_j: $|a_j|_K = \|x_j\|$. Следовательно,

$$|||b||| = \sup_{\|x_j\| \neq 0} \left| b(x_1 a_1^{-1}, \ldots, x_n a_n^{-1}) \right|_K \leqslant \|b\|.$$

В силу леммы 1.1 утверждение 1.1 справедливо для непрерывных полилинейных форм на пространстве целых функций A (заметим, что любая непрерывная полилинейная форма является непрерывной относительно некоторой нормы).

Далее везде, мы будем обозначать символом X пространство целых функций A, а символом Y — пространство распределений A', $X_R = A(U_R, K)$, $Y_R = A'(U_R, K)$. Для топологического линейного пространства E над полем K будем использовать символ $L_n(E^n, K)$ для обозначения пространства n-линейных (над полем K) непрерывных форм b: $E^n \to K$.

Утверждение 1.2.

1. Пусть $b \in L_n(X^n, K)$. Тогда существует такое $R \in \Gamma$, что

$$\|b\|_R = \sup_{\alpha} |b_{\alpha_1 \ldots \alpha_n})|_K R^{-|\alpha|} < \infty, \tag{1.1}$$

где $b_\alpha = b(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_n})$.

2. Для любой последовательности чисел b_α, удовлетворяющих условию (1.1) при некотором $R \in \Gamma$, форма

$$b = \frac{\sum\limits_{\alpha} b_\alpha e^1_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e^1_{\alpha_n}}{\alpha!} \tag{1.2}$$

принадлежит пространству $L_n(X^n, K)$.

Доказательство.

1. Пусть $b \in L_n$. Тогда

$$M_R(b) = \sup_{\|f^j\|_R \leqslant 1} \left| b(f^1, \ldots, f^n) \right|_K < \infty$$

при некотором $R \in \Gamma$. Более того,

$$\|b\|_R = \sup_{\alpha} \left| b(e_{\alpha_1} a_R^{-|\alpha_1|}, \ldots, e_{\alpha_n} a_R^{-|\alpha_n|}) \right|_K,$$

где $\left\| e_{\alpha_j} a_R \right\|_R = 1$ для $j = 1, \ldots, n$. Таким образом, $\|b\|_R \leqslant M_R(b)$.

2. Следовательно, для всех форм, определяемых отношением (1.2), получаем

$$M_R(b) = \sup_{\|f^j\|_R \leqslant 1} |b_\alpha|_K \left| f^1_{\alpha_1}, \ldots, f^n_{\alpha_n} \right|_K =$$
$$= \sup_{\|f^j\|_R \leqslant 1} \sup_\alpha |b_\alpha|_K R^{-|\alpha|} \left| f^1_{\alpha_1} \right|_K R^{|\alpha_1|} \ldots \left| f^n_{\alpha_n} \right|_K R^{|\alpha_n|} \leqslant \|b\|_R.$$

Для завершения доказательства мы должны проверить тот факт, что ряд (1.2) абсолютно сходится в пространстве $L_n(X^n, K)$.

При доказательстве утверждения 1.2 мы показали, что

$$\|b\|_R = M_R(b).$$

Введем индуктивную топологию в пространстве непрерывных полилинейных форм $L_n(X^n, K)$. Получаем

$$L_{n,R}(X^n, K) = \{b \in L_n(X^n, K) : \|b\|_R < \infty\} = L_n(X^n_R, K).$$

Утверждение 1.3. Пространство $L_{n,R}(X^n, K)$ является неархимедовым банаховым пространством.

Мы имеем $L_n(X^n, K) = \lim\limits_{R\to\infty} \operatorname{ind} L_{n,R}(X^n, K)$. В силу предыдущего утверждения 1.3 пространство $L_n(X^n, K)$ является полным. Далее $|b|_R = \sup\limits_{\|f\| \leqslant 1} |b(f, \ldots, f)|_K$. Тогда $|b|_R \leqslant \|b\|_R \leqslant b^n |b|_R$. Следовательно, топологии, определенные нормами $|\cdot|_R$ и $||\cdot||_R$, эквивалентны.

По аналогии с утверждением 1.2 мы можем доказать следующее утверждение.

Утверждение 1.4.

1. Пусть $b \in L_n(Y^n, K)$. Тогда для всех $R \in \Gamma$ получаем

$$\|b\|_R = \sup_\alpha \frac{|b_\alpha|_K R^{|\alpha|}}{|\alpha!|_K} < \infty, \tag{1.3}$$

где $b_\alpha = b(e'_{\alpha_1}, \ldots, e'_{\alpha_n})$.

2. Для любой последовательности чисел b_α, удовлетворяющих условию (1.3) для всех $R \in \Gamma$, форма

$$b = \frac{\sum\limits_\alpha b_\alpha e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_n}}{\alpha!} \tag{1.4}$$

принадлежит пространству $L_n(Y^n, K)$.

В пространстве непрерывных полилинейных форм $L_n(Y^n, K)$ мы вводим проективную топологию $L_n(Y^n, K) = \lim\limits_{R\to\infty} \operatorname{proj} L_n(Y^n_R, K)$.

Утверждение 1.5. Пространство $L_n(Y^n, K)$ является неархимедовым пространством Фреше.

Утверждение 1.6. $L_n(Y^n, K) = L'_n(X^n, K)$.

Доказательство.

1. Пусть $\tau \in L_n(X_R^n, K)$, $b \in L_n(Y^n, K)$. Используя (1.2) и (1.4), получаем

$$(b, \tau) = \sum_\alpha \frac{b_\alpha \tau_\alpha}{\alpha!}.$$

Следовательно,

$$|(b, \tau)|_K \leqslant \sup_\alpha \frac{|b_\alpha|_K |\tau_\alpha|_K}{|\alpha!|_K} \leqslant \|b\|_R \|\tau\|_R.$$

2. Докажем, что ряд (1.2) сходится в пространстве $L_n(X^n, K)$. Пусть $\tau \in L_{n,R}$, $R_1 \in \Gamma$, $R_1 > R$. Тогда

$$\left\| \sum_{|\alpha|>N} \frac{\tau_\alpha e^1_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e^1_{\alpha_n}}{\alpha!} \right\|_{R_1} \leqslant \|\tau\|_R \left(\frac{R}{R_1}\right)^N \to 0.$$

3. Пусть $b \in L'_n(X^n, K)$. Тогда, используя пункт 2, получаем

$$(b, \tau) = \sum_\alpha \frac{b_\alpha \tau_\alpha}{\alpha!},$$

где $b_\alpha = b(e'_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e'_{\alpha_n})$. Далее полагаем

$$u_\alpha = \frac{a_R^{|\alpha|}(e^1_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e^1_{\alpha_n})}{\alpha!}.$$

Тогда $\|u_\alpha\|_R = 1$ и, следовательно,

$$\sup_\alpha \frac{|b_\alpha|_K R^{|\alpha|}}{|\alpha!|_K} = \sup_\alpha |(b, u_\alpha)|_K \leqslant \|b\|_R = \sup_{\|\tau\|_R \leqslant 1} |(b, \tau)|_K < \infty.$$

Утверждение 1.7. $L_n(X^n, K) = L'_n(Y^n, K)$.

Доказательство. Докажем, что ряд (1.4) сходится в пространстве $L_n(Y^n, K)$. Пусть $b \in L_n(Y^n, K)$, $R \in \Gamma$. Тогда

$$\left\| \sum \frac{b_\alpha e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_n}}{\alpha!} \right\|_R \leqslant \frac{\|b\|_{RR_1}}{R_1^N} \to 0, \quad R_1 > 1.$$

Пусть $\tau \in L'_n(Y^n, K)$. Тогда, используя пункт 1, имеем

$$(b, \tau) = \sum_\alpha \frac{b_\alpha \tau_\alpha}{\alpha!}$$

для всех $b \in L_n(Y^n, K)$. Так как функционал τ непрерывен, то существует $R \in \Gamma$: $\sup\limits_{\|b\| \leqslant 1} |(b, \tau)|_K < \infty$. Мы полагаем

$$v_\alpha = a_R^{-|\alpha|}(e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_n}).$$

Тогда $\|v_\alpha\|_R = 1$ и, следовательно,

$$\sup_\alpha |\tau_\alpha|_K R^{-|\alpha|} = \sup_\alpha |(v_\alpha, \tau)|_K < \infty.$$

Следствие 1.1. Пространства полилинейных форм $L_n(X^n, K)$, $L_n(Y^n, K)$ рефлексивны.

§ 3.2. Обобщенные функции на бесконечномерных пространствах

Символ $U_{R,\rho}$ будем использовать для обозначения замкнутого шара (радиуса $\rho \in \Gamma$) относительно нормы $\|\cdot\|_R$, $R \in \Gamma$ в пространстве X: $U_{R,\rho} = \{f\colon \|f\|_R \leqslant \rho\}$. Обозначим символом $A(U_{R,\rho})$ пространство аналитических функций $F\colon U_{R,\rho} \to K$:

$$F(f) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(f, \ldots, f), \tag{2.1}$$

где формы $b_n \in L_n(X^n, K)$ симметричны. Ряд (2.1) равномерно сходится на шаре $U_{R,\rho}$. Это эквивалентно тому, что

$$\sup_{f \in U_{R,\rho}} |b_n(f, \ldots, f)|_K \to 0, \quad n \to \infty.$$

Заметим, что

$$\sup_{f \in U_{R,\rho}} |b_n(f, \ldots, f)|_K = \rho^n |b_n|_R.$$

В пространстве $A(U_{R,\rho})$ мы введем нормы

$$|F|_{R,\rho} = \sup_n \sup_{f \in U_{R,\rho}} |b_n(f, \ldots, f)|_K = \sup_n \rho^n |b_n|_R,$$

$$\|F\|_{R,\rho} = \sup_n \rho^n \|b_n\|_R.$$

Используя результаты предыдущего параграфа, получаем

$$\|F\|_{R,\rho/b} \leqslant |F|_{R,\rho} \leqslant \|F\|_{R,\rho}. \tag{2.2}$$

Полагаем $A_\rho(X) = \lim\limits_{R\to\infty} \operatorname{ind} A(U_{R,\rho})$. Пространство $A_\rho(X)$ состоит из функций, аналитичных на шарах с фиксированным радиусом ρ по отношению ко всем нормам, которые определяют топологию на X. Заметим, что

$$U_{R_2,\rho} \subset U_{R_1,\rho}, \quad R_2 > R_1; \quad A(U_{R_2,\rho}) \supset A(U_{R_1,\rho}),$$

где $A(U_{R,\rho})$ — неархимедово банахово пространство, а $A_\rho(X)$ — полные неархимедовы топологические линейные пространства.

Обозначим символом $A_0(X)$ пространство функций, аналитичных в нуле, т. е. $A_0 = \lim\limits_{\rho\to 0} \operatorname{ind} A_\rho$. Заметим, что $A_{\rho_2} \subset A_{\rho_1}$, $\rho_1 < \rho_2$. Функциональное пространство $A_0(X)$ является бесконечномерным аналогом пространства $A_0(K^n)$.

Теорема 2.1 (аппроксимация цилиндрическими полиномами). Множество полиномов, зависящих от конечного числа переменных, всюду плотно в пространстве $A_0(X)$.

Доказательство. Сначала мы докажем, что ряд (2.1) сходится в пространстве $A_0(X)$. Для этого достаточно доказать, что для ρ, $R \in \Gamma$ данный ряд сходится в пространстве $A(U_{R,\rho})$. Действительно,

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} b_n\right|_{R,\rho} \leqslant \max_{n\geqslant N} \sup_{f\in U_{R,\rho}} |b_n(f,\ldots,f)|_K \to 0.$$

Осталось использовать тот факт, что ряд (1.2) сходится в пространствах $L_n(X^n, K)$ для форм b_n из (2.1).

Введем пространства

$$B_{R,\rho} = \Bigl\{F \in A_0 :\ \|F\|_{R,\rho} < \infty\Bigr\};\quad B_\rho = \lim_{R\to\infty} \operatorname{ind} B_{R,\rho}.$$

Из неравенства (2.2) следует, что

$$A_0 = \lim_{\rho\to 0} \operatorname{ind} \lim_{R\to\infty} \operatorname{ind} A(U_{R,\rho}) = \lim_{\rho\to 0} \operatorname{ind} \lim_{R\to\infty} \operatorname{ind} B_{R,\rho}.$$

Введем пространство последовательностей

$$\Pi(K^\infty) = \Bigl\{\pi = \{\pi_n\}_{n=0}^{\infty} :\ \pi_n = \{\pi_\alpha\},\quad \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\quad \pi_\alpha \in K,$$
$$\forall R,\rho \in \Gamma,\quad \|\pi\|_{R,\rho} = \sup_n \rho^{-n}\|\pi_n\|_R < \infty,\quad \|\pi_n\|_R = \sup_\alpha |\pi_n|_K R^{|\alpha|}\Bigr\}.$$

Теорема 2.2. Пространство распределений $A_0'(X)$ изоморфно пространству $\Pi(K^\infty)$.

Доказательство.

1. Пусть $J \in A_0'(X)$. Тогда для любых R и ρ получаем

$$\|J\|_{R,\rho} = \sup_{\|F\|_{R,\rho}\leqslant 1} |J(F)|_K < \infty.$$

Рассмотрим функции $F_{\alpha R\rho}(f) = f_{\alpha_1}\ldots f_{\alpha_n} a_R^{|\alpha|} a_\rho^{-n}$. Для этих функций получаем

$$\|F_{\alpha R\rho}\|_{R,\rho} = 1,\quad |J(F_{\alpha R\rho})|_K = |J(f_\alpha)|_K R^{|\alpha|}\rho^{-n}.$$

Для последовательности $\pi = \{J(f_\alpha)\}$ получаем $\|\pi\|_{R,\rho} \leqslant \|J\|_{R,\rho} < \infty$.

2. Пусть $\pi \in \Pi(K^\infty)$ и

$$J_\pi(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \pi_\alpha b_n(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_n}),$$

тогда

$$\|J_\pi\|_{R,\rho} = \sup_{\|F\|_{R,\rho} \leqslant 1} |J(F)|_K \leqslant \|\pi\|_{R,\rho} \|F\|_{R,\rho}.$$

Напомним, что

$$Y = \lim_{R \to 0} \operatorname{ind} Y_R, \quad Y_R = A'(U_R).$$

Функция F: $Y_R \to K$ является целой, если ряд (2.1) равномерно сходится на шаре любого радиуса $\rho \in \Gamma$ в пространстве Y_R. Обозначим $A(Y_R)$ пространство целых функций Y_R. Функция F: $Y \to K$ является целой, если ограничение F на пространство Y_R является целой функцией для любого $R \in \Gamma$. Пространство целых функций обозначим $A(Y)$. Это пространство бесконечномерное, и оно является аналогом пространства $A(K^n)$. Топология на пространстве целых функций $A(Y)$ определяется системой норм

$$|F|_{R,\rho} = \sup_n \sup_{\|f\|_R \leqslant \rho} |b_n(f, \ldots, f)|_K.$$

Пространство $A(Y)$ является неархимедовым пространством Фреше.

Введем пространство последовательностей

$$\Pi'(K^\infty) = \Big\{ \pi = \{\pi_n\}_{n=0}^{\infty} : \ \pi_n = \{\pi_\alpha\}, \quad \pi_\alpha \in K, \quad \exists R, \rho \in \Pi,$$
$$\|\pi\|_{R,\rho} = \sup_n \rho^{-n} \|\pi_n\|_R < \infty, \quad \|\pi_n\|_R = \sup_\alpha |\pi_n|_K R^{-|\alpha|} |\alpha!|_K \Big\}. \quad (2.3)$$

Т е о р е м а 2.3. Пространство распределений $A'(Y)$ изоморфно пространству $\Pi'(K^\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Пусть $J \in A'$. Тогда $\exists R, \rho \in \Gamma$: $\|J\|_{R,\rho} < \infty$. Рассмотрим функцию $F_{\alpha R \rho}(f) = a_\rho^{-n} a_R^{-|\alpha|} \alpha! f_{\alpha_1} \ldots f_{\alpha_n}$. Для таких функций $\|F_{\alpha R\rho}\|_{R,\rho} = 1$. Для последовательности $\pi = \{J(f_\alpha)\}$ получаем

$$\|\pi\|_{R,\rho} = \sup_n \sup_\alpha |J(F_{\alpha R \rho})|_K \leqslant \|J\|_{R,\rho} < \infty.$$

2. Пусть $\pi \in \Pi'(K^\infty)$. Получаем

$$J_\pi(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \pi_\alpha b_n(e'_{\alpha_1}, \ldots, e'_{\alpha_n}),$$

тогда

$$\|J_\pi\|_{R,\rho} = \sup_{\|F\|_{R,\rho}\leqslant 1} |J(F)|_K \leqslant \|\pi\|_{R,\rho}.$$

Введем пространства бесконечномерных дифференциальных операторов бесконечного порядка:

$$D_{R,\rho}(X) = \Big\{\pi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\alpha} \frac{\pi_\alpha}{\alpha!}\delta^{(\alpha)}(f) : \ \pi = \{\pi_\alpha\}, \quad \|\pi\|_{R,\rho} < \infty\Big\};$$

$$D_0(X) = \bigcap_{\rho\in\Gamma}\bigcap_{R\in\Gamma} D_{R,\rho}(X).$$

Следствие 2.1. $A_0'(X) = D_0(X)$.

Введем в пространстве распределений A_0' проективную топологию:

$$A_0'(X) = \lim_{\rho\to 0} \operatorname{proj} \lim_{R\to\infty} \operatorname{proj} D_{R,\rho}(X).$$

Утверждение 2.1. Пространство (обобщенных) основных функций (A_0') A_0 рефлексивно.

Определим пространство дифференциальных операторов $D_{R,\rho}(Y)$ по аналогии с $D_{R,\rho}(X)$. Тогда $D(Y) = \cup D_{R,\rho}(Y)$.

Следствие 2.2. $A'(Y) = D(Y)$.

В пространстве распределений введем топологию индуктивного предела:

$$A'(Y) = \lim_{\rho\to 0} \operatorname{ind} \lim_{R\to\infty} \operatorname{ind} D_{R,\rho}(Y).$$

Утверждение 2.2. Пространство (обобщенных) основных функций (A') A рефлексивно.

Прямое произведение $J_1 \otimes J_2$ распределений J_1, J_2 определяется соотношением

$$(J_1 \otimes J_2, \varphi(f^1, f^2)) = (J_1(J_2, \varphi(f^1, f^2))),$$

а свертка $J_1 * J_2$ распределений J_1, J_2 соотношением

$$(J_1 * J_2, \varphi(f)) = (J_1 \otimes J_2, \varphi(f^1 + f^2)).$$

Теорема 2.4. Пространства распределений A' и A_0' являются топологическими сверточными алгебрами.

Утверждение 2.3. Пространство B_R является неархимедовой банаховой алгеброй.

Доказательство. Действительно,

$$\|\varphi_1\varphi_2\|_{R,\rho} \leqslant \sup_n \rho^n \left\| \sum_{m_1+m_2=n} b_{m_1} a_{m_2} \right\|_R \leqslant$$
$$\leqslant \sup_n \rho^n \sup_{m_1+m_2=n} \|b_{m_1}\|_R \|a_{m_2}\|_R \leqslant \|\varphi_1\|_{R,\rho} \|\varphi_2\|_{R,\rho}.$$

Следствие 2.3. Пространство $A_0(X)$ основных функций является топологической алгеброй.

Из следствия 2.3 следует, что операция умножения распределения $J \in A_0'$ на основную функцию $\varphi \in A_0$ корректно определена.

Утверждение 2.4. Дифференциальный оператор $\partial/\partial f_\alpha$: $B_{R,\rho} \to B_{R,\rho}$ непрерывен, и имеет место неравенство

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial f_\alpha} \right\|_{R,\rho} \leqslant \frac{R^{|\alpha|}}{\rho} \|\varphi\|_{R,\rho}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial f_\alpha}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n(e_\alpha, f, \ldots, f),$$

$$\left\| \sum n b_n(e_\alpha, f, \ldots, f) \right\|_{R,\rho} =$$

$$= R^{|\alpha|} \sup_n \rho^{n-1} |n|_K \sup_{\|f_j\|_R \leqslant 1} \left| b_n(e_\alpha a_R^{-|\alpha|}, f_1, \ldots, f_n) \right|_K.$$

Следствие 2.4. Дифференциальный оператор $\partial/\partial f$: $A \to A_0$ непрерывен.

Из следствия 2.4 следует, что оператор дифференцирования в пространстве распределений $A_0'(X)$ корректно определен. Для полилинейной формы $a \in L_k(Y^n, K)$ введем дифференциальный оператор

$$a(D) = \sum_\alpha a_\alpha \frac{\partial^k}{\partial f_{\alpha_1} \ldots \partial f_{\alpha_n}}.$$

Утверждение 2.5. Пусть $a \in L_k(Y^n, K)$. Дифференциальный оператор $a(D)$: $B_{R,\rho} \to B_{R,\rho}$ непрерывен, и имеет место неравенство

$$\|a(D)F\|_{R,\rho} \leqslant \|a\|_R \rho^{-k} \|F\|_{R,\rho}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Из неравенства (2.4) следует, что

$$\|a(D)\varphi\|_{R,\rho} \leqslant \rho^{-k} \sup_\alpha |a_\alpha|_K R^{|\alpha|} \|\varphi\|_{R,\rho}.$$

Утверждение 2.6. Пусть коэффициенты дифференциального оператора

$$b(f, D) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(f) a_k(D)$$

принадлежат классу $B_{R,\rho}$:

$$\lim_{k \to \infty} \|b_k\|_{R,\rho} \|a_k\|_R \rho^{-k} = 0.$$

Тогда оператор $b(f, D)$: $B_{R,\rho} \to B_{R,\rho}$ непрерывен, и имеет место неравенство

$$\|b(f, D)\varphi\|_{R,\rho} \leqslant \|\varphi\|_{R,\rho} \max_k \|b_k\|_{R,\rho}\|a_k\|_R \rho^{-k}. \tag{2.6}$$

Утверждение 2.7. Пространство $A(Y)$ является неархимедовой алгеброй Фреше.

Утверждение 2.8. Дифференциальный оператор $\partial/\partial g$: $A(Y) \to A(Y)$ непрерывен, и имеет место неравенство

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial g_\alpha}\right\|_{R,\rho} \leqslant |\alpha!|_K R^{-|\alpha|}\rho^{-1}\|\varphi\|_{R,\rho}. \tag{2.7}$$

Для полилинейной (симметричной) формы $a \in L_k(X^k, K)$ введем дифференциальный оператор

$$a(D) = \sum_\alpha a_\alpha \frac{\partial^k}{\partial g_{\alpha_1} \ldots \partial g_{\alpha_n}}.$$

Утверждение 2.9. Пусть $a \in L_k(X^k, K)$. Дифференциальный оператор $a(D)$: $A(Y) \to A(Y)$ непрерывен, и имеет место неравенство (2.5).

Из утверждений 2.7 и 2.8 следует, что операторы дифференцирования и умножения на основную функцию определены в пространстве распределений $A'(Y)$. Аналогично вводятся пространства $A_0(X, Z)$, $A'_0(Y, Z)$, $A(Y, Z)$, $A'(Y, Z)$.

§ 3.3. Преобразование Лапласа на бесконечномерных пространствах

Утверждение 3.1. Пусть $g \in Y_R$, $\|g\|_R < (\rho b)^{-1}$. Тогда функция

$$F_g = \exp\{(g, \cdot)\} \in A(U_{R,\rho}).$$

Доказательство. Действительно,

$$\sup_{f \in U_{R,\rho}} \frac{|(g, f)^n|_K}{|n!|_K} \leqslant (b\|g\|_R \rho)^n .$$

Определение 3.1. Преобразование Лапласа распределения $J \in A'_0(X)$ определяется как функция $L(J)(g) = (J, F_g)$ на пространстве Y.

Теорема 3.1. Преобразование Лапласа L: $A'_0(X) \to A(Y)$ является изоморфизмом.

Доказательство.

1. Пусть $J \in A'_0$, $L(J) = 0$. Тогда $(J, P_c) = 0$ для любого цилиндрического полинома P_c. Но из теоремы 2.1 следует, что множество

цилиндрических полиномов всюду плотно на пространстве A_0. Следовательно, $(J, F) = 0$ для $F \in A_0$. Таким образом, мы показали, что $\operatorname{Ker} L = \{0\}$.

2. Пусть $J \in A_0'$. Мы докажем, что $L(J) \in A$. Действительно,

$$\sup_n |n!|_K^{-1} \sup_{\|g\|_R \leqslant \rho} |(J, (g, \cdot)^n)|_K \leqslant \|J\|_{R,\rho_1} \sup_n (b\rho\rho_1)^n.$$

Выбирая $\rho_1 \in \Gamma$, $\rho_1 < (b\rho)^{-1}$ получаем, что $\|L(J)\|_{R,\rho} < \infty$.

3. Пусть $F \in A$, $F(g) = \sum b_n(g)$. Тогда

$$J(f_\alpha) = \frac{n!}{\alpha!} b_n(e'_{\alpha_1}, \ldots, e'_{\alpha_n}).$$

Покажем, что функционал J, определенный последовательностью $\{J(f_\alpha)\}$, принадлежит пространству A_0':

$$\sup_n \rho^{-n} \sup_\alpha |(J, (f_\alpha))|_K R^{|\alpha|} \leqslant \|F\|_{1/\rho, R_1} < \infty.$$

Остается показать, что $L(J) = F$.

Из теоремы 3.1 мы получаем бесконечномерное исчисление Лапласа:

$$A_0'(X) \xrightarrow{L} A(Y), \quad A_0(X) \xleftarrow{L'} A'(Y). \tag{3.1}$$

Рассматривая функции со значениями в квадратичном расширении Z поля K вместо функций со значениями в поле K, т. е.

$$A_0(A(K^n, Z), Z), \quad A(A'(K^n, Z), Z),$$

мы можем ввести преобразование Фурье распределения $J \in A_0'$:

$$F(J)(g) = \left(J, \exp\left\{\sqrt{\tau}(g, \cdot)\right\}\right).$$

Теорема 3.2. Преобразование Фурье $F\colon A_0' \to A$ является изоморфизмом.

Мы получаем исчисление Фурье

$$A_0'(X, Z) \xrightarrow{F} A(Y, Z), \quad A_0(X, Z) \xleftarrow{F'} A'(Y, Z). \tag{3.2}$$

Для исчисления Фурье справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3 (свойства преобразования Фурье). Пусть J, J_1, $J_2 \in A_0'(X,Z)$, μ, μ_1, $\mu_2 \in A'(Y,Z)$. Тогда

1. $F(J_1 * J_2) = F(J_1)F(J_2)$; $\quad F'(\mu_1 * \mu_2) = F'(\mu_1)F'(\mu_2)$.
2. $\dfrac{\partial}{\partial g_\alpha} F(J) = \alpha!\sqrt{\tau} F(f_\alpha, J)$; $\quad \dfrac{\partial}{\partial f_\alpha} F'(\mu) = \alpha!\sqrt{\tau} F'(g_\alpha, \mu)$.
3. $F(\dfrac{\partial J}{\partial f_\alpha}) = -\alpha!\sqrt{\tau} g_\alpha F(J)$; $\quad F'(\dfrac{\partial \mu}{\partial g_\alpha}) = -\alpha!\sqrt{\tau} f_\alpha F'(\mu)$.

Определение 3.2. Распределение Гаусса на неархимедовом пространстве Y вводится как распределение (бесконечномерного аргумента) $\gamma_{\alpha,\beta} \in A'(Y)$ с преобразованием Лапласа

$$L'(\gamma_{\alpha,\beta})(x) = \exp\left\{\frac{1}{2} b(x,x) + (a,x)\right\},$$

где $a(\in Y)$ — среднее значение, b (симметричная форма, принадлежащая $L_2(X^2, K)$) — корреляционный функционал.

Определение 3.3. Распределение Фейнмана на неархимедовом пространстве Y вводится как обобщенная функция (бесконечномерного аргумента) $\gamma_{a,\sqrt{\tau}b}$ с преобразованием Фурье

$$F'(\gamma_\alpha, \sqrt{\tau} b)(x) = \exp\left\{\tau \frac{\sqrt{\tau}}{2} b(x,x) + \sqrt{\tau}(a,x)\right\},$$

где $a(\in Y)$ — среднее значение, b (симметричная форма, принадлежащая $L_2(X^2, K)$) — корреляционный функционал.

Далее будем использовать интегральную запись

$$(\gamma_{a,b}, \varphi) = \int_Y \varphi(g)\gamma_{a,b}(dg), \quad (\gamma_{a,\sqrt{\tau}b}, \varphi) = \int_Y \varphi(g)\gamma_{a,\sqrt{\tau}b}(dg).$$

§ 3.4. Линейные уравнения в частных производных на бесконечномерных пространствах

Для дифференциального оператора

$$b(f,D) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(f) a_k(D), \quad b_k \in A_0(X,K), \quad a_k \in L_k(Y,K),$$

полагаем

$$\sigma_{R,\rho}(b) = \sup_k \|b_k\|_{R,\rho} \|a_k\|_R \rho^{-k}. \tag{4.1}$$

Для матричного дифференциального оператора $B(f,D) = (B_{ij}(f,D))$ полагаем

$$\sigma_{R,\rho}(B) = \max_{i,j} \sigma_{R,\rho}(B_{i,j}).$$

Теорема 4.1. Пусть коэффициенты матричного дифференциального оператора $B(f, D)$ принадлежат $B_{R,\rho}$ и $L_k(Y, K)$ и выполняется условие

$$\lim_{k\to\infty} \|b_{ijk}\|_{R,\rho} \|a_{ijk}\|_R \rho^{-k} = 0.$$

Тогда на интервале $|t|_K < (b\sigma_{R,\rho})^{-1}$, где b коэффициент из неравенства (1.5) гл. 1, существует единственное решение задачи Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, f) = B(f, D)F(t, f), \quad F(0, f) = \Phi(f), \tag{4.2}$$

которое принадлежит пространству $B_{R,\rho}$ и является аналитическим относительно t.

В самом деле, из (2.5) следует, что

$$\|\exp\{tB(f, D)\Phi\|_{R,\rho} \leqslant C\sup_n (|t|_K b)^n \|B^n(f, D)\Phi\|_{R,\rho} \leqslant \\ \leqslant C\sup_n (|t|_K b\sigma_{R,\rho}(B))^n \|\Phi\|_{R,\rho}.$$

Следствие 4.1. Задача Коши имеет единственное локальное решение в пространстве $B_{R,\rho}$ для любого дифференциального оператора конечного порядка с коэффициентами $b_{ijk} \in B_{R,\rho}$ и $a_{ijk} \in L_k$.

Следствие 4.2. Пусть $b_j(f, D)$, $j = 0, \ldots, m-1$, дифференциальный оператор с коэффициентами $b_{jk} \in B_{R,\rho}$ и $a_{jk} \in L_k$ такими, что

$$\lim_{k\to\infty} \|b_{jk}\|_{R,\rho} \|a_{jk}\|_R \rho^{-k} = 0.$$

Тогда в пространстве $B_{R,\rho}$ существует единственное решение задачи Коши

$$\frac{\partial^m F}{\partial t^m}(t, f) + \sum_{j=0}^{m-1} b_j(f, D) \frac{\partial^j F}{\partial t^j}(t, f) = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial^j F}{\partial t^j}(0, f) = \Phi_j(f), \quad j = 0, \ldots, m-1, \tag{4.4}$$

на интервале $|t|_K < (b\gamma)^{-1}$, $\gamma = \max\limits_j \sigma_{R,\rho}(b_j)$. Это решение является аналитическим относительно t.

Следствие 4.3. Пусть $B(f, D)$ — дифференциальный оператор конечного порядка. Тогда задача Коши (4.2) имеет локальное решение в пространстве $A_0(X, K)$. Это решение единственно в классе таких функций.

Пример 4.1 (уравнение теплопроводности). Пусть

$$\sup_\alpha \frac{|b_\alpha|_K R^{2|\alpha|}}{|\alpha!|_K} < \infty$$

для всех $R \in \Gamma$. Тогда задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, f) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial f_\alpha^2}(t, f) \tag{4.5}$$

имеет решение на интервале

$$|t|_K < \rho^2 \left(b \sup_\alpha \frac{|b_\alpha|_K R^{|\alpha|}}{|\alpha!|_K} \right)^{-1}$$

для $\phi \in B_{R,\rho}$. Задача Коши для уравнения теплопроводности с потенциалом

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, f) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha \frac{\partial^2 F}{\partial f_\alpha^2}(t, f) + V(f)F(t, f) \tag{4.6}$$

имеет решение на интервале

$$|t|_K < b^{-1} \max \left[\|V\|_{R,\rho}, \max_\alpha \frac{|b_\alpha|_K R^{|\alpha|} \rho^2}{|\alpha!|_K} \right].$$

Это можно доказать по аналогии со случаем пространства $A_0(X, Z)$. Задача Коши имеет локальное решение для уравнения Шредингера с потенциалом

$$\frac{h}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, f) = \frac{h^2}{2} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha \frac{\partial^2 \Psi}{\partial f_\alpha^2}(t, f) - V(f)\Psi(t, f). \tag{4.7}$$

Таким образом, в неархимедовом случае уравнение теплопроводности и уравнение Шредингера имеют локальное решение в пространстве A_0 для аналитического потенциала с произвольно быстрым ростом.

Применим оператор Лапласа $(L')^{-1}$ к задаче Коши (4.2) и (4.3), (4.4). Получаем задачу Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, g) = B(g, D)G(t, g), \quad G(0, g) = \Psi(g), \tag{4.8}$$

в пространстве $A'(Y, K)$ распределений, где

$$B^{ij}(D, g) = \sum_{k=0}^{N} b_k^{ij}(D) a_k^{ij}(g), \quad b_k^{ij} \in A_0, \quad a_k^{ij} \in L_k;$$

и задачу Коши

$$\frac{\partial^m G}{\partial t^m}(t, f) + \sum_{j=0}^{m-1} b_j(D, g) \frac{\partial^j G}{\partial t^j}(t, f) = 0, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial^{j1} G}{\partial t^j}(0, g) = \Psi_j(f), \quad j = 0, \ldots, m-1, \tag{4.10}$$

где

$$b_j(D, g) = \sum_{k=0}^{N} b_{jk}(D) a_{jk}(g), \quad b_{jk} \in A_0, \quad a_{jk} \in L_k.$$

Следствие 4.4. Задачи Коши (4.8) и (4.9), (4.10) имеют локальное решение в пространстве распределений $A'(Y, K)$. Это решение единственно в классе функций, принимающих значения в пространстве $A'(Y, K)$ и являющихся аналитическими относительно t.

Следующее утверждение вытекает из утверждений 2.7 и 2.9.

Утверждение 4.1. Дифференциальный оператор конечного порядка

$$b(g, D) = \sum_{k=0}^{N} b_k(g) a_k(D), \quad b_k \in A(Y, K), \quad a_k \in L_k(X, K),$$

непрерывен в пространстве $A'(Y, K)$, и имеет место неравенство (2.5).

Постоянная $\sigma_{R,\rho}(b)$ определяется условием (4.1).

Теорема 4.2. Пусть коэффициенты матричного дифференциального оператора $B(f, D) = (B_{ij}(f, D))$ (дифференциального оператора $b_j(f, D)$) принадлежат $A(Y, K)$ и $L_k(X, K)$ и выполняется

$$k = \overline{\lim_{R,\rho \to \infty}} \sigma_{R,\rho}(B) \quad (\text{или } \sigma_{R,\rho}(b) < \infty).$$

Тогда задача Коши (4.2) ((4.3), (4.4)) имеет решение в пространстве $A(Y, K)$ на интервале $|t|_K < (bk)^{-1}$. Это решение, являющееся аналитическим относительно t, единственно в этом пространстве и непрерывно зависит от начальных условий.

Для доказательства достаточно воспользоваться (2.6).

Следствие 4.5. Пусть $B(D) = (B_{ij}(D))$, где $B_{ij}(D) = \sum_{k=1}^{N} a_{ijk}(D)$ с $a_{ijk} \in L_k(X, K)$. Тогда задача Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, g) = B(D) G(t, g), \quad G(0, g) = \Psi(g), \tag{4.11}$$

имеет глобальное решение в пространстве $A(Y, K)$.

Следствие 4.6. Фундаментальное решение задачи Коши (4.11) в пространстве распределений $A'(Y, K)$ существует и единственно.

Уравнение теплопроводности (4.5) имеет решение в A при существенно более слабых ограничениях на коэффициенты оператора Лапласа:

$$\sup_{\alpha} |b_\alpha|_K R^{-|\alpha|} < \infty.$$

Фундаментальное решение для (4.5) является распределением Гаусса:

$$F(t, f) = \int\limits_Y F(0, y)\gamma_{f,2tB}(dy),$$

где B — диагональная матрица $B = (b_\alpha)$. Фундаментальное решение уравнения Шредингера является распределением Фейнмана. Если $V = 0$, то

$$\Psi(t, f) = \int\limits_Y \Psi(0, y)\gamma_{f,th\sqrt{\tau}B}(dy).$$

Обозначим символом $A^0(U_t, Y)$ пространство аналитических функций ω: $U_t \to U_t$, $U_t = \{s \in K\colon |s|_K \leqslant t\}$ с условием $\omega(0) = 0$. Для уравнения теплопроводности и уравнения Шредингера с потенциалом справедливы формулы Фейнмана–Каца:

$$F(t, f) = \int\limits_{A^0(U_t,Y)} F(0, \omega(t)) \exp\left\{\int\limits_0^t V(\omega(s))ds\right\} W_{f,B}(d\omega(s)),$$

$$\Psi(t, f) = \int\limits_{A^0(U_t,Y)} \Psi(0, \omega(t)) \exp\left\{-\frac{\sqrt{\tau}}{h}\int\limits_0^t V(\omega(s))ds\right\} \Phi_{f,B}(d\omega(s)),$$

где $W_{f,B}$ и $\Phi_{f,B}$ соответственно распределения Винера и Фейнмана на пространстве $A^0(U_t, Y)$. Заметим, что определенный интеграл для аналитической функции в поле K вводится обычным образом с помощью равенства $\int\limits_a^b t^n = \dfrac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$.

Глава 4. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ДЛЯ НЕАРХИМЕДОВОЗНАЧНЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

В работах [72], [64], [58] была предложена модель квантовой механики, в которой волновые функции принимают значения в квадратичных расширениях неархимедовых полей. В этих работах были построены представления Баргмана–Фока и Шредингера в пространствах функций, квадратично интегрируемых относительно неархимедовых распределений Гаусса и Лебега. Для квантовых приложений было построено исчисление псевдодифференциальных операторов, действующих в пространствах функций неархимедова аргумента с неархимедовыми значениями (данное исчисление является естественным обобщением исчислений псевдодифференциальных операторов в бесконечномерном случае [43], [45], [47], [48], [53], [54] и на суперпространстве [49], [50], [52], [55], [56]). Общим для всех этих исчислений является отсутствие меры Лебега. Все они строятся на основе теории распределений. В рамках исчисления псевдодифференциальных операторов доказывается принцип соответствия между квантовой механикой и классической неархимедовозначной механикой (были рассмотрены неархимедовы параметры деформации).

Линейные эволюционные уравнения с переменными коэффициентами на пространствах аналитических функций были изучены в работах [64], [57]. Получены теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных условий. Эти результаты использовались при исследовании уравнений неархимедовой математической физики. А также были получены достаточные условия существования решения уравнений Шредингера, Гейзенберга, Лиувилля и теплопроводности [64].

В работе [64] предложена модель статистической квантовой механики с неархимедовыми функциями распределения и изучены соответствующие эволюционные уравнения.

В связи с развитием модели квантовой механики, в которой волновые функции принимают значения в неархимедовых полях, возникло много новых математических проблем таких, как теория неархимедовых гильбертовых пространств [64], [72], спектральная теория операторов над этими полями [64] (прогресс здесь минимален). А также теория вероятностей, в которой вероятности могут принадлежать не только полю действительных чисел, но также и полям p-адических чисел [67]. Эта теория имеет наиболее интересные приложения (см. гл. 6).

Впервые неархимедовозначная квантовая механика возникла как математический формализм, обобщающий формализм обычной квантовой механики. Позднее были проведены исследования [76], [21], в которых были предложены физические реализации этого формализма. Во-первых, это статистическая интерпретация в рамках p-адической теории вероятностей. С этой точки зрения p-адическизначные квантовые модели являются обычными квантовыми моделями, в которых рассматриваются добавочные квантовые состояния, имеющие p-адическую вероятность реализации. Во-вторых, в космологических моделях была предпринята попытка интерпретировать p-адические значения как бесконечные величины. С этой точки зрения можно рассматривать системы с бесконечным числом частиц в фиксированном состоянии, бесконечные пространственно–временные интервалы.

Итак, перед нами встают две основные проблемы, а именно проблема построения математического формализма для квантовых теорий с неархимедовозначными функциями и проблема физической интерпретации этого формализма. Очевидно, что предложенная здесь интерпретация не единственна, и возможны другие применения полученного математического формализма.

§ 4.1. Представления Шредингера и Баргмана–Фока в неархимедовой квантовой механике

Состояния систем в неархимедовой квантовой механике в представлении Шредингера описываются функциями из пространства $L_2(K^n, dx)$. Наблюдаемые реализуются операторами в $L_2(K^n, dx)$, симметричными относительно скалярного произведения (5.1) гл. 2; среднее значение наблюдаемой $\hat{a}$ в состоянии φ, как обычно, определяется соотношением $\bar{a}_\varphi = (\hat{a}, \varphi, \varphi)$, а ее эволюция описывается уравнением Шредингера:

$$(-h/\sqrt{\tau})\psi(t) = \hat{H}\psi(t),$$

где $\hat{H}$ — гамильтониан.

Замечание 1.1 (о положительной определенности операторов квантовой механики). Очевидно, что невозможно ввести понятие положительной определенности для $\hat{H}$. Мы могли бы потребовать, чтобы $\mathrm{sign}_\tau\, \bar{H}_\varphi \geqslant 0$, но этого требования недостаточно даже для простейших неархимедовых моделей. Гамильтониан гармонического осциллятора

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 - 1\right)$$

имеет (как и в обычной квантовой механике) собственные значения $\lambda_n = n$ (собственные функции являются функциями Эрмита φ_n), $\bar{H}_{\varphi_n} = n$. Пусть $K = Q_2$, $\tau = 3$, $n = 3$. Тогда символ Гильберта [17] $(3, 3) = -1$ и, следовательно, $\mathrm{sign}_3 3 = -1$. С другой стороны, если $i = \sqrt{-1}$ принадлежит полю K, тогда $\mathrm{sign}_\tau(-1) = 1$ и, следовательно, оператор $(-\mathrm{I})$ должен быть положительным.

Замечание 1.2 (о самосопряженности операторов квантовой механики). Так как $L'_2(K^n, dx) \neq L_2(K^n, dx)$, сопряженный оператор $\hat{a}^*$: $L'_2 \to L'_2$ и самосопряженность оператора не может быть определена обычным способом. Мы можем ввести аналог самосопряженности с помощью спектрального разложения: $\hat{a} = \int\limits_K \lambda\, dE_\lambda$. Здесь оператор интегрирования понимается в слабом смысле $(\hat{a}f, g) = \int\limits_K \lambda\, d(E_\lambda f, g)$. Если $(E_\lambda f, g) \in A'_\rho$, то функции $u(\hat{a})$, $u \in A_\rho$, оператора $\hat{a}$ определяются следующим образом:

$$(u(\hat{a})f, g) = \int\limits_K u(\lambda)\, d(E_\lambda f, g).$$

Например, $(E_\lambda f, g) \in A'_1$ для гамильтониана $\hat{H}$ гармонических колебаний. Заметим, что этот оператор $\hat{H}$ ограничен и $||\hat{H}|| = 1$.

Замечание 1.3 (вероятностная интерпретация неархимедовой квантовой механики). Обобщенная функция $P_\varphi(\lambda) = |E_\lambda \varphi|^2 = (E_\lambda \varphi, E_\lambda \varphi)$ называется функцией распределения оператора $\hat{a}$, который наблюдается в состоянии φ. В частности, среднее значение $\bar{a}_\varphi$ может быть представлено как вероятностное среднее значение $\bar{a}_\varphi = \int \lambda\, dP_\varphi(\lambda)$. Однако невозможно вычислить вероятность того, что наблюдаемая величина $\hat{a}$, измеренная в состоянии φ, принадлежит борелевскому множеству Δ (во всяком случае, в нашей теории распределения).

Замечание 1.4 (предквантование). Если группа Γ дискретна, то уже на классическом уровне координаты q_j, моменты p_j, масса m и энергия H принимают дискретные значения. Таким образом, переход от классической вещественной системы к классической неархимедовой системе ведет к дискретизации наблюдаемых значений.

Если функция распределения наблюдаемой $\hat{a}$ в состоянии φ является гауссовской, $P_\varphi\,(d\lambda) = \gamma_{\bar{a}_\varphi, B_\varphi}$, то корректно определена вероятность того, что $\hat{a} \in [c, d]$: $P = \int\limits_c^d P_\varphi\,(d\lambda)$.

Псевдодифференциальный оператор (ПДО) $\hat{a}$ с (qp)-символом $a(q,p)$ определяется равенством $(\varphi \in W, a \in A)$:

$$\hat{a}(\varphi)(q) = \int\limits_{K^{2n}} a(q,p_1)\varphi(q_1)e^{\sqrt{\tau}(p_1,q-q_1)/h}dq_1dp_1.$$

В частности, операторы координаты $\hat{q}_j(\varphi)(q) = q_j(\varphi)(q)$ и импульса $\hat{p}_j(\varphi)(q) = \dfrac{h}{\sqrt{\tau}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial q_j}(q)$ являются ПДО с символами q_j и p_j. Это следует из формулы

$$\varphi(q) = \int\limits_{K^{2n}} \varphi(q_1)e^{\sqrt{\tau}(p_1,q-q_1)/h}dq_1dp_1. \tag{1.1}$$

Докажем эту формулу:

$$\int J(\varphi)(q_1)\exp\left\{-\frac{|q|^2}{2} + \frac{\sqrt{\tau}}{h}(p_1, q-q_1)\right\}dq_1dp_1 = \exp\left\{\frac{\tau}{2h^2}(B^{-1}a,a)\right\}$$
$$\int J(\varphi)(q_1)\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(B\left(x-\frac{\sqrt{\tau}}{h}B^{-1}a\right), x-\frac{\sqrt{\tau}}{h}B^{-1}a\right)\right\}dx,$$

где

$$x = q_1 \oplus p_1, \quad a = 0 \oplus q, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\tau}/h \\ \sqrt{\tau}/h & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя равенство Парсеваля, получаем

$$\exp\left\{-\frac{|q|^2}{2}\right\}$$
$$\int L^{-1}(J(\varphi))\otimes\delta(dx)\times\exp\left\{\frac{1}{2}(B^{-1}x,x)\right\}\times\exp\left\{\frac{\sqrt{\tau}}{h}(x,B^{-1}a)\right\} =$$
$$= \exp\left\{-\frac{|q|^2}{2}\right\}\int L^{-1}(J(\varphi))(dp)e^{(p,q)}.$$

Теорема 1.1 (формула композиции). Пусть $\hat{a}$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$ являются ПДО с символами a, a_1, $a_2 \in A(K^{2n})$, $\hat{a} = \hat{a}_1{}^\circ\hat{a}_2$. Тогда

$$a(q,p) = a_1 * a_2(q,p) =$$
$$= \int\limits_{K^n} a_1(q,p_1)a_2(q_1,p)e^{-\sqrt{\tau}(p-p_1,q-q_1)/h}dq_1dp_1. \tag{1.2}$$

Доказательство.

$$\hat{a}(\varphi)(q) = \int a_1(q, p_1) \int a_2(q_1, p)\varphi(q_2) \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{\sqrt{\tau}}{h} [(p_1, q - q_1) + (p, q_1 - q_2)] \right\} dq_1 dp_1 dq_2 dp_2.$$

Теорема 1.2. Пусть выполняются условия теоремы 1.1. Тогда

$$a(q, p) = a_1 \left(q, p + \frac{h}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) a_2(q_1, p) \bigg|_{q_1 = q}, \tag{1.3}$$

$$a(q, p) = \exp\left\{ \frac{h}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{\partial}{\partial p_1}, \frac{\partial}{\partial q_1} \right) \right\} a_1(p, q_1) a_2(q_1, p) \bigg|_{q_1 = q, p_1 = p}. \tag{1.4}$$

Доказательство. Достаточно доказать формулу (1.3) для функций $a_1 = \alpha_1(q)\alpha_2(p)$, $a_2 = \beta_1(q)\beta_2(p)$. Используя (1.2), получаем

$$a(q, p) = \alpha_1(q)\beta_2(p) = \int \alpha_2(p_1)\beta_1(q_1) e^{-\sqrt{\tau}(p_1 - p, q_1 - q)/h} dq_1 dp_1 =$$

$$= \alpha_1(q)\beta_2(p) \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\alpha_2^{(\alpha)}(p)}{\alpha!} \int \xi^\alpha \beta_1(q_1) e^{\sqrt{\tau}(\xi, q - q_1)/h} dq_1 d\xi.$$

Используя (1.1), получаем

$$a(q, p) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \left(\frac{h}{\sqrt{\tau}} \right)^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha a_1}{\partial p^\alpha}(q, p) \frac{\partial^\alpha a_2}{\partial q^\alpha}(q, p).$$

Таким образом, формула (1.3) доказана.

Теорема 1.3 (принцип соответствия между классической и квантовой механиками). Пусть $a_1, a_2 \in A$. Тогда

1. $\lim\limits_{h \to 0} a_1 * a_2(q, p) = a_1(q, p) a_2(q, p)$;
2. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{\tau}}{h} [a_1, a_2]_*(q, p) = \{a_1, a_2\}(q, p)$,

где $[a_1, a_2]_* = a_1 * a_2 - a_2 * a_1$, $\{a_1, a_2\}$ — скобки Пуассона.

Доказательство этой теоремы основано на формуле композиции (1.4).

Уравнение Гейзенберга на неархимедовом пространстве

$$\frac{h}{\sqrt{\tau}} \frac{d\hat{a}}{dt} = \left[\hat{a}, \hat{H} \right] \tag{1.5}$$

можно записать как уравнение для символов ПДО:

$$\frac{da(t,q,p)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h}{\sqrt{\tau}}\right)^{n-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n a}{\partial p^n}\frac{\partial^n H}{\partial q^n} - \frac{\partial^n a}{\partial q^n}\frac{\partial^n H}{\partial p^n}\right)(t,q,p). \quad (1.5а)$$

По принципу соответствия при $h \to 0$ уравнение Гейзенберга превращается в уравнение Лиувилля.

Представление Баргмана–Фока в неархимедовой квантовой механике реализуется в пространстве $F_2(Z^n, \gamma)$ посредством ПДО-исчисления с символами Вика:

$$\begin{gathered} \hat{a}(\varphi)(q) = \int\limits_{Z^{2n}} a(z,\bar{v})\varphi(v)e^{(\bar{v},z-v)/h}dvd\bar{v}, \\ a \in A(Z^{2n}, Z), \quad \varphi \in A(Z^{2n}, Z). \end{gathered} \quad (1.6)$$

Оператор рождения $\hat{a}_j^*\varphi = z_j\varphi$ и оператор уничтожения $a_j\varphi = h\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_j}$ являются ПДО с символами Вика z_j и $\bar{z}_j$. Это следует из формулы

$$\varphi(z) = \int\limits_{Z^{2n}} \varphi(v)e^{(\bar{v},z-v)/h}dvd\bar{v}. \quad (1.7)$$

Для распределения Гаусса имеет место формула интегрирования по частям $(\hat{a}_j\varphi, \psi) = (\varphi, \hat{a}_j^*\psi)$, φ, $\psi \in A$. Формула композиции для ПДО с символами Вика имеет вид

$$a = a_1 * a_2(z,\bar{z}) = \int\limits_{Z^{2n}} a_1(z,\bar{v})a_2(v,\bar{z})e^{-(z-v,\bar{z}-v)/h}dvdp\bar{v}; \quad (1.8)$$

$$a(z,\bar{z}) = a_1\left(z, \bar{z} + h\frac{\partial}{\partial v}\right) a_2(v,\bar{z})\Big|_{v=z}; \quad (1.9)$$

$$a(z,\bar{z}) = \exp\left\{h\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial \bar{v}}\right)\right\} a_1(z,\bar{v})\, a_2(v,\bar{z})\Big|_{v=z,\bar{v}=\bar{z}}. \quad (1.10)$$

Т е о р е м а 1.4. Пусть a, a_1, $a_2 \in A(Z^{2n}, Z)$. Тогда справедливы формулы (1.8)–(1.10).

Из (1.10) получаем следующую теорему.

Теорема 1.5 (принцип соответствия между классической и квантовой механиками). Пусть a_1, $a_2 \in A$. Тогда

1. $\lim\limits_{h\to 0} a_1 * a_2(z,\bar z) = a_1(z,\bar z)a_2(z,\bar z)$;

2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[a_1,a_2]_*(z,\bar z) = \{a_1,a_2\}(z,\bar z)$,

где

$$\{a_1,a_2\} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial a_1}{\partial \bar z_j}\frac{\partial a_2}{\partial z_j} - \frac{\partial a_1}{\partial z_j}\frac{\partial a_2}{\partial \bar z_j}\right).$$

Теорема 1.6 (эквивалентность представлений Шредингера и Баргмана–Фока). Пусть $\sqrt{2} \in Z$. Тогда представления Шредингера и Баргмана–Фока эквивалентны.

Если $\sqrt{2} \notin Z$ (например, $Z = Q_2(\sqrt{3})$), то вопрос об эквивалентности представлений Шредингера и Баргмана–Фока остается открытым.

§ 4.2. Неархимедова квантовая статистическая механика

В классической статистической схеме [14] можно рассмотреть или уравнение Лиувилля для распределения вероятностей $D_t(d\Omega)$, $\Omega = (q,p)$, в пространстве распределений

$$\frac{\partial D_t(d\Omega)}{\partial t} = \{D_t(d\Omega), H(\Omega)\}, \tag{2.1}$$

или уравнение Лиувилля для плотности вероятностей распределения $D(t,\Omega)$ на пространстве $L_2(K^n,dx)$. Переходя от уравнения Лиувилля на пространстве $L_2(K^n,dx)$ к уравнению Лиувилля в $L_2(K^n,dv)$: $D(t,\Omega) = P(t,\Omega)e^{-|\Omega|^2/2}$, мы получим

$$\frac{\partial P}{\partial t}(t,\Omega) = \{P(t,\Omega), H(\Omega)\} + u(\Omega)P(t,\Omega), \tag{2.2}$$

где

$$u(\Omega) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}q_j - \frac{\partial H}{\partial q_j}p_j\right).$$

В квантовой статистической схеме [14] статистический оператор фон Неймана D_t удовлетворяет уравнению Гейзенберга (1.5), а символ этого оператора удовлетворяет уравнению (1.6).

Так же как и для гамильтониана, невозможно ввести положительную определенность для статистического оператора D_t. Пусть, например (см.[14]), множество допустимых значений в момент $t = 0$ описывается функцией $(\ldots, \psi_n(x), \ldots)$ и вероятность n-го состояния равна ω_n, т.е. $\sum \omega_n = 1$. Тогда для ядра $D_t(x,x')$ статистического оператора $\hat{D}_t$ получаем

$$D_t(x, x') = \sum_n \omega_n \psi_n(t, x)\overline{\psi_n(t, x)},$$

где $\psi_n(t, x)$ — решения уравнения Шредингера с начальными условиями ψ_n. Следовательно,

$$\int h(x) D_t(x, x')\bar{h}(x)\, dx dx' = \sum_n \left| \int h(x)\psi_n(t, x)\, dx \right|^2.$$

Но $\mathrm{sign}_\tau \sum \omega_n \left| \int h(x)\psi(t, x) dx \right|^2 = -1$ в общем случае.

В рамках теории интегралов Гаусса каноническое распределение Гиббса для квадратичной функции Гамильтона определяется следующим образом:

$$D_t(d\Omega) = \exp\{-\beta H(\Omega)\} d\Omega.$$

§ 4.3. Теоремы существования и единственности для решений линейных уравнений в частных производных на неархимедовом пространстве

Пусть $\tau_\rho(a) = \sup\limits_\beta \left(\rho^{-|\beta|} \|a_\beta\|_\rho\right)$ для дифференциального оператора (бесконечного порядка) с переменными коэффициентами $a(x, D) = \sum\limits_0^\infty a_\beta(x) \dfrac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}$ и $\sigma_\rho(A) = \max \sigma_\rho(a_{ij})$ для матричного дифференциального оператора $A(x, D) = (a_{ij}(x, D))$.

Теорема 3.1. Пусть $a_{ij\beta}$, $\varphi \in A_\rho$ и

$$\lim_{|\beta| \to \infty} \rho^{-|\beta|} \|a_\beta\|_\rho = 0. \tag{3.1}$$

Тогда в пространстве A_ρ на интервале $|t|_K < 1/b\sigma_\rho(A)$ существует решение задачи Коши, которое является единственным решением, аналитическим относительно t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = A(x, D)u(t, x), \quad u(0, x) = \varphi(x). \tag{3.2}$$

Это решение имеет вид

$$u(t, x) = e^{tA(x,D)}\varphi(x). \tag{3.3}$$

Условие (3.1) выполняется, в частности, для всех дифференциальных операторов конечного порядка.

Пример 3.1 (уравнение неархимедовой диффузии).

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x).$$

Это уравнение имеет решение на интервале $|t|_K < \rho^2/b \max\limits_{i,j}\|a_{ij}\|_\rho$ с начальными условиями класса A_ρ.

Следствие 3.1. Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Тогда в пространстве A'_ρ на интервале $|t|_K < 1/b\sigma_\rho(A)$ существует решение задачи Коши, которое является аналитическим относительно t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = A^*(x,D)g(t,x), \quad g(0,x) = \psi(x), \tag{3.4}$$

где

$$A^*(x,D) = \sum_{|\beta|=0}^{\infty} (-1)^{|\beta|}\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}a_\beta(x).$$

Следствие 3.2. Пусть $A(x,D)$ — дифференциальный оператор конечного порядка. Тогда в пространстве основных функций A_0 существует единственное, аналитическое относительно t, решение задачи Коши (3.2).

Теорема 3.2. Пусть матричный дифференциальный оператор конечного порядка $A(x,D)$ удовлетворяет условию

$$k = \varlimsup_{\rho\to 0}\sigma_\rho(A) < \infty. \tag{3.5}$$

Тогда задача Коши (3.2) имеет единственное, аналитическое относительно t, решение в пространстве A на интервале $|t|_K < 1/kb$.

Решение имеет вид (3.3) и, следовательно, верна следующая теорема.

Теорема 3.3. Пусть выполняются условия теоремы 3.2. Тогда в пространстве A' распределений существует единственное, аналитическое относительно t, решение задачи Коши (3.4) на интервале $|t|_K < 1/kb$.

§ 4.4. Разрешимость уравнений Шредингера, Гейзенберга и Лиувилля в неархимедовой механике

Предположим, что функция $\psi \in A_\rho$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x) = \frac{h^2}{2\tau}\Delta\psi(t,x) + v(x)\psi(t,x). \tag{4.1}$$

Из теоремы 3.1 следует, что задача Коши для уравнения (4.1) имеет решение на интервале $|t|_K < \delta(h, b, \tau, v, \rho)$ [69]. Из следствия 3.2 следует, что задача Коши имеет локальное решение в пространстве основных функций A_0. Рассмотрим уравнение (4.1) в пространстве $L_2(K^n, dx)$. Перепишем его в пространстве $L_2(K^n, v)$:

$$-\frac{h}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) = \frac{h^2}{2\tau}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - x_j\right)^2 \psi(t,x) + v(x)\psi(t,x).$$

Пространство $L_2(K^n, v)$ вложено в пространство A_ρ, $\rho < \sqrt{b/|2|_K}$. Из теоремы 3.1 следует, что в подпространстве A_ρ задача Коши для уравнения (4.1) имеет решение на интервале $|t|_K < \delta(h, b, \tau, v, \rho)$ [69].

Рассмотрим уравнение Лиувилля (2.1). Получаем

$$L = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j}\right); \quad \sigma_\rho(L) = \frac{1}{\rho}\|H\|_\rho.$$

Следовательно, для функции Гамильтона класса A_ρ уравнение (2.1) для вероятностного распределения на неархимедовом фазовом пространстве имеет решение в пространстве распределений A'_ρ на интервале $|t|_K < \rho/b\|H\|_\rho$.

Более того, $\|\nabla H\|_\rho \leqslant \rho^{-1}\|H\|_\rho$. Пусть H — полином, $\deg H = s$. Тогда $\|H\|_\rho \leqslant \rho^s(\max|H_{\alpha\beta}|_K)$. Следовательно, $k = \overline{\lim}\ \sigma_\rho(L) < \infty$ при $s \leqslant 2$. Таким образом, для квадратичных функций Гамильтона уравнение Лиувилля (2.1) имеет решение в пространстве распределений A'.

Изучим теперь уравнение Лиувилля (2.2) в пространстве $L_2(K^n, v)$ ($A_\rho \subset L_2$, $\rho < \sqrt{b/|2|_K}$). Рассмотрим (2.2) в подпространстве A_ρ пространства L_2:

$$\sigma_\rho(L+u) = \max\left(\rho^{-1}\|\nabla H\|_\rho;\ \|H\|_\rho\right) \leqslant \|H\|_\rho.$$

Находим, что уравнение Лиувилля (2.2) для плотности вероятностей $P(t, \Omega)$ имеет решение на интервале $|t|_K < \rho/b\|H\|_\rho$.

Используя стандартную формулу перехода от представления Шредингера к представлению Гейзенберга и формулу (3.3), находим, что функция Гамильтона $H(q,p) = |p|^2/2 + v(q)$, $v \in A_\rho$, уравнение Гейзенберга (1.5) имеет решение в пространстве линейных непрерывных операторов $L(A_\rho, A_\rho)$ на интервале

$$|t|_K < \min\left[\frac{|h|_K}{b\|v\|_\rho\sqrt{|\tau|_K}},\ \frac{\rho^2|2\sqrt{|\tau|_K}|}{b|h|_K}\right].$$

Получаем

$$L_{\text{quantum}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{h}{\sqrt{\tau}} \right)^{n-1} \left(\left(\frac{\partial^n H}{\partial p^n}, \frac{\partial^n}{\partial q^n} \right) - \left(\frac{\partial^n H}{\partial q^n}, \frac{\partial^n}{\partial p^n} \right) \right);$$

$$\sigma_\rho(L_{\text{quantum}}) \leqslant \max_n \left[\left| \frac{h}{\sqrt{\tau}} \right|_K^{n-1} \rho^{-2n} b^n \right] \|H\|_\rho.$$

По теореме 3.1 в пространстве A_ρ решение уравнения (1.6) для символов ПДО существует на интервале

$$|t|_K < \min_n \left[\rho^{2n} \left| \frac{\sqrt{\tau}}{h} \right|_K^{n-1} \Big/ b^{n+1} \|H\|_\rho \right].$$

§ 4.5. Два процесса измерения: шкала с бесконечным убыванием единицы и шкала с бесконечным возрастанием единицы

Любой процесс измерения предполагает, что мы задаем некоторую единицу измерения 1 и коэффициент m возрастания или убывания единицы измерения 1, т. е. шкалу $S(1, m)$. Только сумму вида

$$x = \frac{a_{-k}}{m^k} + \ldots + a_0 + a_1 m + \ldots + a_n m^n, \tag{5.1}$$

где $a_j = 0, 1, \ldots, m-1$ можно измерить с помощью этой шкалы. Естественно назвать эти суммы $S(1, m)$-измеряемыми.

Существуют две возможности.

1. Предположим, что процесс измерения с убыванием единицы в m раз бесконечен, т. е.

$$x = \ldots + \frac{a_{-k}}{m^k} + \ldots + a_0 + a_1 m + \ldots + a_n m^n. \tag{5.2}$$

2. Предположим, что процесс измерения с возрастанием единицы в m раз бесконечен, т. е.

$$x = \frac{a_{-k}}{m^k} + \ldots + a_0 + a_1 m + \ldots + a_n m^n + \ldots \tag{5.3}$$

В первом случае появляются действительные числа (5.2), а во втором — m-адические (в частности, если $m = p$ простое, то появляются p-адические числа). Шкала $S(1, m)$ расширяется либо до m-адической шкалы $\overleftarrow{S}(1, m)$, либо до m-адической шкалы $\overrightarrow{S}(1, m)$. В классической действительной физике допустимы только абстракции вида (5.2), тогда как в новой неархимедовой физике допустимы абстракции вида (5.3).

Выражения (5.2) и (5.3) — только символы, которые используются для обозначения бесконечных алгоритмов измерения. Мы можем сказать, что суммы, описанные бесконечными алгоритмами (5.2) и (5.3), несоизмеримы.

Иррациональные числа (5.2) и рациональные числа (5.3), которые можно представить в виде периодической m-адической дроби, являются $S(1, m)$-неизмеримыми. Например, в дециметровой шкале иррациональное число

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{7}{10} + \ldots \tag{5.4}$$

и рациональное число

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \ldots \tag{5.5}$$

являются неизмеримыми. Мы не можем получить ни $\sqrt{3}$, ни $1/3$ как результат измерений в дециметровой шкале. Мы можем только получить их приближения в виде дробей (5.1), $m = 10$, т. е. для дециметровой шкалы как $\sqrt{3}$, так и $1/3$ — это только символы, используемые для обозначения бесконечных алгоритмов измерения (5.4), (5.5).

То же верно и для m-адических измерений. Например, в p-адической шкале

$$\frac{1}{3} = 1 + 2 + 2^3 + 2^5 + \ldots \tag{5.6}$$

Таким образом, бесконечность алгоритмов измерения с бесконечным возрастанием единицы измерения в m раз (5.2) и бесконечным убыванием единицы в m раз (5.3) не отражает никаких специальных свойств сумм, описываемых этими алгоритмами. Эта бесконечность зависит только от выбора шкал $\overleftarrow{S}(1, m)$ и $\overrightarrow{S}(1, m)$.

Отметим, что m-адическое число (5.3) описывает измерительный процесс, в котором на любом шаге единица измерения 1 возрастает m раз. Предположим, что алгоритм (5.3) бесконечен. Тогда m-адическое число (5.3) содержит бесконечное число единиц измерения 1 и может быть интерпретировано как бесконечно большая сумма по сравнению с единицей измерения 1. В этом случае появляются новые свойства бесконечно больших сумм, а именно: конечную относительно действительной метрики сумму (например, (5.6)) можно представить в виде бесконечно большой суммы в m-адическом процессе измерения.

§ 4.6. Неархимедова космология

Здесь мы попытаемся применить m-адические числа к космологии. В предлагаемой m-адической космологической модели m-адические числа описывают бесконечные расстояния, интервалы времени и массы, появляющиеся в космологической шкале.

4.6.1. m-адическая модель пространства–времени в m-адической космологии. Отметим, что m-адическая модель пространства–времени обладает рядом интересных свойств. Например, здесь возможно (см. (5.6)) перемещение на расстояние, равное 1/3 длины единицы 1 за бесконечное число шагов единичной длины 1. Подобным образом, подсчитывая бесконечное число (5.6) временных интервалов единичной длины $\Delta t = 1$ для начального момента $t_0 = 0$, мы возвращаемся к моменту $t = 1/3$. Таким образом, в рассматриваемой m-адической модели исчезает отношение порядка в пространстве–времени на космологической шкале. Часть измеряемой единицы 1 представляется в виде бесконечного числа единиц 1. В m-адической модели космологическое пространство–время имеет неархимедову структуру. Более того, для шкалы $\overrightarrow{S}(1,2)$ получаем

$$-1 = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + \ldots \tag{6.1}$$

Следовательно, в m-адической модели разница между направлениями в пространстве, так же как между прошлым и настоящим, исчезает. Из (6.1) следует, что, суммируя бесконечное число (6.1) интервалов $\Delta t = 1$ (для начального момента времени $t_0 = 0$), мы вернемся назад на один временной интервал. Подобным образом мы можем интерпретировать простое обобщение отношения (6.1):

$$-2 = 2^n + 2^{n+1} + \ldots \tag{6.2}$$

И, далее,

$$0 = 1 + (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + \ldots). \tag{6.3}$$

Следовательно, в рассматриваемой m-адической модели космологическое пространство–время имеет структуру дискретного тора бесконечного радиуса. За космологическое время $T = (6.3)$ m-адическая Вселенная в своем развитии возвращается к начальному моменту $t_0 = 0$.

4.6.2. Бесконечные, отрицательные и нулевые массы в космологии. Бесконечно большие массы (5.3) реализуются в тороидальном m-адическом пространстве–времени, а некоторые конфигурации с бесконечными массами дают эффект нулевой массы (6.3) или отрицательной массы (6.1)–(6.2).

Замечание 6.1. В релятивистской теории бозонной струны бесконечная масса основного состояния также характеризуется отрицательным числом, т. е.

$$M_0^2 = 1 + 2 + \ldots + n + \ldots = -\frac{1}{12}. \tag{6.4}$$

Равенство (6.4) является бессмысленным в поле действительных чисел R, так как действительные алгоритмы (5.2) реализуют бесконечное убывание единицы измерения 1, а не бесконечное возрастание, как в (6.4). Алгоритм (6.4) ближе к m-адическим алгоритмам (5.3).

P-струна (p простое) — это струна с частотами $\nu_n = p^n$, $n = 0, 1, \ldots$,

$$x_p(\sigma) = x_p^0 + \sum_{n=0}^{\infty} x_p^n \cos p^n \sigma, \quad \sigma \in [0, \pi].$$

Квадрат массы для основного состояния p-струны

$$M_0^2 = 1 + p + p^2 + \ldots + p^n + \ldots = \frac{1}{1-p}.$$

В частности, в поле 13-адических чисел Q_{13} ряд

$$M_0^2 = 1 + 13 + 13^2 + \ldots + 13^n + \ldots = \frac{1}{1-13} = -\frac{1}{12}$$

сходится. Следовательно, квадрат массы для основного состояния p-струны для $p = 13$ совпадает с квадратом массы основного состояния обычной бозонной струны. Следует отметить, что случай $2p = 26$ — это критическая размерность бозонной струны.

4.6.3. Исчезновение сингулярности плотности массы. В соответствие с алгоритмом (6.3) сингулярность плотности массы (ее бесконечное возрастание) приводит к нулевой плотности. Аналогично, бесконечное возрастание в силе гравитации или электромагнитном поле (6.3) приводит к ее исчезновению.

§ 4.7. Микромир и неархимедова структура вещественной модели пространства–времени Минковского

Здесь я предлагаю рассмотреть m-адическую модель микромира и ввести неархимедову m-адическую структуру в пространство–время Минковского. Такую m-адическую модель микромира можно описать следующим образом. Величины, описывающие события, происходящие в микромире, являются бесконечно малыми по сравнению с подобными величинами макромира. Для наблюдателя в координатной системе микромира характерные макромиру величины реализуются бесконечно большими m-адическими числами. Для наблюдателя в координатной системе макромира представление физической величины (координаты, момента, массы, энергии, заряда, силы поля) является представлением в виде бесконечного числа (5.3) микроскопических величин. В этом смысле макрофизика — это космологическая теория микромира.

В вещественной модели Минковского пространство–время также имеет неархимедову структуру. Мы можем рассматривать его в качестве архимедового только приближенно (пренебрегая микроструктурой физических величин).

Например, пусть $L = 1$ — это единица измерения в макрошкале, $l = 1$ единица измерения в микрошкале. Если мы не берем в расчет микроструктуру величины L, то можем рассмотреть отношение Архимеда

$$L > L/n, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{7.1}$$

Однако, если мы учтем микроструктуру величины L, то

$$L = \left[\frac{a_{-k}}{m^k} + \ldots + a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \ldots\right] l; \tag{7.2}$$

$$\frac{L}{m} = \left[\frac{a_{-k}}{m^{k+1}} + \ldots + \frac{a_0}{m} + a_1 + a_2 m + \ldots\right] l. \tag{7.3}$$

Обе величины (7.2) и (7.3) являются бесконечно большими по сравнению с l, и неравенство (7.1) превращается в сравнение двух бесконечностей.

Пусть, например, в 3-адической шкале $\overrightarrow{S}(1,3)$: $L = 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \ldots$, тогда

$$\frac{L}{2} = 1 + 3 + 3^2 + \ldots, \quad L - \frac{L}{2} = 1 + 3 + 3^2 + \ldots = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}.$$

Все уравнения (5.1)–(6.3) также справедливы для нашей интерпретации микромира. Например, положительная макроскопическая масса (6.1), являющаяся бесконечно большой по сравнению с единицей измерения $\Delta = 1$ массы в микромире, имеет эффект отрицательной массы в микромире, тогда как подобный положительный временной интервал в макромире производит действие поворота времени в микромире.

Естественно, что определение макромира и микромира относительно и зависит только от способа наблюдения. С точки зрения космологического наблюдателя, мы живем в микромире и, пренебрегая космическими величинами, космологический наблюдатель полагает, что космологическое пространство–время — это вещественное время Минковского R^4.

§ 4.8. Модели с бесконечно большим числом частиц

Операторы квантования поля $\hat{\varphi}(x)$ и число частиц $\hat{N}$ не коммутируют и, поэтому для фиксированного значения силы поля $\varphi(x)$ число частиц не определено и может быть бесконечным.

В шкале $\overrightarrow{S}(1, m)$ бесконечное число частиц описывается m-адическим целым числом

$$x_\infty = a_0 + a_1 m + \ldots + a_n m^n + \ldots \tag{8.1}$$

В частности, вакуум (состояние, в котором $\hat{N}\varphi_0 = 0$) — это предел состояний с бесконечно растущим числом частиц

$$x_0 = 1 + [(m-1) + (m-1)m + \ldots + (m-1)m^n + \ldots]. \tag{8.2}$$

Как обычно, устанавливается взаимосвязь между квантовым полем, для которого допустимы состояния с бесконечным числом бозонов, и системой гармонических осцилляторов, для которой допустимы состояния с бесконечными энергиями (8.1).

Можем ли мы сравнивать различные бесконечно большие величины, определяемые алгоритмом измерения (5.3)? Как мы знаем, кольца m-адических чисел Q_m (и, в частности, поля p-адических чисел Q_p) не упорядочены. Однако мы можем ввести на Q_m отношение частичного порядка, которого вполне достаточно для приложений.

Рассмотрим два числа $x = (5.3)$ и

$$y = b_{-t} m^{-t} + \ldots + b_0 + b_1 m + \ldots \tag{8.3}$$

Введем отношение $<$ по следующему закону: $y < x$, если существует такое число s, что $a_s > b_s$ и $a_j \geqslant b_j$ для $j > s$.

Обозначим через $Q_{fin}(m)$ множество действительных чисел вида (5.1).

Утверждение 8.1. На множестве $Q_{fin}(m)$ отношение $<$ совпадает с обычным отношением порядка на Q.

Доказательство. Пусть $x, y \in Q_{fin}(m)$ и $y < x$. Тогда

$$x = x_{-r} m^{-r} + \ldots + x_s m^s + \ldots + x_T m^T,$$

$$y = y_{-t} m^{-t} + \ldots + y_s m^s + \ldots + y_T m^T,$$

при $y_s < x_s$ и $y_j \leqslant x_j$, $j > s$. Худший случай, когда $x = x_s m^s + \ldots \ldots + x_T m^T$ и $y = (m-1)(m^{-t} + \ldots + m^{s-1}) + (x_s - 1)m^s + \ldots + x_T m^T$. Но $(m-1)(m^{-t} + \ldots + m^{s-1}) < m^s$. Следовательно, $y < x$ в случае обычного отношения порядка на Q.

Как обычно, отношение $<$ индуцирует отношение $\leqslant$.

Утверждение 8.2. Отношение $\leqslant$ является (частичным) отношением порядка.

Доказательство.

1. В случае $x \leqslant x$ это очевидно.

2. Пусть $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$. Тогда существуют такие s_1: $x_{s_1} > y_{s_1}$, $x_j \geqslant y_j$, $j > s_1$ и s_2: $y_{s_2} > x_{s_2}$, $y_j \geqslant x_j$, $j > s_2$. Пусть, например, $s_1 > s_2$. Тогда, с одной стороны, $y_j \geqslant x_j$, $j = s_1$, а с другой стороны, $x_{s_1} > y_{s_1}$. Получили противоречие. Поэтому $x_j = y_j$.

3. Пусть $y \leqslant x$ и $x \leqslant z$. Тогда существуют такие s_1: $x_{s_1} > y_{s_1}$, $x_j \geqslant y_j$, $j > s_1$ и s_2: $z_{s_2} > x_{s_2}$, $z_j \geqslant x_j$, $j > s_2$. Остается выбрать $s = \max(s_1, s_2)$.

Отношение $\leqslant$ является только отношением частичного порядка. Например, нельзя сравнить два числа $x = m + m^3 + m^5 + \ldots$ и $y = 1 + m^2 + m^4 + \ldots$ Мы говорим, что числа из $Q_{fin}(m)$ конечны, а числа из $Q_m \backslash Q_{fin}(m)$ бесконечны, и любое конечное число меньше, чем любое бесконечное.

Теперь мы можем сравнить, например, число частиц для двух состояний, имеющих бесконечно большое число частиц.

§ 4.9. *P*-адическая интерпретация тахионов

Мы знаем, что в специальной теории относительности импульс может быть найден по формуле

$$k = \frac{Mv}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{Mvc}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \tag{9.1}$$

Если скорость $v \geqslant c$, то эта формула становится бессмысленной. Однако, как уже упоминалось, в полях p-адический чисел, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, существует квадратный корень из (-1). Поэтому формула (9.1) имеет смысл и для сверхсветовых скоростей.

Рассмотрим, например, случай $p = 5$. При таком выборе коэффициента измерения результаты принадлежат пространству $Q_{\text{fin}}(5)$. Поэтому здесь существуют конечные дроби относительно степеней 5. Теперь пусть масса M и скорость c измеряются с помощью коэффициента 5. То есть они принадлежат пространству $Q_{\text{fin}}(5)$. Для обозначения этих рациональных чисел мы также будем использовать символы M и c. Рассмотрим, например, скорость $v = 5c$. Получим два значения импульса k:

$$\begin{aligned} k_1 &= 0{,}010323031034221444\ldots Mc \\ k_2 &= 0{,}044121413410223000 1\ldots Mc \end{aligned} \tag{9.2}$$

Существуют алгоритмы, в которых единица измерения возрастает в 5 раз при бесконечном числе шагов. Таким образом, это бесконечные числа с нашей точки зрения. Значит, в рамках предложенной 5-адической интерпретации тахион следует рассматривать как частицу с бесконечно большим импульсом, тогда как масса и скорость частицы конечны. Наша p-адическая интерпретация тахионов согласуется со специальной теорией относительности. В наших единицах измерения скорость света не будет превышена. При переходе через световой барьер частица должна получить бесконечно большой импульс.

С точки зрения энергии, при p-адической интерпретации тахионы — это частицы конечной массы M, движущиеся быстрее света и обладающие бесконечной энергией. В ранее рассмотренном случае $v = 5c$

$$\begin{aligned} E_1 &= 0{,}0103230310342214 44\ldots Mc^2 \\ E_1 &= 0{,}0103230310342214 44\ldots Mc^2 \end{aligned} \tag{9.3}$$

Для преодоления светового барьера необходима бесконечно большая энергия E.

Теперь рассмотрим другую модель. Пусть частица имеет бесконечно большую p-адическую массу

$$M = M_0 + M_1 p + \ldots + M_s p^s + \ldots$$

Пусть, как и раньше, $p = 5$ и $v = 5c$. Тогда, если масса частицы $M = 1{,}0220340214423\ldots$, то ее момент $k = c$. Таким образом, мы получили неожиданный результат. В p-адической теории могут существовать частицы, обладающие бесконечной массой и конечным моментом и движущиеся с конечной, хотя и сверхсветовой, скоростью. То есть мы можем определять бесконечно большие величины конечными характеристиками. Например, рассмотренная выше частица с бесконечно большой массой характеризуется двумя конечными параметрами. Измеряя эти параметры, мы можем вычислять бесконечно большую массу $M = M_0 + M_1 p + \ldots$ Для экспериментального обоснования наших рассуждений нам нужно обнаружить частицу, которая имела бы, например, скорость $v = 5c$ и энергию $E = c^2$. Тогда масса такой частицы будет бесконечно большой величиной по сравнению с единицей измерения $l = 1$.

Возможно, наши рассуждения будут более интересны в космологии, чем в теории элементарных частиц. В космологии мы предсказываем существование объектов, имеющих бесконечную массу, движущихся с конечной скоростью $v > c$ и имеющих конечную энергию. Мы также предсказываем существование объектов, имеющих конечную массу, конечную сверхсветовую скорость и бесконечную энергию. В последнем случае можно также реализовать бесконечно большую величину, обнаружив объект, который имеет, скажем, скорость $v = 5c$ и массу $M = 1$. Как и в рассмотренном выше случае, энергия этого объекта является бесконечно большой по сравнению с единицей измерения.

Глава 5. P-АДИЧЕСКИЗНАЧНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕРЫ

P-адическая теория вероятностей возникла в связи с проблемой вероятностной интерпретации физических моделей, в которых волновые функции принимают значения в расширениях полей p-адических чисел [64], [72]. Эта проблема не разрешима в рамках обычной аксиоматической теории вероятностей Колмогорова [94], так как в одну из его аксиом включены действительные числа.

Как известно (см. замечания в [94]), при построении аксиоматической теории в рамках теории меры Колмогоров использовал частотную теорию вероятностей фон Мизеса [99], [100]. Каждая аксиома Колмогорова является теоремой в частотной теории вероятностей (за исключением условия σ-аддитивности, которое накладывается дополнительно). При построении неархимедовой теории [75], [76], [71], [67] я поступил также. Во-первых, я строил общую частотную теорию, основанную на фундаментальном (топологическом) принципе статистической стабилизации относительных частот. Из этого принципа следует, что статистическая стабилизация может рассматриваться не только в обычной действительной топологии на поле рациональных чисел Q (заметим, что все частоты являются рациональными числами), но также и в других топологиях на Q. Эти топологии называются топологиями статистической стабилизации. Вероятности определяются как пределы относительных частот. Вероятности принадлежат пополнению поля Q относительно топологии стабилизации. Особый интерес представляют статистические выборки (коллективы), для которых статистическая стабилизация отсутствует в поле действительных чисел, тогда как в одном из полей Q_p она присутствует, см. [67], [75]. На основе частотной теории [67], [75] я предлагаю аксиоматическую теорию (теоремы частотной теории [67], [75] берутся в качестве аксиом), основанную на теории меры (а также распределений) со значениями в неархимедовых числовых полях.

§ 5.1. P-адическая частотная теория вероятностей

Напомним основные положения частотной теории вероятностей фон Мизеса. Основой этой теории является понятие коллектива. Рассмотрим произвольное испытание S и обозначим $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ множество всех возможных исходов этого испытания (признаков). Для простоты исследований мы будем рассматривать только конечные множества Ω. Множество Ω называется множеством элементарных событий или множеством признаков. Рассмотрим N исходов испытания S и обозначим через x_j результат j-го исхода. Тогда мы получим конечную последовательность наблюдений

$$x = (x_1, \ldots, x_N), \quad x_j \in \Omega. \tag{1.1}$$

Коллектив — это бесконечная идеализация выборки (1.1):

$$x = (x_1, \ldots, x_N, \ldots), \quad x_j \in \Omega, \tag{1.2}$$

для которой выполняются два принципа фон Мизеса.

Первый из них — это принцип статистической стабилизации относительных частот появления каждого элементарного события $\omega_i \in \Omega$ в последовательности (1.2). Вычислим частоты $\nu(\omega_i) = n_i/N$, где n_i — число реализаций элементарного события ω_i после первых N наблюдений. Принцип статистической стабилизации относительных частот гласит:

существует предел частот $\nu\ (\omega_i)$ появления элементарного события $\omega_i \in \Omega$ при N, стремящемся к бесконечности.

В частотной теории вероятностей этот предел $P(\omega_i) = \lim \nu(\omega_i)$ называется вероятностью события ω_i.

«Будем говорить, что коллектив — это массовый феномен, или повторяющееся событие, или просто длинные последовательности наблюдений, для которых существует достаточно причин, чтобы поверить в то, что относительная частота наблюдаемого события должна стремиться к фиксированному предельному значению, если число наблюдений стремится к бесконечности. Этот предел будет называться вероятностью события, наблюдаемого в пределах взятой совокупности [99].»

Второй принцип фон Мизеса — это принцип случайности последовательности (1.2). Однако этот принцип порождает большое число логических проблем. Варианты теории фон Мизеса без этого принципа были предложены позднее [119]. Мы также будем рассматривать частотную теорию, основанную только на обобщенном принципе статистической стабилизации. В гл. 6 мы попытаемся применить теорию колмогоровской сложности к p-адической теории вероятностей [95], см. [140]. Колмогоровская сложность является альтернативой понятия случайности и, мне кажется, что для p-адического случая она будет более полезной, чем определение Мизеса.

Заметим, что все аксиомы теории вероятностей Колмогорова (за исключением σ-аддитивности) являются теоремами в частотной теории вероятностей фон Мизеса [99], [100].

Для наших дальнейших рассуждений очень важно отметить, что относительные частоты принадлежат полю рациональных чисел, а обычные действительные вероятности получены посредством предельного перехода относительно действительной топологии (метрики).

Будем развивать нашу неархимедову теорию вероятностей таким же образом. Мы также исследуем бесконечную последовательность (1.2) наблюдений. Но предлагается новый топологический принцип статистической стабилизации относительных частот:

статистическая стабилизация относительных частот $\nu(\omega_i)$ может рассматриваться относительно произвольной топологии τ на поле рациональных чисел Q.

Такую топологию называют топологией статистической стабилизации. Предельные значения частот $\nu(\omega_i)$ называют τ-вероятностями. Эти вероятности принадлежат пополнению поля Q относительно топологии τ.

Замечание 1.1. Топология статистической стабилизации τ должна быть «достаточно хорошей» для определения пополнения.

Выбор топологии τ статистической стабилизации связан с конкретной вероятностной моделью.

Последовательность (1.2), для которой выполняется принцип статистической стабилизации относительных частот топологии τ, называется τ-коллективом.

Обозначим через Q_τ пополнение поля рациональных чисел Q относительно топологии статистической стабилизации τ. В соответствии с [99], [100] вероятностное распределение τ-коллектива (1.2) определяется как вектор вероятностей

$$P_x = (P(\omega_1), \ldots, P(\omega_s)).$$

Особый интерес для нас представляет случай, когда действительная топология τ_R не является топологией статистической стабилизации для последовательности (1.2), а другая топология τ является. В этом случае невозможно рассматривать (1.2) как коллектив фон Мизеса. Но возникает возможность изучить (1.2) как τ-совокупность.

Обозначим через U_Q подмножество поля рациональных чисел Q:

$$U_Q = \{q \in Q: \ 0 \leqslant q \leqslant 1\}.$$

А через U_{Q_τ} — замыкание множества U_Q в пополнении Q_τ поля Q.

Следующая теорема — это очевидное следствие топологического принципа статистической стабилизации.

Теорема 1.1. Вероятности $P(\omega_i)$ принадлежат множеству U_{Q_τ} для произвольного τ-коллектива (1.2).

Как обычно, рассмотрим алгебру $\alpha(\Omega)$ всех подмножеств Ω и обозначим через $P(A)$, $A \in \Omega$, сумму $\sum\limits_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$. Из теоремы 1.1 следует, что вероятность $P(A)$ принадлежит множеству U_{Q_τ} для любого $A \in \alpha(\Omega)$.

В приложениях к физике p-адическая топология τ_p на поле рациональных чисел Q играет наиболее важную роль.

Теорема 1.2. Множество U_{Q_τ} для $\tau = \tau_p$ совпадает с полем Q_p.

Доказательство. Достаточно рассмотреть каноническое разложение p-адического числа a:

$$a = \frac{a_{-n} + \ldots + p^{n-1}a_{-1} + p^n a_0 + \ldots}{p^n} = \\ = \lim_{N\to\infty} \frac{a_{-n} + \ldots + p^{n+N}a_N}{p^N(1+p^{n+N})} = \lim_{N\to\infty} b_N,$$

где $b_N \in U_Q$.

Мы использовали выражение $(1 + p^{n+N})$, но можно использовать любую последовательность (v_N) натуральных чисел такую, что $\lim v_N = 1$ и $(a_{-n} + \ldots + p^{n+N}a_N) < p^n v_N$.

Например, любое рациональное число может служить p-адической вероятностью. Возникают «патологические» (с точки зрения обычной теории вероятностей) вероятности: $P(A) = 2$, $P(A) = 100$, $P(A) = 5/3$, $P(A) = -1$; и возможно, что $P(A) = i_p = \sqrt{-1}$, при $p = 1 (\bmod 4)$.

Мы развиваем теорию вероятностей, основанную на фундаментальном (топологическом) принципе стабилизации относительных частот, аналогично тому, как это делается в [99], [100].

Теорема 1.3. Пусть пополнение Q_τ поля Q относительно топологии статистической стабилизации τ является аддитивной топологической группой. Тогда для каждого τ-коллектива вероятность — это аддитивная функция на $\alpha(\Omega)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \varnothing.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству, приведенному в [100]. Нужно только использовать аддитивность топологической группы: $\lim(u_N + v_N) = \lim u_N + \lim v_N$.

Теорема 1.4. Вероятность $P(\Omega) = 1$ для любой топологии статистической стабилизации τ на Q.

Как и в частотной теории вероятностей фон Мизеса, мы можем также определить условную вероятность $P(A/B)$.

Теорема 1.5. Пусть Q_τ — мультипликативная топологическая группа. Тогда для произвольных A, $B \in \alpha(\Omega)$

$$P(A/B) = P(AB)/P(B).$$

Для доказательства используется то, что в мультипликативной топологической группе: $\lim(u_N/v_N) = \lim u_N / \lim v_N$ при $\lim v_N \neq 0$.

Теорема 1.6. Пусть Q_τ — мультипликативная топологическая полугруппа. Тогда для независимых событий A и B

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

§ 5.2. Аксиоматика, основанная на конечно-аддитивных мерах

Несложно обобщить наши рассуждения на случай счетного множества элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_s, \ldots\}$. Проблема возникает в процессе построения частотной теории вероятностей в случае произвольного топологического пространства Ω, являющегося множеством элементарных событий (сравним с [100], [119]).

Но мы можем попытаться использовать в этом случае обобщение теории Колмогорова, основанное на нашей частотной теории вероятностей, и основные свойства частотных вероятностей как аксиомы новой теории вероятностных мер (используя теорию U_{Q_τ}-значных мер как основу этой теории). Рассмотрим простейший случай, когда Q_τ — топологическое поле.

Введем следующее определение (по аналогии с Колмогоровым [94])

Тройка (Ω, $\alpha(\Omega)$, P), где

а) Ω — произвольное множество,

б) $\alpha(\Omega)$ — произвольная алгебра подмножеств множества Ω,

в) P — аддитивная функция определенная на $\alpha(\Omega)$ и принимающая значения в U_{Q_τ} такая, что $P(\Omega) = 1$,

называется обобщенным вероятностным пространством для топологии статистической стабилизации τ на Q.

Если $\tau = \tau_R$ — обычная действительная топология на Q, то мы получаем стандартное определение вероятностного пространства с конечно-аддитивной вероятностью (обобщенное вероятностное пространство [94], [34]).

Следующим шагом в построении теории Колмогорова было рассмотрение σ-аддитивных вероятностей и расширение области определения вероятностей с алгебры до σ-алгебры. Это условие является основополагающим в современной теории вероятностей. Оно обеспечивает возможность интегрирования относительно σ-аддитивной вероятности. Возникает теория вероятностных средних. Но подход Колмогорова неприменим в общем случае. В p-адическом случае существуют только дискретные σ-аддитивные меры (см., например, [106]).

Итак, условие σ-аддитивности является естественным только в одном случае (когда вероятности принимают действительные значения). Это условие нельзя использовать в остальных случаях, например когда вероятности принимают p-адические значения. Что можно предложить в такой ситуации? Было бы полезно попробовать применить старую идею фон Мизеса [99] в более общем случае и рассматривать вероятности не на произвольном множестве Ω (которое никак не связано с испытаниями), а на конкретном пространстве элементарных исходов Ω. Для каждого статистического эксперимента мы должны использовать специальное множество Ω и специальную топологию статистической стабилизации τ. Каждая пара $(\Omega,\ \tau)$ будет порождать конкретное условие на конечно-аддитивную вероятность P, которое обеспечит возможность интегрирования относительно этой вероятности.

В связи с возникновением новых вероятностных моделей можно рассмотреть некоторые геометрические аналогии. Ситуация с колмогоровской аксиоматикой в теории вероятностей схожа с ситуацией с аксиоматикой Евклида в геометрии. Теория вероятностей Колмогорова — это только одна из вероятностных моделей. Подобно неевклидовым геометриям, мы можем создать неколмогоровские теории вероятностей (например, p-адическую теорию вероятностей). Различные топологии статистической стабилизации τ порождают различные теории вероятностей.

Каждая неколмогоровская теория вероятностей зависит от двух топологий. Первая — это топология статистической стабилизации τ на Q, а вторая — это топология β на пространстве элементарных событий Ω, соответствующем статистическому эксперименту S. Неколмогоровская теория вероятностей — это теория, основанная на паре топологических пространств

$$((Q, \tau), (\Omega, \beta)).$$

Мы рассмотрели определение вероятностного пространства в случае топологии τ, для которой Q_τ является топологическим полем. Но мы не рассматривали более общие топологии τ на Q. Например, можно применить наши рассуждения для топологии статистической стабилизации τ с разрывной операцией сложения на Q. Вероятность $P\colon\ \alpha(\Omega) \to U_{Q_\tau}$ в такой неколмогоровской теории вероятностей была бы неаддитивной функцией множества. Другая возможность — это рассмотрение такой топологии τ, для которой сложение непрерывно относительно этой топологии (поэтому вероятность является конечно-аддитивной функцией), а умножение разрывно. Обычное равенство $P(AB) = P(A)P(B)$ для независимых событий неверно в этой неколмогоровской теории вероятностей. И возможна ситуация, в которой все алгебраические операции непрерывны на поле рациональных чисел Q (поэтому Q — топологическое поле относительно топологии статистической стабилизации τ). Но пополнение Q_τ поля Q может оказаться только топологическим кольцом. Обычное равенство $P(A/B) = P(AB)/P(B)$, $P(B) \neq 0$ неверно в этой модели. Например, можно рассмотреть кольцо m-адических чисел Q_m, где m не является простым числом ($m = 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$), или какую-нибудь адельную топологию.

Предыдущие рассмотрения приводят к следующей аксиоматике обобщенной теории вероятностей, основанной на топологическом принципе статистической стабилизации (в случае, когда Q_τ является топологическим полем).

Вероятностная модель — это система топологических объектов и мер

$$((Q,\tau),(\Omega,\beta),\alpha(\Omega),P,(\text{У.И.})),$$

где

1. τ — топология на Q такая, что Q_τ — топологическое поле (топология статистической стабилизации);

2. (Ω,β) — топологическое пространство (пространство событий);

3. $\alpha(\Omega)$ — подалгебра борелевской σ-алгебры пространства (Ω,β) (алгебра событий);

4. P — конечная аддитивная функция множества $P\colon \alpha(\Omega)\to U_{Q_\tau}$ такая, что $P(\Omega)=1$;

5. (УИ) — некоторое «условие интегрируемости для P» такое, что при выполнении этого условия достаточно большой класс непрерывных функций $\xi\colon \Omega\to U_{Q_\tau}$ является интегрируемым относительно P.

Топология статистической стабилизации τ и пространство событий (Ω,β) могут быть найдены на основе свойств конкретной вероятностной модели S, а τ и β порождают УИ

Замечание 2.1. Математическая формулировка УИ в общем случае была дана в работе Шихова [110]. Но существует одна проблема, возникающая при связи результатов его работы с нашей теорией вероятностей. Нам не удалось найти множество значений вероятности U_{Q_τ} в общем случае. Для действительного случая это отрезок $[0,1]$, а для p-адического случая — это Q_p. Однако мне ничего не известно о более общих топологиях.

Замечание 2.2. На данный момент мы не можем предложить вероятностную аксиоматику для топологий τ, для которых Q_τ не является полем, так как не ясно, как интегрировать относительно неаддитивных функций множества.

§ 5.3. Теория Монна–Спрингера интегрирования относительно неархимедовозначных мер

А. Монна и Т. Спрингер разработали теорию интегрирования для мер на локально компактных σ-компактных пространствах размерности нуль [102] (см. также [101]). Эта теория была обобщена В. Шиховым [110] на случай топологических пространств, которые не являются σ-компактными. Коротко напомним основные положения этой теории, изложение которых можно найти в [102].

Далее везде X будет означать локально компактное σ-компактное топологическое пространство размерности нуль, $\Delta(X)$ — кольцо компактных открытых подмножеств множества X, $C_c(X)$ — пространство непрерывных функций $f\colon X\to K$ с компактными носителями. На этом пространстве введем равномерную норму

$$||f||=\max_{x\in X}|f(x)|_K.$$

Определение 3.1. Мерой называется произвольный K-линейный функционал μ: $C_c(X) \to K$, удовлетворяющий следующему условию: для любого $A \in \Delta(X)$ существует такая константа $M_A \geqslant 0$, что

$$|\mu(f)|_K \leqslant M_A \|f\|$$

для любых $f \in C_c(X)$ таких, что $\operatorname{supp} f \subset A$.

Определение 3.2. Мера ограничена, если существует такая константа $M \geqslant 0$, что

$$|\mu(f)|_K \leqslant M\|f\|, \quad f \in C_c(X).$$

Норма ограниченной меры μ определяется как норма элемента двойственного пространства $C'f(X)$ (к K-линейному нормированному пространству $C_c(X)$):

$$\|\mu\| = \sup_{f \neq 0} \|f\|^{-1} |\mu(f)|_K.$$

Для любого подмножества $B \subset X$ характеристическую функцию множества B будем обозначать символом ϕ_B. Если $B \in \Delta(X)$, то $\phi_B \in C_c(X)$. Каждая мера μ порождает функцию множества μ: $\Delta(X) \to K$, $\mu(A) = \mu(\phi_A)$.

Теорема 3.1. Пусть F — база топологии X, состоящая из компактных открытых подмножеств, и μ: $F \to K$ удовлетворяет следующим условиям.

1. Пусть $A_1, \ldots, A_k \in F$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ и $A = \bigcup\limits_{j=1}^{k} A_i \in F$. Тогда

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i).$$

2. Пусть $\{A\}$, $A \in F$, — совокупность подмножеств фиксированного множества $B \in \Delta(X)$. Тогда $\{|\mu(A)|_K\}$ ограничено в K.

Тогда функцию множеств μ можно продолжить до меры на $C_c(X)$.

Обратно, каждая мера μ удовлетворяет условиям 1 и 2.

Для функции μ: $F \to K$, удовлетворяющей условиям 1 и 2, интеграл $\mu(f)$ определяется как предел суммы Римана, т. е.

$$S_u(f) = \sum_{i=1}^{k} f(a_i)\mu(A_i),$$

где $u = (U, a_1, \ldots, a_k)$, $U = (A)_{i=1}^{k}$, — покрытие множества $B = \operatorname{supp} f$, $A_i \in F$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $a_j \in A_j$.

На пространстве $C_c(X)$ введем действительнозначную функцию N_μ:

$$N_\mu(f) = \sup_{g \neq 0} \|g\|^{-1} |\mu(fg)|_K, \quad g \in C_c(X).$$

Это неархимедова полунорма на $C_c(X)$, обладающая свойствами:

а) $|\mu(f)|_K \leqslant N_\mu(f)$,

б) $N_\mu(fg) \leqslant N_\mu(f)\|g\|$ (неравенство Гельдера).

Покрытие $U = (U_i)$ для X называется *специальным*, если $U_i \cap U_j = \varnothing$, $i \neq j$, $U_i \in \Delta(X)$. Для функции $f \in C_c(X)$ полагаем

$$N_\mu(f, U) = \sup_i \left(\sup_{x \in U_i} |f(x)| N_\mu(\phi_{U_i}) \right).$$

Тогда

$$N_\mu(f) = \inf_U N_\mu(f, U).$$

Для $x \in X$ полагаем $N_\mu(x) = \inf N_\mu(\phi_U)$, где $\{U\}$ — система компактных открытых окрестностей точки x.

Теорема 3.2. Пусть $f \in C_c(X)$. Тогда

$$N_\mu(f) = \sup_{x \in X} |f(x)|_K N_\mu(x). \tag{3.1}$$

Для любого $\alpha > 0$ получаем

$$X_\alpha = \{x \in X : \ N_\mu(x) \geqslant \alpha\}, \quad X_+ = \cup_{\alpha > 0} X_\alpha,$$
$$X_0 = \{x \in X : \ N_\mu(x) = 0\}, \quad X = X_+ \cup X_0.$$

Используя (3.1), мы можем определить $N_\mu(f)$ для любой функции $f \colon X \to K$ (в частности, имеем: $N_\mu(x) = N_\mu(\phi\{x\})$.

Определение 3.3. Функция f (множество A) называется μ-пренебрежимой, если $N_\mu(f) = 0$ $(N_\mu(\phi_A))$.

Утверждение 3.1. Функция f является μ-пренебрежимой $\Leftrightarrow$ $N_\mu(f) = 0$ для любых x, $f(x) \neq 0$.

Определение 3.4. Функции f и g эквивалентны, если функция $(f - g)$ μ-пренебрежима.

Обозначим символом $F(\mu)$ пространство классов μ-эквивалентных функций f, для которых $N_\mu(f) < \infty$.

Определение 3.5. Класс $L^1(X, \mu)$ функций, интегрируемых относительно меры μ, определяется как замыкание пространства $C_c(X)$ в $F(\mu)$ (относительно нормы N_μ).

Утверждение 3.2. Пусть $f \in L^1$ (X, μ). Тогда ограничение f на любое множество X_α непрерывно.

Определение 3.6. Функция $f \colon X \to K$ называется абсолютно непрерывной относительно N_μ, если выполняются следующие условия:

а) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для $N_\mu(\phi_U) < \delta$, $U \in \Delta(X)$, выполняется неравенство $N_\mu(f\phi_U) < \varepsilon$;

б) $\lim_V N_\mu(f\phi_U) = 0$, где V фильтр множеств, являющихся дополнениями компактных подмножеств множества X.

Теорема 3.3. Функция $f\colon X \to K$ интегрируема тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

а) ограничение f на любое X_α, $\alpha > 0$, непрерывно;

б) f абсолютно непрерывна относительно N_μ.

Утверждение 3.3. Пусть $f \in L^1(X, \mu)$. Тогда

$$N_\mu(f) = \sup_{g\neq 0}\|g\|^{-1}|\mu(fg)|_K, \quad g \in C_c(X).$$

Далее везде символ $\bar{A}$ будет использоваться для обозначения дополнения подмножества A множества X, $\bar{A} = A\backslash A$.

Определение 3.7. Функция $f\colon X \to K$ называется μ-измеримой, если для любого компакта $B \subset K$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт $B_1 \subset B$, что $N_\mu(B \cap \bar{B}_1) < \varepsilon$, и ограничение f на B_1 непрерывно.

Утверждение 3.4. Функция $f\colon X \to K$ является μ-измеримой тогда и только тогда, когда ограничение f на X_α непрерывно для любого $\alpha > 0$.

Определение 3.8. Последовательность $\{f_n\}$ μ-измеримых функций на X называется сходящейся по Егорову, если для любого компакта B и любого $\varepsilon > 0$ существует компактное подмножество B_1 компакта B такое, что $N_\mu(B \cap \bar{B}_1) < \varepsilon$ и $\{f_n\}$ сходится равномерно на B_1.

Утверждение 3.5. Последовательность $\{f_n\}$ сходится по Егорову, если она сходится равномерно на любом X_α, $\alpha > 0$.

Теорема 3.4 (предельная теорема для интеграла Монна–Спрингера). Пусть $\{f_n\}$ — сходящаяся по Егорову последовательность интегрируемых функций. И пусть существует интегрируемая функция g такая, что $|f_n(x)|_K \leqslant |g(x)|_K$ для $x \in X$. Тогда предельная функция f интегрируема и $\mu(f) = \lim\limits_{n\to\infty}\mu(f_n)$.

Обычным образом определим прямое произведение $\mu \otimes \nu$ меры μ на X и меры ν на Y:

$$N_{\mu\otimes\nu}(x, y) = N_\mu(x)N_\nu(y).$$

Следует отметить, что в теории Монна–Спрингера нет аналога теоремы Радона–Никодима [102].

Мы будем часто использовать тот факт (Монна–Спрингер [102]), что существует мера Хаара (мера, инвариантная по отношению к сдвигам) на Q_p, принимающая свои значения на Q_q, где $p \neq q$ (сравните с результатами гл. 1 «Отсутствие меры Хаара» для случая Q_p-значных мер на Q_p). Как обычно, эта мера единственна при условии нормировки $\mu(Z_p) = 1$. В этом случае функция $N_\mu(x)$ равна константе $c = 1$, и пространство L^1 совпадает с пространством C_c.

§ 5.4. Меры, убывающие на бесконечности

Как уже отмечалось, мы хотим определить Q_p-значные вероятностные меры. Нас интересует p-адический аналог условия σ-аддитивности, которое использовал А.Н. Колмогоров [94] в своей системе аксиом. Колмогоров отмечал, что данное условие играет исключительно техническую роль. Такую же роль будет играть аналогичное условие и в нашей теории вероятностей.

Естественно, первое условие, накладываемое на меру μ, — это условие ограниченности. Нам будет полезна следующая теорема.

Теорема 4.1. Мера μ ограничена тогда и только тогда, когда функция N_μ ограничена на X и

$$\|\mu\| = \sup N_\mu(x).$$

Доказательство. Пусть μ ограничена; $\{U\}$ — система замкнуто-открытых окрестностей точки $x \in X$. Тогда

$$N_\mu(x) = \inf_U \sup_{g\neq 0}\|g\|^{-1}|\mu(g\phi_U)|_K \leqslant \|\mu\|\sup_{g\neq 0}\|g\|^{-1}\|g\phi_U\| \leqslant \|\mu\|.$$

С другой стороны, для любой $f \in C_c(X)$

$$|\mu(f)|_K \leqslant N_\mu(f) = \sup_x|f(x)|_K N_\mu(x) \leqslant \sup_x N_\mu(x)\|f\|.$$

Далее для определения Q_p-значных вероятностных мер мы будем использовать следующее условие. Для приложений нам необходима мера не только на кольце $\Delta(X)$, но также и на алгебре всех замкнуто-открытых подмножеств.

Определение 4.1. Мера μ называется убывающей (на бесконечности), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $U_\varepsilon \in \Delta(X)$, что

$$\sup\left\{N_\mu(x) : \ x \in \bar{U}_\varepsilon\right\} < \varepsilon.$$

Из теоремы 4.1 следует, что убывающая мера μ ограничена. Нетрудно привести пример ограниченной, но неубывающей меры на Q_p.

Пример 4.1. Пусть $X = K = Q_p$, $\{x_n = p^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\mu(\{x_n\}) = 1$, $n = 0, 1, \ldots$ Тогда μ ограничена, но не убывает.

Символом $\Phi(X)$ обозначим алгебру замкнуто-открытых подмножеств пространства X.

Теорема 4.2. Пусть μ — убывающая мера. Тогда любое множество $A \in \Phi(X)$ суммируемо.

Доказательство. Нам нужно построить такую последовательность функций $g_n \in C_c(X)$, что $N_\mu(\phi_A - g_n) \to 0$. Пусть $\{B_n\}$ — последовательность подмножеств из $\Delta(X)$ такая, что $\sup\{N_\mu(x) : \ x \in B_n\} < 1/n$. Пусть $C_n = A \cap B_n$. Эти множества замкнуто-открыты. Далее,

$$N_\mu(\phi_A - \phi_{C_n}) = \sup_{x\in X}|\phi_A(x) - \phi_{C_n}(x)|_K N_\mu(x) < 1/n.$$

В частности, используя данную теорему, мы получаем, что пространство X суммируемо.

Убывающая мера μ может быть продолжена на алгебру $\Phi(X)$ с сохранением свойств конечной аддитивности и ограниченности: для любого $A \in \Phi(X)$

$$\sup\{|\mu(B)|_K :\ B \subset A, B \in \Delta(X)\} < \infty.$$

Для доказательства этого утверждения нам достаточно показать, что

$$|\mu(B)|_K = N_\mu(\phi_B) = \sup_x \phi_B(x) N_\mu(x) \leqslant \|\mu\|.$$

Заметим также, что для любого $A \in \Phi(X)$ существует такая последовательность (C_n), $C_n \in \Delta(X)$, что $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\mu(C_n)$.

Символом $C_b(X)$ обозначим пространство непрерывных ограниченных функций $f\colon X \to K$. Это пространство наделяется равномерной нормой $\|\cdot\|$.

Утверждение 4.1. Пусть μ — убывающая мера. Тогда любой функции $f \in C_b(X)$ соответствует элемент $f \in L^1(X,\mu)$ и выполняется неравенство

$$|\mu(f)|_K \leqslant N_\mu(f) \leqslant \|f\|\|\mu\|.$$

Доказательство. Пусть (B_n) — такая же последовательность, что и в теореме 4.2. Тогда

$$N_\mu(f - f\phi_{B_n}) \leqslant \sup_{x\in\bar{B}_n}|f(x)|_K N_\mu(x) \leqslant \|f\|/n.$$

Утверждение 4.2. Мера μ является убывающей тогда и только тогда, когда подмножество X_α является компактом для любого $\alpha > 0$.

Доказательство.

1. Множества X_α замкнуто-открыты. Используя убывание меры μ, получаем, что существует такое $U_\alpha \in \Delta(X)$, что $N_\mu(x) < \alpha$ для $x \in \bar{U}_\alpha$. Поэтому $X_\alpha \subset U_\alpha$.

2. Теперь наоборот, пусть все X_α являются компактами для любых $\alpha > 0$. Для каждой точки $x \in X_\alpha$ существует замкнуто-открытая окрестность $U(x)$. Система таких окрестностей является открытым покрытием компактного подмножества X_α. Существует конечное подпокрытие $(U(x_j))_{j=1}^n$. Получаем $G_\alpha = \bigcup\limits_{j=1}^n U(x_j)$. Это множество принадлежит $\Delta(X)$, но

$$\sup\left\{N_\mu(x) :\ x \in \bar{G}_\alpha\right\} \leqslant \sup\left\{N_\mu(x) :\ x \in \bar{X}_\alpha\right\} < \alpha.$$

§ 5.5. Произведение функции и меры

Пусть μ — произвольная мера на X, $f \in L^1(X,\mu)$. Рассмотрим функционал $\nu = f\mu$, $\nu(g) = \mu(fg)$ для $g \in C_c(X)$. Заметим, что

$$|\nu(g)|_K \leqslant N_\mu(fg) \leqslant N_\mu(f)\|g\|.$$

Поэтому ν — ограниченная мера.

Теорема 5.1. Пусть μ мера, $f \in L^1(X,\mu)$, $\nu = f\mu$. Тогда

$$N_\nu(x) = |f(x)|_K N_\mu(x). \tag{5.1}$$

Доказательство. Из определений $N_\nu(x)$ и $N_\mu(x)$ следует, что существует такая открыто-компактная окрестность U точки x, что

$$N_\nu(\phi_U) - N_\nu(x) \leqslant \varepsilon \tag{5.2}$$

и $N_\mu(\phi_U) - N_\mu(x) \leqslant \varepsilon$. Так как $f \in L^1$, то существует такая $g \in C_c(X)$, что $N_\mu(f-g) \leqslant \varepsilon$. Можно рассмотреть такую окрестность U, что $|g(y)-g(x)|_K \leqslant \varepsilon$ для любого $y \in U$. На основании (5.2) достаточно оценить

$$|N_\mu(f\phi_U) - |f(x)|_K N_\mu(x)|.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&|N_\mu(g\phi_U) - |g(x)|_K N_\mu(x)| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \sup_{y\in Y}|g(x) - gy)|_K N_\mu(y) + |g(x)|_K |N_\mu(\phi_U) - N_\mu(x)| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \varepsilon\left(\sup_{y\in Y} N_\mu(y) + |g(x)|_K\right) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

То есть получаем, что

$$|N_\mu(f\phi_U) - N_\mu(g\phi_U)| \leqslant \varepsilon$$

и

$$||g(x)|_K N_\mu(x) - |f(x)|_K N_\mu(x)| \leqslant \sup_x |g(x) - f(x)|_K N_\mu(x) \leqslant \varepsilon.$$

Как известно, каждая суммируемая функция f абсолютно непрерывна относительно $N_\mu(x)$. Используя (5.2), получаем

$$\forall\varepsilon > 0 \exists V \in \Delta(X) : \ N_\mu(f\phi_{\bar V}) = N_\nu(\phi_{\bar V}) < \varepsilon.$$

Данный результат можно сформулировать как следующее утверждение.

Утверждение 5.1. Пусть μ мера, $f \in L^1(X,\mu)$. Тогда мера $\nu = f\mu$ является убывающей.

§ 5.6. Формула замены переменных в интеграле Монна–Спрингера для убывающей меры

Далее везде символом S будем обозначать локально-компактное полное неархимедово поле. Рассмотрим S-значные меры и функции $(K = S)$.

Теорема 6.1. Пусть μ — убывающая мера и функция $\eta \in L^1(X, \mu)$. Тогда композиция $f \circ g \in L^1(X, \mu)$.

Доказательство. Так как $\eta \in L^1(X, \mu)$, то η непрерывна на X_α. Поэтому $M_\alpha = \eta(X_\alpha)$ является компактом. Обозначим через V_α шар в поле S с центром в нуле такой, что $M_\alpha \subset V_\alpha$.

И пусть $U_\alpha \in \Delta(X)$ такая, что $\sup\left\{N_\mu(x) :\ x \in \bar{U}_\alpha\right\} < \alpha$.

Так как $\eta \in L^1$, то для любого $\delta > 0$ существует такое $\eta_\delta \in C_c(X)$, что $N_\mu(\eta - \eta_\delta) < \eta$.

Теперь рассмотрим систему функций

$$g_{\delta\alpha}(x) = [(f\phi_{V_\alpha}) \circ \eta_\delta]\phi_{U_\alpha}.$$

Эти функции принадлежат пространству $C_c(X)$. Заметим, что

$$g_{\delta\alpha}(x) = f\left(\eta_\delta(x)\right)\phi_{V_\alpha}\left(\eta_\delta(x)\right)$$

для $x \in X_\alpha \subset U_\alpha$.

Докажем, что $N_\mu(f \circ \eta - g_{\delta\alpha}) \to 0$ при δ, $\alpha \to 0$.

Сначала мы выберем такое α, что $\|f\|\alpha < \varepsilon$. Тогда

$$N_\mu(f \circ \eta - g_{\delta\alpha}) \leqslant \max\Bigg[\sup_{x \in X_\alpha} |f(\eta(x)) - g_{\delta\alpha}(x)|_S N_\mu(x),$$
$$\sup_{x \in \bar{X}_\alpha} |f(\eta(x)) - g_{\delta\alpha}(x)|_S N_\mu(x)\Bigg] = \max\left[\gamma_{\delta,\alpha}, \lambda_{\delta\alpha}\right].$$

Так как $\lambda_{\delta\alpha} \leqslant \|f\|\alpha < \varepsilon$, то

$$\gamma_{\delta\alpha} = \sup_{x \in X_\alpha} |f(\eta(x)) - (\eta_\delta(x))\phi_{V_\alpha}(\eta_\delta(x))|_S N_\mu(x) =$$
$$= \sup_{x \in X_\alpha} |(f\phi_{V_\alpha})(\eta(x)) - (f\phi_{V_\alpha})(\eta_\delta(x))|_S N_\mu(x).$$

Теперь мы выберем $\delta = \theta\alpha$. Тогда $N_\mu(\eta - \eta_\delta) \leqslant \theta\alpha$. Таким образом, $|\eta(x) - \eta_\delta(x)|_S N_\mu(x) \leqslant \theta\alpha$. А это и означает, что $|\eta(x) - \eta_\delta(x)|_S \leqslant \theta$ для $x \in X_\alpha$. Функция $f\phi_{V_\alpha}$ имеет компактный носитель, и, следовательно, она равномерно непрерывна. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\theta_\varepsilon > 0$, что $|f(y_1) - f(y_2)|_S < \varepsilon/\|\mu\|$ при $|y_1 - y_2|_S \leqslant \theta_\varepsilon$.

Для завершения доказательства достаточно выбрать $\delta = \delta_\varepsilon = \theta_\varepsilon\alpha$.

Теорема 6.2. Пусть μ — убывающая мера, $\eta \in L^1(X, \mu)$. Тогда функционал μ: $C_c(S) \to S$, определенный с помощью уравнения $\mu(f) = \mu(f \circ g)$, является ограниченной мерой на $C_c(S)$.

Если мера μ ограничена, но не убывает, то возможно, что $f \circ g \notin L^1(X, \mu)$ для $f \in C_c(S)$.

Пример 6.1. Пусть μ такая же мера, что и в теореме. Рассмотрим функцию $\eta(x_n) = y_n = p^n$, $\eta(x) = 0$ при $x \neq x_n$. Покажем, что $\eta \in L^1$. Для каждой точки x_n существуют замкнуто-открытые шары V_n, имеющие пустое пересечение для различных точек. Рассмотрим непрерывные функции с компактными носителями:

$$\eta_N(x) = \sum_{k=1}^{N} y_k \phi_{V_k}(x).$$

Тогда $N_\mu(\eta - \eta_N) \to 0$. Пусть теперь f равно $1+y$ на шаре $U_1(0)$ и нулю вне его. Тогда $z_n = f(y_n) = 1 + p^n$ и $\alpha_n z^n \not\to 0$, $n \to 0$.

Утверждение 6.1. Пусть μ — убывающая мера, $\eta \in L^1(X, \mu)$. Тогда

$$N_{\mu_\eta}(f) \leqslant N_\mu(f \circ \eta). \tag{6.1}$$

Доказательство.

$$N_{\mu_\eta}(f) = \sup_{g \neq 0, g \in C_c} \|g\|^{-1} |\mu_\eta(fg)|_S \leqslant \sup_x |f(\eta(x))|_S N_\mu(x).$$

Это неравенство может быть строгим.

Лемма 6.1. Если $y \notin M_\alpha = \eta(X_\alpha)$, то $N_{\mu_\eta}(y) < \alpha$.

Доказательство. Множество M_α замкнуто, поэтому для любого $y \in \bar{M}_\alpha$ существует окрестность V_α: $V_\alpha \cap M_\alpha = \varnothing$. Далее, используя равенство (5.1) и неравенство (6.1), получаем

$$N_{\mu_\eta}(y) = \inf_{y \in V \in \Delta(X)} N_{\mu_\eta}(\phi_V) \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{y \in V \in \Delta(X)} N_\mu(\phi_V \circ \eta) \leqslant \sup_x |\phi_{V_\alpha}(\eta(x))|_S N_\mu(x) < \alpha.$$

Утверждение 6.2. Мера μ_η является убывающей для любого $\eta \in L^1(X, \mu)$.

Данное утверждение является следствием леммы 6.1.

Можно наложить более слабые условия на функцию f в теореме 6.1.

Пусть $\eta \in L^1$. Введем функциональное пространство $\Gamma(\eta)$ функций $f\colon S \to S$, непрерывных на M_α для любого $\alpha > 0$. Символом $\Gamma_b(\eta)$ обозначим подпространство пространства $\Gamma(\eta)$, состоящее из ограниченных функций.

Теорема 6.3. Пусть μ — убывающая мера, $\eta \in L^1(X, \mu)$, $f \in \Gamma_b(\eta)$. Тогда композиция $f \circ \eta \in L^1(X, \mu)$, функция $f \in L^1(S, \mu_\eta)$ и выполняется следующее равенство:

$$\mu_\eta(f) = \mu(f \circ \eta). \tag{6.2}$$

Доказательство.

1. Покажем, что $f \circ g \in L^1(X, \mu)$. Используя равномерную непрерывность ограничения f_α функции f на M_α, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(y)|_S < \varepsilon$, при $|x - y|_S < \delta$, $x, y \in M_\alpha$. Рассмотрим покрытие $U_\delta(x)$, $x \in M_\alpha$. Существует конечное подпокрытие $\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_\delta(x_j) \supset M_\alpha$. Пусть

$$f_{\alpha\beta}(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\phi_{U_\delta(x_j)}(x)$$

для $\varepsilon = \beta$. Тогда $f_{\alpha\beta} \in C_c$ и

$$\sup_{x \in M_\alpha} |f_{\alpha\beta}(x) - f(x)|_S < \beta.$$

Теперь пусть функции η_δ такие же, как и в теореме 6.1. Рассмотрим функции $g_{\alpha\beta\delta}(x) = f_{\alpha\beta}(\eta(x))\phi_{U_\alpha}(x)$, где множество U_α такое же, как в предыдущей теореме. Аналогично теореме 6.1. можно доказать, что

$$\rho_{\alpha\beta\delta} = N_\mu(f \circ \eta - g_{\alpha\beta\delta}) \to 0, \quad \alpha, \beta, \delta \to 0.$$

Таким образом, правая часть уравнения (6.2) определена.

Теперь покажем, что функция $f \in L^1(S, \mu_\eta)$. Для этого нам достаточно доказать, что существует последовательность функций $\{\phi_n\}$, $\phi_n \in C_c(S)$ такая, что $N_{\mu_\eta}(f - \phi_n) \to 0$. По лемме:

$$N_{\mu_\eta}(f - f_{\alpha\beta}) = \sup_{y \in S} |f(y) - f_{\alpha\beta}(y)|_S N_{\mu_\eta} \leqslant$$
$$\leqslant \max\left[\sup_{y \in \bar{M}_\alpha} |f(y)|_S N_{\mu_\eta}(y);\ \sup_{y \in M_\alpha} |f(y) - f_{\alpha\beta}(y)|_S N_{\mu_\eta}(y)\right] \leqslant$$
$$\leqslant \max\left[\alpha\|f\|, \beta\|\mu\|\right] \to 0, \quad \alpha, \beta \to 0.$$

Следовательно, левая часть уравнения (6.2) определена. Теперь докажем, что левая часть равна правой. Используя предыдущие рассуждения, получаем: $\mu_\alpha(f \circ \eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta})$. Далее, $N_\mu(f \circ \eta - f_{\alpha\beta} \circ \eta) \to 0$. Таким образом,

$$\mu(f \circ \eta) = \lim \mu(f_{\alpha\beta} \circ \eta) = \lim \mu_\eta(f_{\alpha\beta}).$$

Замечание 6.1. Полученные результаты можно расширить на случай векторнозначных функций η: $X \to S^n$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\eta_j \in L^1$. Мера μ_η будет определена на $\phi(S^n)$.

§ 5.7. *P*-адическизначные вероятностные меры

5.7.1. Аксиоматика, основанная на убывающих мерах. Теория убывающих мер является основой для создания p-адическизначной теории вероятностей на аксиоматическом уровне.

Определение 7.1 (Колмогоров [94]). Вероятностное пространство — это тройка $(\Omega,\ \Phi(\Omega),\ P)$, где Ω — локально-компактное σ-компактное топологическое пространство размерности нуль (пространство элементарных событий), $\Phi(\Omega)$ — алгебра замкнуто-открытых подмножеств (алгебра событий), P — убывающая Q_p-значная мера на $\Phi(\Omega)$, $P(\Omega) = 1$ (вероятность).

Замечание 7.1. Аксиоматика Колмогорова строилась на основе произвольного абстрактного множества Ω и некоторой алгебры его подмножеств. Но такой подход не применим в нашем случае. Мы не можем рассматривать произвольное множество Ω и абстрактную алгебру его подмножеств. Топологические свойства (геометрия) пространства Ω играют большую роль в наших рассуждениях. Наша аксиоматика несколько похожа на теории геометрических вероятностей Фреше [29] и Крамера [23] (первоначальные рассуждения Колмогорова о вероятности были также связаны с конкретными геометриями на пространстве Ω).

Пусть S — локальное компактное неархимедово поле (как и в предыдущем параграфе), содержащее Q_p в качестве подполя.

Определение 7.2. Функция $\xi\colon \Omega \to S$ класса L^1 называется случайной величиной (СВ).

Введем математическое ожидание ξ с помощью обычного определения:

$$M\xi \equiv \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega) = P(\xi),$$

а также моменты $m_k(\xi) \equiv M\xi^k$ (если $\xi^k \in L^1$, то эти моменты корректно определены) и вероятностное распределение $P_\xi(A) = P(\xi \in A)$ (это убывающая нормированная мера на S). Вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где ξ_i — это СВ, называется случайным вектором. Вероятностное распределение P_ξ случайного вектора ξ можно ввести так же, как и для СВ (это убывающая нормированная мера на S^n). Мы также введем смешанные моменты случайного вектора: $m_\alpha(\xi) = M\xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_{n1}}$.

5.7.2. Независимые случайные величины.

Определение 7.3. СВ ξ и η называются независимыми, если

$$P(\xi \in A, \eta \in B) = P(\xi \in A)P(\eta \in B) \tag{7.1}$$

для всех A, $B \in \Delta(\Omega)$.

Лемма 7.1. Пусть ξ и η — независимые СВ. Тогда выполняется следующее равенство

$$Mf(\xi)g(\eta) = Mf(\xi)Mg(\eta) \tag{7.2}$$

для функций f, $g \in C_c(S)$.

Доказательство. Обозначим символом a выражение

$$|Mf(\xi)g(\eta) - Mf(\xi)Mg(\eta)|_S.$$

Пусть $f^\varepsilon = \sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon} c_k^\varepsilon \phi_{U_k^\varepsilon}$ — локальная постоянная функция такая, что $U_k^\varepsilon \in \Delta(S)$ и $\sup\limits_x |f(x) - f^\varepsilon(x)|_S < \varepsilon$; g^ε — аналогичная функция для g. Тогда $a \leqslant \max[a_{\varepsilon 1}, a_{\varepsilon 2}]$, где

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon 1} = |Mf(\xi)g(\eta) - Mf^\varepsilon(\xi)g^\varepsilon(\eta)|_S \leqslant \\ \leqslant \max\Big[\sup_\omega |f(\xi(\omega))|_S |g(\eta(\omega)) - g^\varepsilon(\eta(\omega))|_S N_P(\omega), \\ \sup_\omega |g^\varepsilon(\eta(\omega))|_S |f(\xi(\omega)) - f^\varepsilon(\xi(\omega))|_S N_P(\omega)\Big] = \max[u_\varepsilon, v_\varepsilon]; \end{aligned}$$

$$u_\varepsilon \leqslant \|f\|\|P\|, \quad v_\varepsilon \leqslant \varepsilon\|g^\varepsilon\|\|P\|;$$

$$\begin{aligned} a_{\varepsilon 2} = |Mf(\xi)Mg(\eta) - Mf^\varepsilon(\xi)Mg^\varepsilon(\eta)|_S \leqslant \\ \leqslant \max\left[|Mf(\xi)Mg(\eta) - g^\varepsilon(\eta)|_S, |Mg^\varepsilon(\eta)M(f(\xi) - f^\varepsilon(\xi))|_S\right] = \\ = \max[\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon]; \end{aligned}$$

$$\alpha_\varepsilon \leqslant N_P(f \circ \xi)N_P(g \circ \eta - g^\varepsilon \circ \eta) \leqslant N_P(f \circ \xi)\|P\|\|g - g^\varepsilon\|.$$

Таким же образом можно оценить β^ε.

Теорема 7.1. Пусть ξ и η — независимые СВ, функции f, $g \in C_b(S)$. Тогда выполняется равенство (7.2).

Доказательство. Пусть $M_{\alpha,\xi} = \xi(\Omega_\alpha)$, $M_{\alpha,\eta} = \eta(\Omega_\alpha)$, $\alpha > 0$. Множество $T_\alpha = M_{\alpha,\xi} \cup M_{\alpha,\eta}$ является компактом.

Пусть функция $u \in C_b(S)$. Ограничение u на T_α является равномерно непрерывным. Повторяя рассуждения теоремы 6.3, мы построим такую функцию $u_{\alpha\beta} \in C_b(S)$, что

$$\sup_{x \in T_\alpha} |u(x) - u_{\alpha\beta}(x)|_S < \beta.$$

Теперь пусть $f_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$ — аналогичные функции для f и g. С помощью 7.1 оценим выражение

$$\lambda_{\alpha\beta} = |M(f(\xi)g(\eta) - f_{\alpha\beta}(\xi)g_{\alpha\beta}(\eta))|_S;$$

$$\mu_{\alpha\beta} = |Mf(\xi)Mg(\eta) - Mf_{\alpha\beta}(\xi)Mg_{\alpha\beta}(\eta)|_S.$$

Например, $\lambda_{\alpha\beta} \leqslant \max[\lambda_{\alpha\beta 1}, \lambda_{\alpha\beta 2}]$, где

$$\lambda_{\alpha\beta 1} \leqslant \sup_{\omega} |f(\xi(\omega))|_S |g(\eta(\omega)) - g_{\alpha\beta}(\eta(\omega))|_S N_P(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \|f\| \max \left[\sup_{\omega\in\Omega_\alpha} |g(\eta(\omega)) - g_{\alpha\beta}(\eta(\omega))|_S N_P(\omega), \right.$$

$$\left. \sup_{\omega\in\bar{\Omega}_\alpha} |g(\eta(\omega)) - g_{\alpha\beta}(\eta(\omega))|_S N_P(\omega) \right];$$

Если $\omega \in \Omega_\alpha$, то $\eta(\omega) \in M_{\alpha\eta} \subset T_\alpha$ и $\xi(\omega) \in M_{\alpha\xi} \subset T_\alpha$. Следовательно,

$$\lambda_{\alpha\beta 2} \leqslant \|f\| \max[\|P\|\beta, \|g\|\alpha] \to 0, \quad \alpha, \beta \to 0.$$

Мы можем таким же образом оценить $\lambda_{\alpha\beta 2}$.

Следствие 7.1. Пусть ξ и η — независимые СВ. Тогда для всех замкнуто-открытых подмножеств A и B выполняется равенство (7.1).

Далее везде будем говорить, что свойство Ξ выполняется почти всюду $(\mathrm{mod}\, P)$, если Ξ выполняется на подмножестве Ω_+.

Пусть СВ ξ и η ограничены почти всюду. Тогда из теоремы 6.3. следует, что ξ^k и η^k также СВ для любых $k = 0, 1, \ldots$ С помощью теоремы 6.1 получаем, что произведение $\xi^k\eta^k$ также является СВ. Поэтому все моменты $m_{kn}(\xi\eta)$ корректно определены.

Теорема 7.2. Пусть СВ ξ и η ограничены почти всюду. Эти СВ являются независимыми тогда и только тогда, когда

$$m_{kn}(\xi, \eta) = m_k(\xi) m_n(\eta) \tag{7.3}$$

для любых $k, n = 1, 2, \ldots$

Доказательство.

1. Пусть СВ ξ и η независимы, U — шар в S, содержащий множества $\xi(\Omega_+)$ и $\eta(\Omega_+)$. Тогда функции $f_k(y) = y^k \phi_U(y)$ и $g_n(y) = y^n \phi_U(y)$ принадлежат классу $C_c(S)$ и выполняются равенства:

$$M f_k(\xi) g(\eta) = m_{kn}(\xi, \eta), \quad M f_k(\xi) = m_k(\xi), \quad M g_n(\eta) = m_n(\eta).$$

2. Пусть выполняется условие (7.3), и функции f и g принадлежат классу $C_c(S)$. Можно рассмотреть случай, когда $\mathrm{supp}\, f$, $\mathrm{supp}\, g \subset U$. Для завершения доказательства используем тот факт, что множество U является компактом, и теорему Капланского.

Для СВ ξ, как и в обычной теории вероятностей, полагаем

$$\xi^c(\omega) = \xi(\omega)\phi_{U_c(0)}(\xi(\omega))c \in R_+.$$

Утверждение 7.1. СВ ξ и η являются независимыми, если выполняется условие (7.3) для всех ξ^c и η^c.

Утверждение 7.2. СВ ξ и η являются независимыми, если $P_z = P_\xi \otimes P_\eta$, где $z = (\xi, \eta)$.

Это очевидное следствие леммы 7.1.

5.7.3. Условное математическое ожидание. Пусть ξ и η — это СВ. Условное математическое ожидание $M[\xi|\eta = y]$ определяется как функция $m(y) \in L^1(S, P_\eta)$ такая, что

$$\int\limits_{\{\omega\in\Omega:\ \eta(\omega)\in B\}} \xi(\omega)P(d\omega) = \int\limits_B m(y)P_\eta(dy)$$

для любого множества $B \in \Delta(S)$.

Это определение корректно, так как $\phi_B(\eta(\omega))\xi(\omega) \in L^1(\Omega, P)$ для всех СВ ξ и η. Это следует из следующего утверждения.

Утверждение 7.3. Пусть ξ и λ — СВ и λ ограничена почти всюду. Тогда $\xi\lambda$ является СВ.

Доказательство. Покажем, что $\psi(\omega) = \xi(\omega)\lambda(\omega) \in L^1$. Рассмотрим функцию $g(\omega) = \xi(\omega)u(\omega)$, где $u \in C_c$, и покажем, что $g(\omega)$ является СВ. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $\alpha \in C_c(\Omega)$, что $N_P(\xi - \alpha) < \varepsilon/\|u\|$. Следовательно, $N_P(\xi u - \alpha u) < \varepsilon$ при $\alpha u \in C_c(\Omega)$.

Теперь используем условие $\lambda \in L^1$: существует последовательность (u_n), $u_n \in C_c(\Omega)$, такая, что $N_P(\lambda - u_n) \to 0$. Следовательно,

$$\sup_{\omega\in\Omega_\alpha} |\lambda(\omega) - u_n(\omega)|_S \leqslant (1/\alpha) \sup_{\omega\in\Omega_\alpha} |\lambda(\omega) - u_n(\omega)|_S N_P(\omega) \to 0, \quad n \to 0,$$

кроме того, мы можем рассмотреть случай $\|u_n\| \leqslant \sup\limits_{\omega\in\Omega_+} |\lambda(\omega)| = C$.

Далее рассмотрим последовательность СВ $\{\psi_N(\omega) = \xi(\omega)u_N(\omega)\}$. Имеет место неравенство

$$|\psi_N(\omega)|_S \leqslant C|\xi(\omega)|_S, \quad \omega \in \Omega_+,$$

и $\{\psi_N\}$ равномерно сходится к $\xi\lambda$ на любом подмножестве Ω_α:

$$\sup_{\omega\in\Omega_\alpha} |\xi(\omega)\lambda(\omega) - \psi_N(\omega)|_S \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\omega\in\Omega_\alpha} |\xi(\omega)|_S \sup_{\omega\in\Omega_\alpha} |\lambda(\omega) - u_N(\omega)|_S \to 0, \quad N \to \infty.$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью сужения функции $\lambda(\omega)$ на Ω_α. Чтобы завершить доказательство, необходимо использовать предельную теорему для интеграла Монна–Спрингера.

В неархимедовом случае нет аналога теоремы Радона–Никодима [102]. Возможны ситуации, в которых не существует условного математического ожидания.

Далее везде будет рассматриваться случай ограниченной почти всюду СВ ξ. Конечно, это условие является только техническим, но без него невозможно развитие нашей теории. Мы также полагаем, что математическое ожидание $M[\lambda(\omega)|\eta(\omega) = y]$ существует везде, где о нем идет речь.

Утверждение 7.4. Для любой функции $f \in \Gamma_b(\eta)$ выполняется равенство

$$Mf(\eta(\omega))\xi(\omega) = Mf(\eta(\omega))M[\xi(\omega)|\eta = \eta(\omega)]. \tag{7.4}$$

Доказательство. Пусть $\xi(\Omega_+) \subset U$, $U \in \Delta(\Omega)$. Тогда

$$f(\eta(\omega))\xi(\omega)\phi_U(\xi(\omega)) = f(\eta(\omega))\xi(\omega).$$

почти всюду.

Далее, функция $g(x,y) = f(y)x\phi_U(x)$ принадлежит классу $\Gamma_b(z)$, где $z = (\xi, \eta)$. Используя формулу замены переменных, получаем

$$I = \int\limits_{\Omega} g(\xi(\omega), \eta(\omega))P(d\omega) = \int\limits_{S^2} f(y)x\phi_U(x)P_z(dxdy) = \\ = \int\limits_{S^2} f(y)xP_z(dxdy).$$

Мы рассматриваем меру

$$\lambda(A) = \int\limits_{S^2} \phi_A(x)P_z(dxdy) = \int\limits_{A} m(y)xP_\eta(dy),$$

где $m(y) = M[\xi|\eta = y]$.

Следовательно,

$$I = \int\limits_{S} f(y)m(y)P_\eta(dy).$$

Утверждение 7.5. Условное математическое ожидание единственно $(\operatorname{mod} P_\eta)$.

Доказательство. Пусть $m_j(y) = M[\xi|\eta = y]$, $j = 1, 2$. Тогда

$$N_{P_\eta}(m_1 - m_2) = \sup_{\phi \neq 0, \phi \in C_c(S)} \|\phi\|^{-1} |P_\eta(\phi(m_1 - m_2))|_S.$$

Но

$$P_\eta(\phi m_1) = \int\limits_{S} \phi(y)m_1(y)P_\eta(dy) = \int\limits_{\Omega} \phi(\eta(\omega))\xi(\omega)P(d\omega) = P_\eta(\phi m_2)$$

для любых $f \in \Gamma_b(\eta)$.

Утверждение 7.6. Для любой функции $f \in \Gamma_b(\eta)$ выполняется равенство

$$M[f(\eta)\xi|\eta = y] = f(y)M[\xi|\eta = y]. \tag{7.5}$$

Доказательство. Конечно, мы рассматриваем это равенство как равенство почти всюду (mod P_η). Используя формулу замены переменных, получаем

$$\int\limits_{\{\omega\in\Omega:\eta(\omega)\in B\}} f(\eta(\omega)), \xi(\omega)P(d\omega) = \int\limits_B \phi_B(y)f(y)m(y)P_\eta(dy).$$

Для завершения доказательства применяем предыдущее утверждение.

Утверждение 7.7. Пусть ξ и η — независимые СВ. Тогда

$$M[\xi|\eta = y] = M\xi. \tag{7.6}$$

Доказательство. Используя ограниченность ξ (почти всюду), получаем

$$\int\limits_{\{\omega\in\Omega:\eta(\omega)\in B\}} \xi(\omega)P(d\omega) = M\xi(\omega)M\phi_B\eta(\omega) = \int\limits_S \phi_B(y)M\xi P_\eta(dy).$$

Утверждение 7.8. Пусть ξ и η — независимые СВ и функция $\phi \in C_b(S^2)$. Тогда

$$M[\phi(\xi,\eta)|\eta = y] = M\phi(\xi, y). \tag{7.7}$$

Доказательство. Символом $g_1(y)$ обозначим левую часть (7.7), а $g_2(y)$ — правую. Мы хотим доказать, что $N_{P_\eta}(g_1 - g_2) = 0$. Покажем, что равенство $P_\eta(\psi g_1) = P_\eta(\psi g_2)$ выполняется для любого $\psi \in C_b(S)$. Но

$$P_\eta(\psi g_1) = \int\limits_\Omega \psi(\eta(\omega))\phi(\xi(\omega), \eta(\omega))P(d\omega)$$

и

$$P_\eta(\psi g_2) = \int\limits_S \psi(y) = \int\limits_\Omega \phi(\xi(\omega), y)P(d\omega)P_\eta(dy) = \int\limits_{S^2} \psi(y)\phi(x, y)P_z(dxdy),$$

где $z = (\xi, \eta)$.

Обозначим через R_α компактное множество $z(\Omega_\alpha)$, $\alpha > 0$. Пусть $T_\alpha \in \Delta(S^2)$, $R_\alpha \subset T_\alpha$. Можно рассмотреть случай $T_\alpha \in T_\alpha^1 \times T_\alpha^2$, $T_\alpha^j \in \Delta(S)$. С помощью леммы 6.1 получаем

$$|P_z(\psi\phi) - P_z(\psi\phi\phi_{T_\alpha})|_S \leqslant \\ \leqslant N_{P_z}(\psi\phi(1 - \phi_{T_\alpha})) \leqslant \|\psi\| \sup_{t\in\bar{T}_\alpha} |\phi(t)|_S N_{P_z}(t) \leqslant \alpha\|\psi\|\,\|\phi\|.$$

Следовательно, возможна аппроксимация $P_\eta(\psi g_2)$ с помощью последовательности

$$\{P_z(\psi\phi\phi_{T_\alpha})\}_{\alpha>0}.$$

Далее, используя теорему Капланского, получаем, что существует многочлен p_ε: $T_\alpha \to S$ такой, что

$$\sup_{t\in T_\alpha} |\phi(t) - p_\varepsilon(t)|_S \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|P_z(\psi\phi\phi_{T_\alpha}) - P_z(\psi p_\varepsilon \phi_{T_\alpha})|_S \leqslant \varepsilon \|\psi\| \|P_z\|.$$

Таким образом, возможна аппроксимация $P_z(\psi g_2)$ с помощью последовательности

$$\{P_z(\psi p_\varepsilon \phi_{T_\alpha})\}_{\alpha,\varepsilon>0}.$$

Заметим, что

$$P_z(\psi p_\varepsilon \phi_{T_\alpha}) = \sum_{k_1,k_2} p_{\varepsilon k_1 k_2}(M\psi(\eta)\eta^{k_2}\phi_{T^2_\alpha}(\eta))(M\psi(\xi)\xi^{k_1}\phi_{T^1_\alpha}(\xi)).$$

СВ ξ, η независимы, и, следовательно,

$$P_z(\psi p_\varepsilon \phi_{T_\alpha}) = \sum_{k_1,k_2} p_{\varepsilon k_1 k_2} M\psi(\eta)\eta^{k_2}\phi_{T^2_\alpha}(\eta)\psi(\xi)\xi^{k_1}\phi_{T^1_\alpha}(\xi) =$$
$$= M\psi(\eta)p_\varepsilon(\xi,\eta)\phi_{T_\alpha}(\xi,\eta).$$

Для завершения доказательства покажем, что семейство СВ $\{(\psi(\eta)p_\varepsilon(\xi,\eta)\phi_{T_\alpha}(\xi,\eta))\}_{\alpha,\varepsilon>0}$ аппроксимирует СВ $\psi(\eta)\phi(\xi,\eta)$. Действительно,

$$N_{P_z}(\psi(\eta)\phi(\xi,\eta)(1-\phi_{T_\alpha}(\xi,\eta))) \leqslant$$
$$\leqslant \|\psi\|\|\phi\| N_{P_z}(1-\phi_{T_\alpha}(\xi,\eta)) \leqslant \|\psi\|\|\phi\| \sup_{\omega\in\bar{\Omega}_\alpha} N_{P_z}(\omega) \leqslant \alpha\|\psi\|\|\phi\|$$

и

$$N_{P_z}(\psi(\eta)\phi(\xi,\eta)\phi_{T_\alpha}(\xi,\eta) - \psi(\eta)p_\varepsilon(\xi,\eta)\phi_{T_\alpha}(\xi,\eta)) \leqslant$$
$$\leqslant \|\psi\| \sup_{\omega\in\Omega_\alpha} |(\psi(\xi(\omega),\eta(\omega)) - p_\varepsilon(\xi(\omega),\eta(\omega)))\phi_{T_\alpha}(\xi,\eta))|_S N_{P_z}(\omega) \equiv \gamma_\varepsilon.$$

Полагаем $W_\alpha = z^{-1}(T_\alpha)$; $\Omega_\alpha \subset W_\alpha$. Тогда

$$\gamma_\varepsilon \leqslant \max\left[\sup_{\omega\in W_\alpha} |\phi(\xi(\omega),\eta(\omega)) - p_\varepsilon(\xi(\omega),\eta(\omega))|_S N_P(\omega),\ \sup_{\omega\in\bar{W}_\alpha} N_P(\omega)\right] \leqslant$$
$$\leqslant \max[\varepsilon\|P\|,\alpha] \to 0, \quad \alpha,\varepsilon\to 0.$$

Следствие 7.2. Пусть ξ и η — независимые СВ и множество $B\in\Phi(S^2)$. Тогда

$$M[\phi_B(\xi,\eta)|\eta = y] = M\phi_B(\xi,y).$$

5.7.4. Условная плотность. Пусть ν — мера на S (она может быть даже неубывающей или неограниченной). СВ ξ имеет плотность относительно ν, если существует такая функция $f_\xi(y)$ (плотность) класса $L^1(S,\nu)$, что $P(\xi(\omega)\in A)=\int\limits_A f_\xi(y)\nu(dy)$, $A\in\Phi(S)$, т.е. $P_\xi=f_\xi\nu$. Как обычно, $\int\limits_S f_\xi(y)\nu(dy)=P(\xi(\omega)\in S)=1$. Аналогичное определение будет использоваться для случайных векторов.

Пусть случайный вектор $z(\omega)=(\xi(\omega),\ \eta(\omega))$ имеет плотность $f_z(x,y)$ относительно $\nu\otimes\nu$: $P_z=f_z\nu\otimes\nu$. Полагаем $f_{\xi|\eta}(x|y)=$ $=f_z(x,y)/f_\eta(y)$, где $f_{\xi|\eta}(x|y)=0$ при $f_\eta(y)=0$.

Утверждение 7.9. Пусть случайный вектор $z=(\xi,\eta)$ имеет плотность относительно $\nu\otimes\nu$ и множество $G=\{y\in S\colon f_\eta(y)=0\}$ ν-пренебрежимо. Тогда существует

$$M[\,\xi|\eta=y]=\int\limits_S xf_{\xi|\eta}(x|y)\nu(dx).$$

Доказательство. Проверим равенство

$$I_1=\int\limits_\Omega \xi(\omega)\phi_B(\eta(\omega))P(d\omega)=\int\limits_B m(y)P_\eta(dy)=I_2.$$

Используем ограниченность множества $\xi(\Omega_+)$ и формулу замены переменных:

$$I_1=\int\limits_\Omega x\phi_B(y)f_z(x,y)\nu\otimes\nu(dxdy)=\int\limits_S \phi_B(y)m(y)P_\eta(dy)=I_2.$$

5.7.5. Дискретные случайные величины. Рассмотрим случай дискретной СВ $\eta=(y_n)$. Можно получить обычную формулу для условного математического ожидания. Но неархимедова структура порождает новую проблему. Множества $A_k=\eta^{-1}(y_k)$ могут оказаться несуммируемыми.

Пример 7.1. Пусть $\Omega=Z_q$ и $P=dx$ — мера Хаара на Z_q, принимающая свои значения на Q_p. Тогда $N_P(\omega)\equiv 1$ и $L^1(\Omega,P)=$ $=C(\Omega)$. Пусть y_n — последовательность p-адических чисел такая, что $y_i\neq y_j$, $i\neq j$, и существует $\lim\limits_{j\to\infty}y_j=y_\infty$. Обозначим через s_l сферу радиуса q^{-l} и введем функцию η: $\eta\equiv y_l$ на s_l, $l=0,1,2,\ldots$ и $\eta(0)=$ $=y_\infty$. Множества s_l замкнуто-открыты, и непрерывность η является следствием ее непрерывности в нуле. Следовательно, $\eta=(y_l)_{l=0}^\infty$ — дискретная СВ. Но $A_\infty=\eta^{-1}(y_\infty)=\{0\}$ и $\phi_{A_\infty}\notin C(\Omega)$.

Утверждение 7.10. Пусть $\eta = (y_n)$ — дискретная СВ и y_k изолированные точки последовательности (y_n). Тогда множество A_k суммируемо.

Доказательство. Пусть $U \in \Delta(S)$, $y_k \in U$, но $y_j \neq U$, $j \neq k$. Тогда $\phi_U(\eta(\omega)) \equiv \phi_{A_k}(\omega)$. Для доказательства достаточно применить теорему 6.1.

Замечание 7.2. Наиболее интересен случай, когда

$$\eta(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \phi_{A_k}(\omega), \tag{7.8}$$

где $A_k \in \Phi(\Omega)$. Здесь не возникает проблемы с суммируемостью множества A_k.

Рассмотрим более общее достаточное условие. Далее компактное множество Ω_α наделено топологией, индуцированной из Ω.

Утверждение 7.11. Множество $A \subset \Omega$ суммируемо тогда и только тогда, когда множества $A_\alpha = A \cap \Omega_\alpha$, $\alpha > 0$, замкнуто-открыты в топологических пространствах Ω_α.

Доказательство.

1. Пусть $\phi_A \in L^1(\Omega, P)$. В частности, ограничение ϕ_A на Ω_α непрерывно. Пусть U — шар с центром в точке $t = 1 \in S$ и $a = 0 \notin U$. Тогда $\phi_{A_\alpha}^{-1}(U) = A_\alpha$ — замкнуто-открытое множество, потому что U — замкнуто-открытое множество и ϕ_{A_α} непрерывно.

2. Пусть $A_\alpha \in \Delta(\Omega_\alpha)$ (множества Ω_α компактны, и, следовательно, понятия замкнуто-открытости и компактно-открытости совпадают). Пусть $V_\alpha \in \Phi(\Omega)$: $V_\alpha \cap \Omega_\alpha = A_\alpha$. Из компактности A_α следует, что $V_\alpha \in \Delta(\Omega)$, таким образом, $\phi_{A_\alpha} \in C_c(\Omega)$. Но

$$N_P(\phi_A - \phi_{V_\alpha}) \leqslant \sup_{\omega \in \bar{\Omega}_\alpha} |\phi_A(\omega) - \phi_{V_\alpha}(\omega)| N_P(\omega) \leqslant \alpha.$$

Пример 7.2. Пусть $\Omega = Z_q$, $\mu = dx$. Рассмотрим плотность f такую, что ограничение $f\colon \Omega \to Q_p$ на s_l равно константе f_l, где $f_l \to 0$, $l \to \infty$, $|f_l|_p < |f_{l-1}|_p$ и $f(0) = 0$. Эта функция непрерывна, поэтому принадлежит L^1. Условие нормировки влечет дополнительное условие $\sum f_l \mu(s_l) = 1$. Пусть $P = f\mu$. Из первого пункта теоремы получаем: $N_P(\omega) = |f(\omega)|_p$ и $\Omega_0 = \{0\}$, $\Omega_+ = Z_q \backslash \{0\}$. Множество $A = \Omega_+$ не является замкнуто-открытым множеством, и поэтому не выполняются условия замечания 1 для этой функции. Но множества $A_\alpha = A \cap \Omega_\alpha \in \Phi(\Omega)$, и, следовательно, множество A суммируемо.

Легко изменить данный пример и получить ситуацию, когда множества A_α не будут замкнуто-открытыми.

Пример 7.3. Пусть $\Omega' = Z_q \times Z_q$, $\mu' = \mu \otimes \delta$, $\mu = dx$. Здесь $N_{\mu'}(x, 0) = 1$ и $N_{\mu'}(x, y) = 0$, $y \neq 0$. Введем плотность $\bar{f}(x, y)$: $\bar{f}(x, 0) = f(x)$, где f такая же плотность, как и в предыдущем примере, и $\bar{f}(x,y)=0$ при $y\neq 0$. Полагаем $P'=\bar{f}\mu'$. В этом случае

$$\Omega'_+=\{z=(x,0):\ x\neq 0\},\quad \Omega_0=\{z=(x,y):\ y\neq 0\}\cup\{z=(0,y)\}.$$

Пусть $A=\Omega_+$. Тогда $A_\alpha=A\cap\Omega'_\alpha=\Omega_\alpha\times\{0\}$, где Ω_α те же множества, что и в примере 7.2. Очевидно, что $A_\alpha\notin\Phi(\Omega')$. Пусть $U_\alpha=\Omega_\alpha\times Z_q\in\Phi(\Omega')$. Тогда $A_\alpha=U_\alpha\cap\Omega'_\alpha$. Здесь можно использовать утверждение 7.9.

Мы изучали вопрос о суммируемости множеств $A_k=\{\omega\in\Omega:\ \eta(\omega)=y_k\}$ для дискретной СВ $\eta(\omega)$. Теперь рассмотрим обратную задачу. Разберем случай, когда все множества A_k суммируемы. Нас интересуют условия, которые нужно наложить на функцию (7.8), чтобы она была СВ.

Утверждение 7.12. Пусть

$$\lim_{k\to\infty}|y_k|_S N_P(A_k)=0.$$

Тогда функция (7.8) является СВ.

Доказательство. Функции $\eta_N(\omega)=\sum\limits_{k=1}^{N}y_k\phi_{A_k}(\omega)$ являются СВ для всех N. То есть существуют функции $\xi_N(\omega)\in C_c(\Omega)$ такие, что $N_P(\eta_N-\xi_N)\leqslant\varepsilon$. Остается заметить, что $N_P(\eta_N-\xi_N)=\sup\limits_{k>N}|y_k|_S N_P(A_k)\to 0$, $N\to\infty$.

Лемма 7.2. Пусть множества $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ суммируемы и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=\Omega$, $A_i\cap A_j=\varnothing$, $i\neq j$. Тогда $A_k\cap\Omega_\alpha\neq\varnothing$, $\alpha>0$, только для конечного множества индексов k.

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу утверждения 7.11 система множеств $\{A_k\cap\Omega_\alpha\}$ — это открытое покрытие компактного топологического пространства Ω_α.

Утверждение 7.13. Пусть λ — некоторая СВ и η имеет вид (7.8), где множества $A_k\cap\Omega_\alpha$ суммируемы, функция $f\in C_c(S)$. Тогда выполняется равенство

$$Mf(\eta(\omega))\lambda(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}f(y_k)\int\limits_{A_n}\lambda(\omega)P(d\omega).$$

Доказательство. Из теоремы 6.1 следует, что $z(\omega)=f(\eta(\omega))$ — это СВ. Она ограничена и дискретна. Рассмотрим

$$u_n(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}f(y_k)\phi_{A_k}(\omega)\lambda(\omega).$$

Тогда $u_n(\omega) = z(\omega)\lambda(\omega)$, если $\omega \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, и $u_n(\omega) = 0$, если $\omega \notin \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Таким образом, выполняется неравенство $|u_n(\omega)|_S \leqslant \|f\||\lambda(\omega)|_S$. Чтобы завершить доказательство, мы используем лемму 7.2 и предельную теорему.

Утверждение 7.14. Пусть η удовлетворяет условиям утверждения 7.13. Тогда P_η является дискретной мерой, сосредоточенной в точках $(y_n) = \eta(\Omega)$, и $N_{P_\eta}(y_k) = |P(A_k)|_S$.

Это утверждение вытекает из предыдущего.

Теорема 7.3. Пусть λ — некоторая СВ, а СВ η такая же, как в утверждении 7.13. Тогда существует условное математическое ожидание $M[\lambda|\eta = y]$, которое вычисляется по формуле

$$M[\lambda|\eta = y_n] = (1/P(A_n)) \int_{A_n} \lambda(\omega)P(d\omega). \tag{7.9}$$

Доказательство. Если $P(A_n) = 0$, то по утверждению 7.14 $N_{P_\eta}(y_n) = 0$. Значит, из правой части равенства (7.9) следует, что функция $m(y)$ корректно определена. Нам остается только проверить, что эта функция является условным математическим ожиданием:

$$\int_{\{\omega:\eta(\omega)\in B\}} \lambda(\omega)P(d\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_B(y_k) \int_{A_n} \lambda(\omega)P(d\omega) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \phi_B(y_k)m(y_k)P(A_k) = \int_S \phi_B(y)m(y)P_\eta(dy).$$

Для завершения доказательства покажем, что $m \in L^1(S, P_\eta)$. Это эквивалентно равенству

$$\lim_{n\to\infty} m(y_n)P(A_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \lambda(\omega)P(d\omega) = 0.$$

Функция $\lambda(\omega)$ суммируема и, следовательно, абсолютно непрерывна: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $N_P(\lambda\phi_U) \leqslant \varepsilon$ при $N_P(U) < \delta$, $U \in \Delta(\Omega)$. И, в частности,

$$|\lambda(\omega)|_S N_P(\omega) \leqslant \varepsilon \tag{7.10}$$

для любого $\omega \in U$. Пусть теперь $\omega \notin \Omega_\delta$. Используя компактность Ω_δ, получаем, что существует окрестность $V \in \Delta(\Omega)$ точки ω такая, что $V \cap \Omega_\delta = \varnothing$. Но $N_P(\phi_V) < \delta$ удовлетворяет неравенству (7.10).

Из леммы 7.2 следует, что существует N такое, что $A_n \cap \Omega_\delta = \varnothing$ для всех $n > N$. Следовательно, (7.10) выполняется для всех точек $\omega \in A_n$.

Таким образом,

$$\left|\int\limits_{A_n} \lambda(\omega)P(d\omega)\right|_S \leqslant N_P(\lambda\phi_{A_n}) = \sup_{\omega\in A_n} |\lambda(\omega)|_S N_P(\omega) \leqslant \varepsilon.$$

Заметим, что здесь мы не использовали ограниченность λ.

§ 5.8. P-адическизначные вероятности Бернулли на кольце q-адических целых чисел

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{q-1}) \in Q_p^q$, где q и p — простые числа и $\alpha_0 + \ldots + \alpha_{q-1} = 1$. Эти коэффициенты порождают дискретную меру μ_α на множестве $T_q = \{0, 1, \ldots, q-1\}$, которая принимает свои значения на Q_p. Введем конечную последовательность таких мер $\{\mu_{\alpha^n}\}_{n=0}^{\infty}$ для векторов-коэффициентов α^n. Представим $\Omega = T_q^\infty = T_q \times \ldots \times T_q \ldots$ в виде кольца Z_q и рассмотрим на Ω формальное прямое произведение мер $\otimes_{n=0}^{\infty}\mu_{\alpha^n}$, где $A = (\alpha^0, \ldots, \alpha^n, \ldots)$ и $\alpha^n = (\alpha_0^n, \ldots, \alpha_{q-1}^n)$.

Элемент $\omega \in \Omega$ записывается в каноническом виде $\omega = \omega_0 + \omega_1 q + \ldots + \omega_m q^m + \ldots \equiv (\omega_0, \ldots, \omega_m, \ldots)$, $\omega_j \in T_q$. Обозначим S_{qn} множество всех слов длины n в алфавите T_q: $x = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$, $x_j \in T_q$, см., например, [140]. Символом S_q обозначим множество всех конечных слов. Положим $l(x) = n$ для $x \in S_{qn}$. Существует естественная топология произведения на множестве последовательностей Ω, а также топология, индуцированная из Z_q. Они эквивалентны. Определим в Ω множество B_x, $x \in S_{qn}$, как множество всех последовательностей Ω, начинающихся с x. Это база Ω-топологии. Обозначим ее $F(\Omega)$. Множество B_x — это шар в Z_q радиуса $q^{-l(x)}$ с центром в любой точке ω, начинающейся с x. Для $l(x) = n + 1$ получаем

$$\mu_A(B_x) = \mu_{\alpha^0}(x_0) \cdot \ldots \cdot \mu_{\alpha^n}(x_n). \tag{8.1}$$

Теорема 8.1. Пусть все коэффициенты $\{\alpha_j^n\}$ принадлежат кольцу Z_p. Тогда μ_A может быть расширена до меры на $\Omega \equiv Z_q$.

Доказательство. Пусть $x \in S_{q(n+1)}$. Тогда $B_x = \bigcup\limits_{j=0}^{q-1} B_{xj}$, где символом xj обозначено слово $y = (x, j)$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{q-1} \mu_A(B_{xj}) = \sum_{j=0}^{q-1} \mu_A(B_x)\mu_{\alpha^n}(j) = \mu_A(B_x).$$

Используя это равенство, можно доказать конечную аддитивность меры μ_A на базе $F(\Omega)$. Далее, если $B_y \subset B_x$, то $y = (x, y_{n+1}, \ldots, y_m)$, $m = l(y) - 1$, и, следовательно,

$$|\mu_A(B_y)|_p = |\mu_A(B_x)|_p |\mu_{\alpha^{n+1}}(y_{n+1}) \ldots \mu_{\alpha^m}(y_m)|_p \leqslant |\mu_A(B_x)|_p.$$

Из теоремы 3.1 следует, что функция $\mu_A \colon F(\Omega) \to Q_p$, определенная равенством (8.1), может быть расширена до меры на $\Delta(\Omega) \equiv \Phi(\Omega)$.

Мера μ_A — это Q_p-значная A-мера *Бернулли*. Рассмотрим симметричный случай: $\alpha_0 = \ldots = \alpha_{q-1} = 1/q$. Если $A = (\alpha, \ldots, \alpha, \ldots)$, то $\mu_A(B_x) = q^{-l(x)}$. Это мера Хаара на Z_q, принимающая свои значения в Q_p. Далее меры Бернулли будут рассматриваться как вероятности. Вместо обозначения μ_A будет использоваться символ P_{Ap}. Символ $P_{A\infty}$ будет обозначать обычное (вещественнозначное) распределение Бернулли с коэффициентами A (в симметричном случае $P_{A\infty}$ это обычное симметричное вероятностное распределение Бернулли, которое можно представить как меру Лебега на действительном отрезке $[0,1]$). Распределения Бернулли соответствуют бесконечным рядам независимых испытаний.

Теорема 8.2. Пусть μ_A — мера Бернулли. Тогда

$$N_{\mu_A}(a) = \inf_n \left|\mu_A(B_{(a)_n})\right|_p, \tag{8.2}$$

где $(a)_n$ — начальный отрезок длины n последовательности a.

Доказательство. По определению $N_{\mu_A}(a) = \inf\{N_{\mu_A}(U) \colon a \in U \in \Delta(\Omega)\}$. Используя неравенство $N_{\mu_A}(U) \leqslant N_{\mu_A}(V)$, $U \subset V$, получаем $N_{\mu_A}(a) = \inf\limits_n N_{\mu_A}(B_{(a)_n})$. Теперь воспользуемся равенством

$$N_{\mu_A}(B_x) = \sup\Big\{|\mu_A(U)|_p : \ U \subset B_x\Big\}.$$

Пусть $U = \bigcup\limits_{j=1}^{t} U_{rj}(c_j)$ и пересечением различных шаров является пустое множество. Рассмотрим один шар $U_r(b)$, где $r = q^{-m}$, $l(x) \leqslant m$; в этом случае $U_r(b) \subset B_x$ и $(b)_m = (x, b_{l(x)}, \ldots, b_{m-1})$. Поэтому

$$|\mu_A(U_r(b))|_p = |\mu_A(B_x)|_p \left|\mu_{\alpha^{l(x)}}(b_{l(x)}) \cdot \ldots \cdot \mu_{\alpha^{m-1}}(b_{m-1})\right|_p.$$

Далее,

$$|\mu_A(U)|_p = \left|\sum_{j=1}^{t} \mu_A(U_{rj}(c_j))\right|_p \leqslant |\mu_A(B_x)|_p.$$

Итак, мы получили, что

$$N_{\mu_A}(B_x) = |\mu_A(B_x)|_p = \prod_{j=0}^{l(x)-1} |\mu_{\alpha^j}(x_j)|_p = \prod_{j=0}^{l(x)-1} \left|\alpha^j_{x_j}\right|_p.$$

Следовательно,

$$N_{\mu_A}(a) = \inf_n N_{\mu_A}(B_{(a)_n}) = \inf_n \left|\mu_A(B_{(a)_n})\right|_p = \inf_n \prod_{j=0}^{n-1} \left|\alpha^j_{a_j}\right|_p.$$

Следствие 8.1. Пусть все коэффициенты $\{\alpha_j^n\}$, за исключением конечного числа, принадлежат единичной сфере в Q_p. Тогда множество Ω_0 пусто для меры Бернулли μ_A.

Рассмотрим возможность обобщения построения меры Бернулли. Во-первых, рассмотрим, кроме простого числа q, произвольное натуральное число $m > 1$: $\alpha = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}\}, \alpha_0 + \ldots + \alpha_{m-1} = 1, \alpha_j \in Q_p$. Здесь μ_A — дискретная мера на $T_m = \{0, \ldots, m-1\}$. Пространство $\Omega = T_m^\infty$ изоморфно кольцу Z_m m-адических целых чисел. Построение меры Бернулли μ_A можно осуществить аналогичным способом. Также можно рассмотреть случай, когда не требуется, чтобы меры принимали свои значения в Z_p.

Теорема 8.3. Пусть меры μ_{α^n} на T_m, за исключением конечного числа, принимают свои значения в Z_p. Функция множества μ_A, определенная с помощью (8.1), расширяется до меры на Z_m.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 8.1. Достаточно проверить, что для любого B_x

$$|\mu_A(B_x)|_p \leqslant \sup_n \prod_{j=0}^{n-1} \left|\alpha_{x_j}^j\right|_p < \infty.$$

Пример 8.1. Пусть $\alpha_0 = 1/3$, $\alpha_1 = 2/3$ и все меры $\mu_{\alpha^n} = \mu_\alpha$ (случай равномерного распределения). Для меры μ_A максимальное пренебрежимое множество Ω_0 состоит из всех последовательностей, для которых бесконечное число координат равно 1. Функция $N_{\mu_A}(\omega) = 2^{-k}$, если $|\omega| = \sum \omega_j = k$. Множество Ω_+ — это множество последовательностей, для которых конечное число координат равно 1. Оба множества Ω_0 и Ω_+ плотны в Ω. Учтем, что $\Omega_\alpha \notin \Delta(\Omega)$ для этой меры. Множество, на котором сконцентрирована эта мера, счетно: элементы Ω_+ являются натуральными числами в Z_2. Эта мера не дискретна, так как одноточечные множества не суммируемы относительно нее. Докажем это.

Если множество $A_n = \{n\}$, $n = n_0 + \ldots + n_l 2^l$ суммируемо, то $A_n \cap \Omega_\alpha$ является замкнуто-открытым для любого $\alpha > 0$. Мы хотим получить противоречие. Пусть $n \in \Omega_\alpha$. Множество Ω_α состоит из таких последовательностей ω, для которых число единиц $|\omega| \leqslant k = k_\alpha$. В частности, $|n| \leqslant k$. Достаточно рассмотреть случай $|n| < k$.

Допустим, что существует такая окрестность B_x, $x = (x_1, \ldots, x_t)$, в Ω, что $B_x \cap \Omega_\alpha = \{n\}$. В этом случае, $n_0 = x_0, \ldots, n_t = x_t$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $t \leqslant l$. Можем выбрать $m = n + 2^{l+1}$. Тогда $|m| = |n| + 1 \leqslant k$, значит, $m \in \Omega_\alpha$. Но $m \in B_x$.

2. Пусть $t > l$. Здесь все $x_j = 0$, $j > l$. Выберем $m = n + 2^{t+1} \in B_x \cap \Omega_\alpha$.

Следовательно, мы не можем определить меру точки для множества натуральных чисел. Но это множество является носителем этой меры.

§ 5.9. Биологические модели, связанные с p-адическизначными распределениями Бернулли

В этом разделе будут изучены вероятностные свойства меры Бернулли на примере стохастической биологической модели.

Пусть P_{A2} — мера из примера 8.1. Событие, состоящее в выпадении 1 бесконечное число раз, для данного распределения вероятностей практически невозможно. А событие, состоящее в выпадении 1 конечное число раз, практически достоверно.

Рассмотрим на Ω обычную (в смысле Колмогорова) вещественнозначную вероятность $P_{A\infty}$. Вещественная и 2-адическая вероятности совпадают для всех B_x. Невозможно отличить вещественную и 2-адическую вероятности для всех случаев, описанных с помощью конечного числа испытаний. Стохастическая модель, соответствующая P_{A2}, отличается от обычной вероятностной модели (описанной $P_{A\infty}$) принципом, запрещающим реализацию бесконечного числа 1. В обычной теории вероятностей такого принципа нет.

Мы предлагаем следующую статистическую биологическую модель, описанную с помощью вероятностного пространства ($\Omega = Z_2$, $P = P_{A2}$, $\Delta(Z_2)$).

Пусть белые и черные мыши находятся в закрытой коробке в отношении: Б $= 1/3$, Ч $= 2/3$, и это отношение сохраняется в процессе развития их популяции. Мы имеем дело с обычным статистическим экспериментом с мышами в коробке. Достанем мышку из коробки и запишем 0 и 1 для белой и черной мыши соответственно, затем вернем мышку в коробку.

Мы рассматриваем популяцию мышей с одним дополнительным свойством. Предполагается, что практически всегда в какой-то момент возникает ужасная эпидемия черных мышей, и все они погибают. Также предполагается, что такая эпидемия происходит в статистически отдаленный момент времени. Последнее условие мы должны понимать следующим образом.

Рассмотрим большое число коробок с мышами. Относительная частота коробок, в которых произойдет эпидемия, очень и очень мала в любой момент времени.

Получена статистическая схема Бернулли с весами $\alpha = (\alpha_0 = 1/3, \alpha_1 = 2/3)$ в любой момент времени и условием моментального вымирания черных мышей в достаточно удаленный момент времени. Такая биологическая модель описывается 2-адическим распределением вероятностей P_{A2}, которое совпадает с обычным действительным распределением вероятностей (с весами α) для любого конечного интервала времени. Таким образом, если использовать обычную теорию вероятностей, то мы ни каким образом не сможем «отследить» неизбежность исчезновения черных мышей. Более того, статистически в каждый конечный момент времени черная популяция существенно доминирует над белой. Однако 2-адическая модель в явном виде описывает неизбежный катаклизм для черных мышей.

Возможно, p-адическая теория вероятностей может быть использована для описания более реалистичных моделей природных и социальных катастроф.

Существует также возможность построения p-адическизначных вероятностей P_{Ap} с весами $\alpha = (1/2, 2/3)$ для любых $p \neq 3$ (если $p = 3$, то мера Бернулли не определена и это только распределение). Но если $p \neq 2$, то эти вероятности не описывают условие вымирания черных мышей (как обычная действительная вероятность). В этом случае мы не можем предложить никакой статистической модели, описываемой с помощью этих вероятностей. Такие статистические модели должны отличаться от обычных действительных вероятностных моделей $P_{A\infty}$, так как если $p \neq 2$, 3, то максимальное пренебрежимое множество Ω_0 пусто. Значит, для такой вероятности не существует пренебрежимых подмножеств. В частности, нельзя пренебречь ни одним одноточечным событием.

Подобная ситуация возникает и для симметричного случая $\alpha = (\alpha_0 = 1/2,\ \alpha_1 = 1/2)$. Здесь распределение вероятностей P_{Ap} корректно определено на $\Omega = Z_2$ для любого $p \neq 2$. Это p-адическизначная мера Хаара на Z_2. Эти вероятности совпадают с обычной симметричной вероятностью Бернулли $P_{A\infty}$ для любого события, зависящего только от конечного числа исходов. Основное отличие от действительного случая заключается в том, что Ω_0 пусто. И опять же, нельзя пренебречь каким-либо событием, в частности ни одним одноточечным событием.

В обычном действительном случае мы можем отождествить последовательности исходов типа $\omega = (010\ldots 0\ldots)$, $\omega' = (0011\ldots 11\ldots)$, чтобы получить равномерное распределение вероятностей на отрезке $[0, 1]$ действительной прямой. В нашем случае это невозможно.

Рассмотрим более сложную биологическую модель с тремя видами $S0$, $S1$, $S2$ и статистическими весами $\alpha = (\alpha_0 = 5/13,\ \alpha_1 = 6/13,\ \alpha_2 = 2/13)$. Здесь μ_α — дискретная мера на $T_3 = \{0, 1, 2\}$, $\Omega = T_3^\infty \equiv Z_3$. Пусть P_{Ap} — соответствующая вероятность на Ω. Мы хотим описать статистическую модель с вымиранием видов $S1$ и $S2$, которая совпадает с соответствующей действительной моделью $P_{A\infty}$ для любого события, зависящего только от конечного числа исходов. Такая модель описывается с помощью вероятности P_{A2}. Если мы хотим описать модель с угасанием вида $S0$, то мы можем использовать P_{A5}, если $S1$ — то P_{A3}. Эти модели также описывают катаклизмы: «все идет хорошо, хорошо, ..., вымерли».

Если $p \neq 2$, 3, 5, то вероятность P_{Ap}, как и действительная вероятность, не описывает вымирания ни одного из видов.

Такие статистические биологические модели могут быть использованы не только для случая эпидемии в статистически удаленные моменты времени, но также для моделей, где запасы еды для одних составляющих пополняются, а для других нет. Например, рассмотрим очень большое число популяций, содержащих два типа животных: $B0$ и $B1$, с постоянным отношением $B0$ к $B1$ в течение всего периода эволюции этих популяций. Но $B0$ и $B1$ будут развиваться по-разному. Скорость роста популяции $B0$ достаточна для обновления природных запасов пищи, а скорость роста популяции $B1$ слишком высока для обновления этих запасов. Такое вырождение $B1$-запасов пищи происходит статистически не очень быстро. В каждый момент времени только очень маленькая часть всех $B1$-популяций имеет уже истощенный природный запас пищи.

Было бы интересно сравнить действительную и p-адическую вероятностные модели в данной ситуации. Эти вероятностные модели, в общем, не отличаются в любой конечный момент времени эволюции. В частности, все средние значения случайных переменных (с рациональными значениями), зависящие только от конечного интервала времени, совпадают. Отличие состоит в «глобальном прогнозе» эволюции. Если мы используем обычную действительную теорию вероятностей, то можем сказать, что эволюция $B0$ и $B1$ стабильна. В каждый конечный момент времени лишь в пренебрежимо малом числе популяций запасы $B1$-пищи истощаются. Вещественная вероятность события G, состоящего из всех ω, для которых $B1$-запасы должны быть истощены, равна нулю. Это «практически невозможно» с вещественной точки зрения. С точки зрения обычной теории вероятностей, вид $B1$ находится в благоприятном положении.

Но, с точки зрения p-адической теории, мы получаем другой вывод. Множество G не является пренебрежимым относительно p-адической меры Бернулли. Значит, ситуация не очень благоприятна для составляющей $B1$. Несложно ввести такую P_{Ap}, что множество $\bar{G}$ будет пренебрежимым. Ситуация для вида $B1$ не будет благоприятной в этом случае.

§ 5.10. Дискретные вероятности. Санкт-Петербургский парадокс в p-адической интерпретации

Рассмотрим счетное множество исходов $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\}$. Последовательность $x = (1.2)$ называется p-адическим коллективом, если для любого элементарного события ω_j имеет место статистическая стабилизация частоты реализации ω_j в топологии Q_p, причем ряд $\sum \alpha_j = 1$, $\alpha_j = P(\omega_j)$, сходится. Такой коллектив индуцирует дискретную счетную аддитивную меру на σ-алгебре всех подмножеств множества Ω. Приведем примеры дискретных распределений вероятностей:

1) $\{\alpha_n = (1-p)p^n\}_{n=0}^{\infty}$;

2) $\{\alpha_n = -nn!\}_{n=1}^{\infty}$;

3) $\{\alpha_n = n^2(n+1)!/2\}_{n=1}^{\infty}$.

Случайная величина — это любое отображение $\xi\colon \Omega \to Q_p$, математическое ожидание $M\xi = \sum\limits_j \xi(\omega_j)\alpha_j$, дисперсия $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$. В нашей теории дисперсия может быть и отрицательной. Например, пусть $\Omega = (\omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots)$, $\alpha_{-1} = p/(p-1)$, $\alpha_n = p^n$, $n \geqslant 0$, тогда $D\xi = 1/(1-p^3) - (1/(1-p^2))^2$ для СВ, определяемой равенствами: $\xi(\omega_{-1}) = 0$, $\xi(\omega_n) = p^n$, $n \geqslant 0$.

Пусть $D = (A_1, \ldots, A_n, \ldots)$, $P(A_j) \neq 0$, — полная группа взаимнонепересекающихся событий. Для счетно-аддитивной вероятности P справедливы формулы произведения вероятностей:

$$P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_n/A_1 \ldots A_{n-1}),$$

если

$$P(A_1) \neq 0, \ldots, P(A_1 \ldots A_{n-1}) \neq 0.$$

Теорема 10.1 (формула Байеса). Пусть события $A_1 \ldots A_n$ составляют полную группу взаимно непересекающихся событий, $P(A_j) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$. Тогда

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum\limits_j P(A_j)P(B/A_j)}.$$

Рассмотрим, например, классическую задачу Байеса, но применительно к p-адической монете. Монета — это некоторое устройство, для которого вероятность выпадения орла равна $x \in Q_p$, а вероятность выпадения решки: $(1-x)$. Из совокупности монет мы выбираем одну для эксперимента. Затем подкидываем эту монету n раз. Если орел выпадает n_1 раз, то с какой вероятностью $q_n(x)$ можно утверждать, что вероятность выпадения орла равна x? Мы рассмотрим такую ситуацию, когда распределение монет полностью дискретно: у нас есть счетное множество вероятностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_j \in Q_p$, с вероятностями $P_0(x_j)$, $\sum\limits_j P_0(x_j) = 1$. Данное распределение вероятностей соответствует коллективу M_1 (для p-адической топологии стабилизации). Этот коллектив возникает в результате эксперимента S_1, в процессе которого мы выбираем одну монету из совокупности всех монет и находим вероятность выпадения орла $x = x_j$. Затем для каждой вероятности x_j мы рассматриваем коллектив $M_2(x_j)$, который возникает в результате эксперимента $S_2(x_j)$, состоящего в подбрасывании n раз p-адической монеты, имеющей вероятность выпадения орла x_j. С помощью операции комбинации коллективов (см. Р. фон Мизес [99], [100]), мы получаем новую последовательность исходов M, соответствующую эксперименту S, в котором мы случайным образом выбираем монету из совокупности всех монет и подбрасываем ее n раз. В обычной теории вероятностей частот [99], [100] такая последовательность также является коллективом. В p-адическом случае это, вообще говоря, неверно.

Теорема 10.2. Пусть последовательность вероятностей $\{x_k\}$ ограничена на Q_p. Тогда последовательность M является p-адическим коллективом.

Доказательство. Пространство элементарных исходов Ω состоит из точек $\omega_{km} = \{x = x_k$ и орел выпадает m раз$\}$. Как обычно, $P(\omega_{km}) = P_0(x_k)C_n^m x_k^m(1 - x_k^{n-m})$. Остается показать, что ряд $\sum P(\omega_{km})$ сходится на Q_p, а для этого достаточно использовать ограниченность биномиальных коэффициентов $\{C_n^m\}$ в Q_p.

Используя дискретные Q_p-значные распределения вероятностей, мы можем предложить новый подход к знаменитому Санкт-Петербургскому парадоксу теории вероятностей (см., например, Борель [16]). Пусть Петр и Павел играют в игру (вероятность выигрыша в одной игре равна 0,5). Игра подчиняется следующим правилам. Если Петр выигрывает первую игру, то Павел платит ему 2 франка и игра заканчивается. Если Петр проигрывает первую игру, но выигрывает вторую, то Павел платит ему 2^2 франков и игра заканчивается, ..., если Петр проигрывает $(n-1)$ первых игр, но выигрывает n-ю игру, то Павел платит ему 2^n франков и игра заканчивается. Задача состоит в определении ставки Петра, т. е. в том, какую сумму он должен заплатить Павлу перед началом игры в качестве компенсации за свои долги (более реальный вариант — это Санкт-Петербургская игра до проигрыша, см. Борель [16]). Парадокс состоит в том, что ставка должна быть бесконечно большой, а именно: математическое ожидание выигрыша Петра

$$m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Санкт-Петербургский парадокс оказал большое влияние на формирование основных законов теории вероятностей [16]. Существует несколько подходов к решению этого парадокса. Одна из них принадлежит Бертрану. Она заключается в том, что бесконечное число рассматриваемых ответов «корректно» и при любой ставке Петр может быть уверен, что в конце игры он победит и разорит Павла.

В p-адическом случае можно рассмотреть модификацию Санкт-Петербургского парадокса. Предположим, что взнос поднялся до 4^n. Тогда в 2-адичной теории вероятностей мы можем вычислить математическое ожидание победы Петра. Получим неожиданный результат:

$$m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n = -2.$$

Конечно, $m = -2$ — это лишь символ для некоторой бесконечной ставки. Здесь возникает возможность классифицировать бесконечные ставки.

Теперь рассмотрим основную модель с выплатами λ^n, $\lambda \in Q_+$, где Q_+ — множество положительных рациональных чисел. Введем множество рациональных чисел $W_p = \{\lambda \in Q_+ \colon |\lambda/2|_p < 1\}$, $p = 2, \ldots, \infty$, $|\cdot|_\infty = |\cdot|_R$. Если $\lambda \in W_p$, то ряд $m(\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{2^n}$ сходится на Q_p, определяя среднее $m_p \colon W_p \to Q$ такое, что $m_p|_{W_p \cap W_q} = m_q|_{W_p \cap W_q}$. Из этого условия согласованности следует, что отображение $m \colon W = \bigcup\limits_{p=2}^{\infty} W_p \to Q$. Если $\lambda \in W_\infty$, то можно применять обычную теорию вероятностей, а если $\lambda \in W_p$ — то Q_p-значную.

Также мы можем рассмотреть вариант Санкт-Петербургского парадокса с более сильными расходимостями. Предположим, что выплаты $\lambda_n = 2^n n n!$. Тогда для любого $p \neq \infty$ математическое ожидание корректно определено:

$$m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n n!}{2^n} = -1.$$

С помощью p-адической теории появляется возможность получения информации о переменных, которые с точки зрения действительной теории бесконечны.

По аналогии мы можем рассмотреть модель с выплатами λ^n и вероятностью проигрыша Петра $\mu \in Q$, $0 < \mu < 1$. Математическое ожидание победы Петра $m(\lambda, \mu) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mu^{n-1}(1-\mu)$ имеет смысл в обычной теории вероятностей, если $\lambda\mu < 1$, т.е. оно определено на множестве $V_\infty = \{(\lambda, \mu) \in Q_+^2 \colon 0 < \mu < 1,\ \lambda\mu < 1\}$. Возникает проблема расширения статистических характеристик игры на более широкое множество рациональных чисел (мы рассмотрели только математическое ожидание, но можем также изучить, скажем, проблему расширения дисперсии). Введем множества рациональных чисел $V_p = \{(\lambda, \mu) \in Q^2 \colon \lambda \in Q_+,\ \mu \in Q,\ |\lambda\mu|_p < 1\}$. Если параметры игры принадлежат множеству V_p, то игра может быть описана в рамках Q_p-вероятности. Значит, математическое ожидание продолжается на множество $V = \bigcup\limits_{p=2}^{\infty} V_p$.

Глава 6. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО P-АДИЧЕСКОЙ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ МЕТРИК

Мы рассматриваем такие статистические модели, в которых относительные частоты колеблются относительно действительной метрики и стабилизируются относительно p-адической. Мы имеем возможность создавать такие случайные последовательности, для которых не существует обычных частотных вероятностей, а p-адические определены. Статистические выборки, обладающие таким свойством, мы можем рассматривать как новый тип случайности. Поэтому наши исследования мы можем также рассматривать как исследования нового типа случайных последовательностей. Появляется целый спектр различных случайностей. Если мы попытаемся классифицировать эти случайные последовательности с помощью колмогоровской сложности, то увидим, что (грубо говоря) колмогоровская сложность растет как n (где n — длина конечного начального сегмента) для обычных случайных последовательностей, коллективов Мизеса; и она увеличивается как $\log_p n$ для p-адических случайных последовательностей. Таким образом, наши случайные последовательности «более простые», чем коллективы Мизеса. Они не являются обычными коллективами Мизеса. Поэтому с точки зрения обычной теории вероятностей они являются хаотическими выборками.

Заметим, что наши статистические модели реализованы как статистические эксперименты на компьютере. Как применять такие результаты? Наша основная идея — это получение новой информации, которая не заметна в обычном вероятностном формализме. Например, мы не можем различить два стохастических объекта, которые рассматриваются как хаотические (не случайные) выборки в теории Мизеса. Относительные частоты могут колебаться для обоих этих стохастических объектов относительно действительной метрики. Но в то же время эти объекты могут иметь p-адические вероятности. Значит, p-адическая вероятность может рассматриваться как некоторая физическая характеристика аналогично обычной вероятности. Напомним, что в работах Мизеса предлагалось, что вероятность является такой же физической характеристикой объекта, как, например, масса или электрический заряд. Следовательно, и мы только вводим новую физическую характеристику, а именно p-адическую вероятность, и ничего более.

§ 6.1. *P*-адическое статистическое моделирование

6.1.1. Статистическая стабилизация *p*-адических цифр. В случае p-адических топологий (статистической стабилизации частот) мы можем использовать простые числа $p = 2, 3, 5, \ldots, 127, \ldots$ как параметры вероятностных моделей. Существуют две возможности нахождения этого параметра для конкретной вероятностной модели. Одна из них — это теоретическое изучение исследуемой модели и нахождение числа p из свойств этой модели. Вторая — это статистическое моделирование с помощью компьютера.

Мы, конечно, понимаем, что на практике невозможно рассматривать бесконечный коллектив. Можно изучать только конечные последовательности. Также невозможно говорить и о пределе в p-адической топологии при практическом вычислении (такая же ситуация возникает в обычной теории вероятностей над полем действительных чисел R). Можно только изучать стабилизацию p-адических цифр a_j в p-адическом расширении относительной частоты $\nu(\omega_i) = n_i/N$. Например, цифра a_0 стабилизировалась после $N = p^{10}$ наблюдений, a_1 — после $N = p^{100}$ наблюдений и т. д. Мы говорим, что в этом случае имеет место статистическая стабилизация относительной частоты.

Если мы хотим найти параметр p вероятностной модели S с помощью компьютера, то можем начать с исследования статистической стабилизации относительных частот в поле Q_2. Затем (если не существует статистической стабилизации в Q_2) исследовать статистическую стабилизацию в полях Q_3, Q_5, ... и т. д.

Проведенное статистическое моделирование показывает, что если мы хотим реализовать наши вычисления для достаточно больших значений p, то нам необходим достаточно мощный компьютер. Например, на практике невозможно использовать персональный компьютер для простейших вероятностных моделей при $p > 100$.

Несложно предложить такую вероятностную модель, для которой нет статистической стабилизации в R (следовательно, не существует действительнозначного вероятностного распределения), но имеет место быстрая статистическая стабилизация в Q_p.

6.1.2. Игровая индустриальная статистическая модель. Рассмотрим некоторую индустрию (ИНД), которая может производить два типа продукции. Например, ИНД производит красные и белые шары. Рассмотрим такой индустриальный процесс, в котором шары производятся сериями по $M = p^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, шаров одного типа. Затем рассмотрим случайный процесс производства белых и красных шаров.

Статистическое моделирование этого процесса будет осуществляться с помощью двух генераторов случайных чисел (случайных в смысле обычной теории вероятностей): ξ и θ, где $\xi = w$ или r и $\theta = 0$ или 1. Пусть в предыдущей серии произведено $M = p^k$ шаров некоторого фиксированного цвета. Тогда мы используем первый генератор случайных чисел ξ и, если $\xi = w$, то ИНД будет производить серию белых шаров, а если $\xi = r$, то серию красных шаров; длина этой новой серии будет вычисляться с помощью второго случайного генератора θ: $M' = Mp^{\theta}$ (поэтому это экстенсивный процесс производства). Пусть теперь полученные таким образом шары перемешали в достаточно большой коробке.

Нас интересует изучение глобального результата ИНД-производства. Какова будет вероятность $P(w)$ вытащить белый шар из коробки и вероятность $P(r)$ вытащить красный шар после очень большого периода ИНД-производства (в математической идеализации мы можем рассматривать бесконечный период ИНД-производства)? Чтобы получить ответ на этот вопрос, мы можем рассуждать следующим образом. Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_k, \ldots$ — моменты окончания предыдущих серий ИНД-производства и начала новых серий. Вычислим относительные частоты $\nu_k(w)$ и $\nu_k(r)$ белых и красных шаров в моменты T_k, $k = 1, 2, \ldots$ Чтобы ответить на наш вопрос, рассмотрим пределы $\{\nu_k(w)\}$ и $\{\nu_k(r)\}$.

Теорема 1.1. Пусть ξ и θ — произвольные генераторы случайных чисел. Тогда в поле p-адических чисел существуют пределы

$$P(w) = \lim_{k\to\infty} \nu_k(w), \quad P(r) = \lim_{k\to\infty} \nu_k(r).$$

Доказательство. Используя равенство $|M_{k+1}|_p = |M_k|_p p^{-\theta_{k+1}}$, получаем, что $|M_k|_p \to 0$, $k \to \infty$ в Q_p. Поэтому пределы

$$P(w) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k M_k}{\sum_{k=1}^{N} M_k}, \quad P(r) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} (1-\alpha_k) M_k}{\sum_{k=1}^{N} M_k},$$

где $\alpha_k = 1$ при $\xi_k = w$ и $\alpha_k = 0$ при $\xi_k = r$, существуют в Q_p.

В частности, мы получаем формулы

$$P(w) = \frac{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k M_k}{\sum_{k=1}^{N} M_k}, \quad P(r) = \frac{\sum_{k=1}^{N} (1-\alpha_k) M_k}{\sum_{k=1}^{N} M_k}.$$

Теорема 1.2. Пусть θ — произвольный генератор случайных чисел и для генератора ξ вероятности для w и r не равны 0. Тогда относительные частоты колеблются в поле действительных чисел.

Доказательство. Пусть один из цветов изменился в момент времени T_j при достаточно большом j. Например, рассмотрим изменение w на r. Получаем

$$\nu_j(w) = n_j(w)/N_j, \quad \nu_j(r) = n_j(r)/N_j,$$

где $N_j = p^{\theta_1} + \ldots + p^{\lambda_j}$, $\lambda_j = \sum\limits_{i=1}^{j} \theta_j$, и $N_{j+1} = N_j + p^{\lambda_j+\theta_{j+1}}$. Тогда

$$\nu_{j+1}(w) = n_j(w)/(N_j + p^{\lambda_j+\theta_{j+1}}) = \nu_j(w)/\gamma,$$

где $\gamma = 1 + u$, $u = p^{\lambda_j+\theta_{j+1}}/N_j$. Очевидно, что

$$N_j \leqslant \sum_{i=1}^{\lambda_j} p^i = \frac{p^{\lambda_j+1}}{p-1}$$

и

$$u \geqslant \frac{p^{\lambda_j+\theta_{j+1}}(p-1)}{p^{\lambda_j+1}-1}.$$

Рассмотрим первую возможность: $\theta_{j+1} = 1$. Тогда получаем

$$\gamma \geqslant \frac{1+(p-1)}{1-p^{-(\lambda_j+1)}} \approx p$$

при достаточно больших j.

Теперь рассмотрим случай $\theta_{j+1} = 2$. Тогда получаем

$$\gamma \geqslant \frac{1+p(p-1)}{1-p^{-(\lambda_j+1)}} \approx p^2 - p + 1$$

при достаточно больших j.

Конечно, чтобы быть более точными, мы должны рассматривать вероятностное пространство Колмогорова $(\Omega,\ F,\ P_{\mathrm{Kol}})$ и две последовательности обычных СВ $\xi_n(w)$ и $\eta_n(w)$. Каждая последовательность состоит из независимых и равномерно распределенных СВ (все выражения рассматриваются в смысле колмогоровской вероятности). Свойство колебаний частот в вещественной метрике модели не зависит от вероятностей реализации значений СВ θ_j. Оно является следствием того, что вероятности $q_{\mathrm{Kol}}(w)$ и $q_{\mathrm{Kol}}(w)$ — реализации значений СВ ξ_j. Относительные частоты зависят от ω: $\nu_j(w) = \nu_j(w;\omega)$ и $\nu_j(r) = \nu_j(r;\omega)$. Используя $q_{\mathrm{Kol}}(w) \neq 0$, получаем, что Kol-вероятность события

$$O_w = \{\omega \in \Omega :\ \exists k = k(\omega) :\ \xi_i(\omega) = w \forall i > k\}$$

равна нулю. Используя $q_{\mathrm{Kol}}(r) \neq 0$, получаем, что Kol-вероятность такого же события O_r для r-реализаций тоже равна нулю. Значит, Kol-вероятность события

$$\{\omega \in \Omega :\ \forall k \exists j > k :\ \xi_j(\omega) = w, \xi_{j+1}(\omega) = r\}$$

равна 1. Следовательно, последовательности $\{\nu_j(w;\omega)\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\nu_j(r;\omega)\}_{j=1}^{\infty}$ не имеют предела в действительной топологии почти всюду $(\mathrm{mod}\, P_{\mathrm{Kol}})$.

Данный случайный ИНД-процесс мы могли рассматривать как алгоритм, использующий две стандартные (в колмогоровском смысле) случайные последовательности ξ и θ в качестве начальных данных, порождающих новую случайную последовательность, состоящую из цветов шаров. Но эта новая последовательность не является вещественно-случайной, потому что относительные частоты колеблются в R. Таким образом, данный алгоритм порождает новый класс случайных последовательностей, которые не рассматривались в обычной теории вероятностей.

Этот процесс статистического моделирования был реализован (моим студентом В. Безгиным) на компьютере, и мы обнаружили [67], [92] стабилизацию p-адических цифр в p-адическом разложении частот $\nu_j(w)$ и $\nu_j(r)$ и колебание цифр в действительном разложении этих частот.

Для читателя не составит труда повторить данные вычисления. Проблема состоит только в делении больших натуральных чисел в Q_p.

6.1.3. Излучение мультиплетов. Предыдущую статистическую модель можно интерпретировать и по-другому. Вместо процесса ИНД-производства рассмотрим процесс излучения. У нас имеется источник излучения P частиц двух видов: R и W. Частицы излучаются мультиплетами, состоящими из частиц одного вида. Тип частиц в излучаемых мультиплетах — это случайная величина (СВ), распределенная в соответствии с некоторым законом. Допустим, что число частиц в мультиплете — это степень некоторого фиксированного (простого) числа p, т. е. $M = p^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Допустим, что процесс излучения таков, что со временем мультиплеты увеличиваются в размере по некоторому стохастическому закону. Статистическое моделирование осуществляется с помощью двух генераторов случайных чисел: (1) $j = 0, 1$, (2) $i = 1, 2$. Если $j = 0$, то излучается мультиплет R-частиц, а если $j = 1$, то мультиплет W-частиц. Размер мультиплета определяется следующим образом: величина первого мультиплета — это степень p^{l_1} (которая также может быть случайной) и, если длина предыдущего ряда была p^{l_m}, то длина следующего ряда — это $p^{l_{m+1}}$, где $l_{m+1} = l_m + i$. Обозначим $\nu_m^R = n_m^R / N_m$ относительную частоту R-частиц в первых m мультиплетах и $\nu_m^W = n_m^W / N_m$ — частоту W-частиц. Поведение этих относительных частот аналогично поведению частот в ИНД-модели.

6.1.4. Биологическая модель. Рассмотрим некоторый биологический организм (БИО), обладающий следующими свойствами: (1) в течение периода репродукции Δ каждый БИО порождает p БИО, и на этом для БИО процесс воспроизводства рода заканчивается, (2) период репродукции Δ намного меньше, чем время жизни БИО T, т. е. $\Delta \ll T$. Таким образом, один БИО порождает следующую биологическую популяцию: за время Δ БИО-Ева порождает p БИО и больше не принимает участия в процессе воспроизводства. В момент $\tau_1 = \Delta$ имеется $N_1 = 1 + p$ БИО, в момент $\tau_k = k\Delta$ — уже $N_k = 1 + \ldots + p^k$ БИО. Теперь подвергнем эту биологическую систему случайному облучению P. В поколении, подвергшемся облучению, среди потомства появляются мутанты. Пропорция этих мутантов в потомстве облученного поколения также случайная величина. Предположим, что мутанты не принимают участия в дальнейшем размножении и что продолжительность их жизни такая же, как у нормальных индивидуумов. Появилась биологическая популяция, состоящая из нормальных индивидуумов и мутантов. Нас интересует вероятность того, что выбранный из популяции случайным образом БИО окажется нормальным $P(n)$ или мутантом $P(m)$. Для этого мы вычисляем количественное отношение нормальных индивидуумов и мутантов в популяции после k поколений воспроизводства и рассматриваем предел при $k \to \infty$.

Предположим, что случайный источник излучения определяется вероятностями $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1} \in R$ (здесь случайность в смысле обычной теории вероятностей). Здесь α_i — это вероятность того, что появится в точности i мутантов в потомстве каждого БИО из данного поколения. Это число i постоянно для всех БИО в фиксированном поколении. Таким образом, влияние излучения P в момент τ_k одинаково для любого БИО. Иногда это влияние очень мало, и в потомстве мутантов не существует. Иногда оно очень велико, и возникает $p - 1$ мутант из p БИО, порожденных каждым БИО. Мы не будем изучать случай всеобщей дегенерации, когда в некотором поколении будет появляться p мутантов в потомстве каждого БИО. Для изучения такого случая, нам нужно ввести вероятность $\alpha_p \neq 0$.

На математическом уровне эта стохастическая биологическая модель развития может быть описана следующим образом. Предположим, что существует последовательность независимых равномерно распределенных СВ $\{\xi_n(\omega)\}$, определенная на обычном колмогоровском вероятностном пространстве $(\Omega,\ F,\ P_{\mathrm{Kol}})$. Эти СВ принимают значения $0, 1, \ldots, p-1$ с вероятностями $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1} \in R$. Если мы хотим быть более точными, то нам следует использовать символы $\alpha_0(Kol), \ldots, \ldots, \alpha_{p-1}(Kol)$. Таким образом, все наши модели являются примерами p-адической стохастики, порожденной обычной колмогоровской стохастикой.

Обозначим через $G_k(n, \omega)$ число нормальных БИО в k-м потомстве, через $n_k(\omega)$ — число всех нормальных БИО в момент $\tau_k = k\Delta$. Символы $G_k(m, \omega)$ и $m_k(\omega)$ будем использовать для мутантов, $N_k(\omega)$ — численность всей биологической популяции (нормальных индивидуумов и мутантов) в момент времени τ_k, $\nu_k(n,\omega) = n_k(\omega)/N_k(\omega)$ и $\nu_k(m,\omega) = m_k(\omega)/N_k(\omega)$ — соответствующие частоты.

Утверждение 1.1. Относительные частоты определяются равенствами:

$$\nu_k(n,\omega) = \sum_{j=0}^{k} \frac{G_k(n,\omega)}{N_k(\omega)} =$$
$$= [1 + (p - \xi_1(\omega)) + \ldots + (p - \xi_1(\omega)) \cdot \ldots \cdot (p - \xi_k(\omega))] \times$$
$$\times [1 + p[1 + (p - \xi_1(\omega)) + \ldots + (p - \xi_1(\omega)) \cdot \ldots \cdot (p - \xi_{k-1}(\omega))]]^{-1};$$

$$\nu_k(m,\omega) = \sum_{j=0}^{k} \frac{G_k(m,\omega)}{N_k(\omega)} =$$
$$= [\xi_1(\omega) + \ldots + (p - \xi_1(\omega)) \cdot \ldots \cdot (p - \xi_{k-1}(\omega))\xi_k(\omega)] \times$$
$$\times [1 + p[1 + (p - \xi_1(\omega)) + \ldots + (p - \xi_1(\omega)) \cdot \ldots \cdot (p - \xi_{k-1}(\omega))]]^{-1}.$$

Теорема 1.3. Пусть $\alpha_0 > 0$. Тогда последовательности относительных частот $\{\nu_k(n,\omega)\}$ и $\{\nu_k(m,\omega)\}$ имеют пределы на Q_p почти всюду $(\mathrm{mod}\ P_{\mathrm{Kol}})$.

Доказательство. Рассмотрим два признака: A и B. Первый означает, что не существует мутантов в поколении, а второй — что существуют. Таким образом, мы можем ввести последовательность $\{\eta_k(w)\}$ независимых равномерно распределенных СВ со значениями A и B и соответствующие вероятности α_0 и $1 - \alpha_0$. Теперь

$$O = \Big\{\omega \in \Omega : \ \{\nu_k(n,\omega)\} \text{ имеет предел на } Q_p\} \supset$$
$$\supset \{\omega \in \Omega : \ \lim_{k\to\infty} |G_k(n,\omega)|_p = 0\Big\},$$

следовательно,

$$\Omega \backslash O = \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=m}^{\infty} D_k, \quad D_k = \{\omega : \ \eta_k(\omega) + B\}$$

и

$$P_{\mathrm{Kol}}\left(\bigcap_{k=m}^{\infty} D_k\right) = \lim_{M\to\infty} \prod_{k=m}^{M} (1 - \alpha_0).$$

Что можно сказать о статистической стабилизации в поле действительных чисел? Я не получил никаких математических утверждений в этом направлении. Совместно с В. Безгиным я пытался провести компьютерные вычисления и обнаружил, что данные частоты колеблются в поле действительных чисел для некоторых значений вероятности α_i и стабилизируются для других значений [9]. Основная проблема здесь состоит в большом объеме вычислений, поэтому трудно увидеть статистическую стабилизацию. Эта проблема изучалась также М. Эндо и О. Юко (см. также [9]). Они смоделировали длинный ряд поколений для некоторой вероятности α_i и исследовали колебание относительных частот в вещественной метрике.

Мы также провели вычисления для p-адической метрики. Здесь имеет место статистическая стабилизация для всех α_i с $\alpha_0 \neq 0$. Несложно показать, что относительные частоты являются p-адическими целыми числами. Вот почему мы можем записать их p-адическое разложение, не используя цифр с отрицательными степенями, а начиная точно с цифры, соответствующей в нулевой степени p в разложении, см. гл. 1.

6.1.5. Результаты статистического моделирования.

А. $p = 7$, $\alpha_0 = 0{,}3(9)$, $\alpha_1 = \ldots \alpha_5 = 0{,}0(9)$, $\alpha_6 = 0{,}1$. Мы рассматриваем 20 поколений. Рассмотрим частоты только для мутантов. Сохраним только первые две ненулевые цифры в вещественном десятичном разложении частот. Сохраним все 7-адические цифры до первой нестабильной цифры.

Вещественные частоты:

$$0; 0; 0{,}49; 0{,}14; 0{,}62; 0{,}59; 0{,}21; 0{,}74; 0{,}66; 0{,}28;$$

$$0{,}63; 0{,}33; 0{,}52; 0{,}15; 0{,}026; 0{,}0038; 0{,}00055; 0{,}61; 0{,}67; 0{,}78.$$

7-адические частоты:

$$0; 0; 004366; 004361; 0044000; 004014;$$

$$004042; 00406326; 00406320;$$

$$00406022; 00406303; 004065403;$$

$$0040654040; 00406540412; 004065404133;$$

$$004065404134; 004065404514; 004065404653; 004065404062.$$

Таким образом, первая десятичная цифра постоянно колеблется, а 9 цифр 7-адического разложения стабильны после 20 воспроизводств.

Б. $p = 7$, $\alpha_0 = 0{,}2(9)$, $\alpha_1 = 0{,}1(9)$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_5 = 0{,}0(9)$, $\alpha_6 = 0{,}1$.

Вещественные частоты:

$$0{,}63; 0{,}23; ,0{,}42; 0{,}25; 0{,}16; 0{,}028; 0{,}13; 0{,}26; 0{,}63; 0{,}33;$$

$$0{,}52; 0{,}25; 0{,}16; 0{,}38; 0{,}64; 0{,}25; 0{,}51; 0{,}15; 0{,}26; 0{,}17.$$

7-адические частоты:

$$524; 560; 564; 561; 5644; 5645; 5642; 5641; 5646; 5641; 5640;$$

$$5641; 5640; 5643; 56422; 56424; 564210; 564216; 564215; 564216.$$

Здесь вероятность α_0 меньше, чем в (А), поэтому статистическая стабилизация в Q_7 более медленная, чем в (А). Только 5 цифр стабилизируются после 20 воспроизводств.

В. $p = 11$, $\alpha_0 = 0{,}1(9)$, $\alpha_1 = \ldots = 0{,}0(8)$, $\alpha_{10} = 0$.

11-адические частоты:

$$5; 4; 94; 90; 95; 90; 947; 94(10); 948; 949; 946; 9454; 9456;$$

$$9450; 9453; 9452; 9456; 9450; 94554; 94555; 9450; 9453; 945554;$$

$$94550; 94554; 94559; 94558; 94553; 94555; 94558; 94557; 94555;$$

$$94554; 94559; 94556; 945549; 945542; 94554(10); 945543; 945542;$$

$$94554(10)8; 94554(10)3; 95554(10)58; 945554(10)62; 94554(10)616;$$

$$94554(10)618; 94554(10)616; 94554(10)6111;$$

$$94554(10)6110; 94554(10)6115;$$

$$94554(10)6110.$$

Здесь только 3 цифры 11-адического разложения стабилизируются после 20 шагов, 4 цифры после 30 шагов, 9 после 50 шагов.

Теперь обсудим, какое значение может иметь эта статистическая информация. Каким образом мы можем применять ее в приложениях? Первый подход состоит в следующем. С помощью этой информации мы можем выделять различные типы развития биологических популяций. В нашей модели это означает различие неизвестных источников излучения. Рассмотрим две биологические популяции. Одну из них мы описали с помощью статистической информации (А), а другую с помощью (Б). Если мы рассмотрим статистические данные (А) и (Б) с точки зрения стабилизации в R, то увидим только хаотические колебания цифр. В частности, мы никак не можем классифицировать эти типы хаоса. Это одинаковые типы или нет? Уже первая десятичная цифра колеблется в обоих случаях. Теперь рассмотрим p-адическую информацию. Нетрудно заметить, что здесь эти два хаоса различны. Для первого из них 7-адическая вероятность мутантов равна (приблизительно) 00406, а для второго 7-адическая вероятность $P(m) = 56421$. Таким образом, мы обнаружили точную 7-адическую структуру среди хаотических колебаний. Значит, две наши биологические популяции развиваются под действием двух различных источников излучения.

Интуитивно статистическая стабилизация в R связана с индивидуальным процессом мутаций, когда каждый БИО может иметь $0, 1, \ldots$ $\ldots, p-1$ мутантов в потомстве с вероятностями $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}$. Данную стохастическую модель также просчитали на компьютере М. Эндо и О. Юко и получили статистическую стабилизацию в R и флуктуации частот в Q_p.

§ 6.2. Определение p-адической частотной вероятности

6.2.1. Популяции, имеющие различные бесконечные численности. Фундаментальный топологический принцип статистической стабилизации относительных частот был сформулирован в предыдущей главе. Он был сформулирован на интуитивном уровне как некая общая философская концепция. Теперь мы хотим сформулировать этот принцип на математическом уровне строгости. Основная проблема построения теории на математическом уровне строгости заключается в словах «статистическая стабилизация» в формулировке основного принципа. Нам нужно придать строгий математический смысл выражению «N стремится к бесконечности». В обычной частотной теории Мизеса стремление к бесконечности означает, что N монотонно возрастает с шагом $\Delta = 1$. Определить закон изменения N — это то же самое, что определить правило вычисления относительных частот. Это правило является стандартным в обычной частотной теории вероятностей, где относительные частоты вычисляются после каждого испытания.

Но, вообще говоря, пополнение Q_τ множества Q относительно топологии статистической стабилизации τ не имеет какой-либо порядковой структуры. Таким образом, невозможно определить монотонное возрастание N, если мы рассматриваем N как подмножество Q_τ. Конечно, можно рассматривать совокупность относительных частот как последовательность в топологическом пространстве Q_τ, $N \to \nu_N$, где множество натуральных чисел рассматривается как отдельное множество без какой-либо связи с Q_τ (множество натуральных индексов). Но если мы рассмотрим конкретные статистические примеры, то немедленно поймем, что это правило не годится для p-адического случая. Мы всегда вычисляли относительные частоты не после каждого испытания, а после завершения серии испытаний. Относительные частоты, вычисляемые после каждого испытания, не стабилизируются ни в одной из метрик, ни в действительной, ни и в p-адической. Таким образом, проблему правила вычисления относительных частот следует исследовать более тщательно.

В гл. 4 был введена некая порядковая структура на Q_p (заметим, что эта структура несовместна с алгебраической структурой Q_p). И здесь возникает новая проблема. Это большое число различных бесконечных p-адических чисел вместо одной действительной бесконечности. Что собой представляет бесконечное p-адическое число, к которому стремится N? Я считаю, что определить единственную бесконечность в p-адическом случае нельзя. Существуют различные возможности «стремиться к бесконечности». Они зависят от конкретных p-адических моделей. Можно предложить следующую вероятностную интерпретацию этих различных бесконечностей. Бесконечный предел по N можно интерпретировать как численность популяции в рассматриваемой стохастической модели. В действительном случае нас не интересовала структура (предельной) бесконечной популяции. Она была бесконечна, вот и все. P-адика дает нам возможность изучать бесконечные популяции различной численности. Таким образом, если численность $N_\infty \in Q_p$ популяции в изучаемой вероятностной модели не известна априори, то мы можем рассмотреть некоторую последовательность $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральных чисел ($k \to \infty$ в обычном смысле) такую, что $N_k \to N_\infty$ в Q_p и вычислять относительные частоты после $N_1, \ldots, N_k, \ldots$ испытаний. Это самый простой случай. Но обычно невозможно узнать численность популяции заранее (см. пример ИНД-производства). В этом случае мы предлагаем вычислять относительные частоты после серии испытаний. Мы начнем с рассмотрения случая, когда априорная численность популяции известна.

6.2.2. Правила вычисления относительных частот. Здесь нам более удобно обозначить множество всех признаков (возможных исходов) случайного эксперимента символом $A = \{a_1, \ldots, a_l, \ldots, a_s\}$. Пусть $N = \{N_k\}_{k=1}^{\infty}$, $N_k < N_{k+1}$, — это последовательность натуральных чисел. Здесь используется обычная порядковая структура на множестве натуральных чисел. По определению, зафиксировать статистическое правило N — означает вычислять относительные частоты после $N_1, N_2, \ldots, N_l, \ldots$ испытаний. Значит, если

$$\omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots), \quad \omega_j \in A, \tag{2.1}$$

— это последовательность исходов испытаний, то мы можем вычислить относительные частоты $\nu_k(a_l, \omega) = n_k(a_l, \omega)/N_k$ для всех $l = 1, \ldots, s$ и взять их пределы относительно различных топологий в поле рациональных чисел.

Здесь мы рассматриваем только случай, когда существует предел $N_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} N_k \neq 0$ в Q_p для одного из p. Это p-адическое число N_∞ может быть интерпретировано как численность популяции.

Простейшим статистическим правилом является $N = N(p)$, где $N_{k+1} = N_k + p^k$, $k = 0, 1, \ldots$ Здесь $N_\infty = -1$. Нас не удивляет возникновение -1 в качестве численности бесконечной популяции. В соответствии с гл. 4, это только символ для обозначения бесконечной p-адической величины.

Теперь установим одно из статистических правил N. Последовательность ω является S_p-последовательностью (а точнее, S_pN-последовательностью), если существуют пределы $P_p(a_l, \omega) = \lim\limits_{k\to\infty} \nu_k(a_l, \omega)$ в Q_p для всех $a_l \in A$. Пределы $P_p(a_l, \omega)$ являются p-адическими вероятностями (относительно статистического правила N). Следующим шагом должно стать определение p-адического коллектива, с введением понятия случайности, как в частотной теории Мизеса. Но в то же время нам бы не хотелось исследовать этот довольно сложный вопрос, а лишь ограничить наши рассмотрения S_p-последовательностями, так как нас больше интересует p-адика, а не случайность. Но если мы рассмотрим наши статистические примеры, то можем обнаружить случайную структуру изучаемых последовательностей.

Теперь, как и в предыдущей главе, можно доказать формальные утверждения для частот в виде строгих математических утверждений. Рассмотрим два фиксированных признака a_i и a_j и последовательность $\omega = (2.1)$. Символом $\omega(ij)$ обозначим последовательность, построенную с помощью ω по следующему правилу. Признаки a_i и a_j заменяются одним признаком $u = a_i \vee a_j$ в последовательности ω.

Утверждение 2.1. Если последовательность ω является S_p-последовательностью, то последовательность $\omega(ij)$ также является S_p-последовательностью для каждой пары признаков a_i и a_j, причем выполняется формула аддитивности для p-адических вероятностей:

$$P_p(a_i \vee a_j, \omega(ij)) = P_p(a_i, \omega) + P_p(a_j, \omega). \tag{2.2}$$

Доказательство.

$$P_p(u, \omega(i,j)) = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k(u, \omega(i,j))}{N_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{n_k(a_i, \omega)}{N_k} + \lim_{k\to\infty} \frac{n_k(a_j, \omega)}{N_k}.$$

Теперь рассмотрим множество признаков $B = \{i_1, \ldots, i_t\}$. Оно (по определению) является событием. Таким же образом введем последовательность $\omega(i_1, \ldots, i_t)$ используя метку $u = a_{i_1} \vee \ldots \vee a_{i_t}$. Если ω является S_p-последовательностью, то $\omega(i_1, \ldots, i_t)$ также S_p-последовательность и выполняется формула аддитивности для вероятностей:

$$P_p(a_{i_1} \vee \ldots \vee a_{i_t}, \omega(i_1, \ldots, i_t)) = \sum_{m=1}^{t} P_p(a_{i_m}, \omega). \tag{2.3}$$

Для обозначения вероятности мы также будем использовать символ $P_p(a_{i_1} \vee \ldots \vee a_{i_t}, \omega(i_1, \ldots, i_t))$. Таким образом, получаем

$$P_p(C \cup B, \omega) = P_p(C, \omega) + P_p(B, \omega), \quad C \cap B = \varnothing.$$

Очевидно, что

$$P_p(A, \omega) = 1. \tag{2.4}$$

Утверждение 2.2. Образ p-адической вероятности содержится в шаре U_R, $R = |N_\infty|_p^{-1}$ для всех S_p-последовательностей ω.

В частности, мы получаем, что образ p-адической вероятности — это кольцо p-адических целых чисел для правила $N(p)$.

Очевидно, что $P_p(a_i, \omega)$ содержится в этом шаре. Нужно только к формуле (2.3) применить усиленное неравенство треугольника.

Теперь рассмотрим случай, когда априорный объем N_∞ общей популяции неизвестен. В этом случае предлагается следующее правило вычисления относительных частот.

Относительные частоты вычисляются после окончания серии одного из признаков.

Значит, мы имеем следующий процесс вычисления. Пусть закончилось k серий признаков. Мы вычисляем относительные частоты $\nu_k(a_j) = \nu_k(a_j, \omega) = n_k(a_j)/N_k$, где $n_k(a_j)$ — число реализаций признака a_j в течение первых k серий, $N_k = \sum\limits_{j=1}^{s} n_k(a_j)$ — общее число испытаний после k серий. Если следующая серия — это серия признака a_l, и длина этой серии $\Delta = \Delta_{l,k+1}$, то $\nu_{k+1}(a_l) = (n_k(a_l) + \Delta)/N_{k+1}$, $\nu_{k+1}(a_j) = n_k(a_j)/N_{k+1}$, $j \neq l$, и $N_{k+1} = N_k + \Delta$. Данное статистическое правило обозначим через NS. Аналогично введем понятие S_p-последовательности относительно статистического правила NS. Зафиксируем правило NS и изучим свойства S_p-последовательностей. Сначала покажем, что свойство аддитивности (2.3) выполняется для таких последовательностей.

Доказательство. Вычислим относительные частоты в последовательности $\omega(i_1, \ldots, i_t)$ после m серий. Пусть было α серий признака $u = a_{i_1} \vee \ldots \vee a_{i_t}$ и $m - \alpha$ серий других признаков. Пусть также α серий признака u были получены из α_1 серий признака $a_{i_1}, \ldots, \alpha_t$ серий признака a_{i_t}. Пусть $\gamma_m = \beta + \alpha_1 + \ldots + \alpha_t$. Тогда $\gamma_m \to \infty$, $m \to \infty$, относительно обычной порядковой структуры. Следовательно, для $j \neq i_l$ получаем: $\nu_m(a_j, \omega(i_1, \ldots, i_t)) = \nu_{\gamma_m}(a_j, \omega) \to P_p(a_j, \omega)$. Далее,

$$\nu_m(u, \omega(i_1, \ldots, i_t)) = \frac{n_{\gamma_m}(a_{i_1}) + \ldots + n_{\gamma_m}(a_{i_t})}{N_{\gamma_m}} = \\ = \sum_{l=1}^{t} \nu_m(a_{i_l}, \omega) \to \sum_{l=1}^{t} P_p(a_{i_l}, \omega).$$

Также очевидно, что суммарная вероятность равна единице, т. е. справедлива формула (2.4).

Утверждение 2.3. Для статистического правила NS образ p-адической вероятности равен Q_p.

Доказательство. Пусть $a \in Q_p$. Представим его в виде $a = \alpha/p^q$, $\alpha \in Z_p$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 p + \ldots$, $\alpha_0 \neq 0$. Построим S_p-последовательность ω с двумя свойствами W и R такими, что $\nu_k(W, \omega) \to a$, $k \to \infty$. Введем следующие натуральные числа:

$$\Delta_k = \alpha_k p^k, \quad \Gamma_k = p^q(p_{k+1} + 1),$$

$$\Delta\Gamma_k = \Gamma_k - \Gamma_{k-1} (\Gamma_{-1} = 0), \quad \delta_k = \Delta\Gamma_k - \Delta_k.$$

Рассмотрим последовательность серий W и R. Длинами серий W являются $\Delta_0, \ldots, \Delta_k, \ldots$, а длинами серий R являются $\delta_1, \ldots, \delta_k, \ldots$ Тогда каждая такая последовательность может быть выбрана в качестве ω.

Мы можем ввести некоторый тип случайной структуры при рассмотрении стохастического правила выбора серий W и R.

Теперь рассмотрим условные частотные вероятности относительно статистического правила *NS*. Здесь мы также следуем теории Р. фон Мизеса.

Пусть $B = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}\}$ — некоторое множество признаков (событие). Рассмотрим последовательность (2.1) и построим новую последовательность $\omega|B$ по следующему правилу. Из последовательности ω мы выбираем только те элементы, которые принадлежат B. Таким образом, получаем

$$\omega|B = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots), \quad \xi_j \in B. \tag{2.5}$$

Утверждение 2.4. Пусть ω — это S_p-последовательность относительно правила *NS*. Тогда последовательность $\omega|B$ является также S_p-последовательностью для каждого события B с ненулевой вероятностью. И для каждого события $C \subset B$ выполняется следующая формула условной вероятности:

$$P_p(C, \omega|B) = P_p(C, \omega)/P_p(B, \omega). \tag{2.6}$$

Доказательство. Вычислим частоты в (2.5) после k серий: $\nu_k(a_{i_l}, \omega|B) = n(a_{i_l}, \omega|B)/N_k$, где $N_{k,B} = \sum\limits_{q=1}^{t} n_k(a_q, \omega|B)$. Заметим, что конец k-й серии в последовательности (2.5) соответствует концу $(k+m)$-й серии в S_p-последовательности (2.1), m-я серия соответствует признакам a_j, $j \neq i_q$, с числом реализаций $n_{k+m}(a_j, \omega)$. Далее, $n_k(a_{i_q}, \omega|B) = n_{k+m}(a_{i_q}, \omega)$, $q = 1, \ldots, t$. Таким образом,

$$\nu_k(a_{i_q}, \omega|B) = \frac{n_{k+m}(a_{i_q}, \omega)}{N_{k+m}} \Bigg/ \sum_{q=1}^{n} \frac{n_{k+m}(a_{i_q}, \omega)}{N_{k+m}},$$

где N_{k+m} число всех реализаций в (2.1) после $k+m$ серий. Следовательно,

$$\nu_k(a_{i_q}, \omega|B) = \frac{\nu_k(a_{i_q}, \omega)}{\nu_k(B, \omega)} \to \frac{P_p(a_{i_q}, \omega)}{P_p(B, \omega)}.$$

Используя символ $P_p(C|B, \omega)$ вместо $P_p(C, \omega|B)$, мы получаем обычную формулу условной вероятности:

$$P_p(C|B, \omega) = P_p(C, \omega)/P_p(B, \omega).$$

§ 6.3. Что можно делать с p-адическими вероятностями?

6.3.1. Об исчислениях p-адических коллективов. Мы можем использовать p-адику (и более общие топологические вероятности) таким же образом, как и обычную действительную теорию вероятностей.

Вот простейший пример. Рассмотрим ИНД-производство с s различными видами производства (s видов шаров). Используем статистическое правило NS. Пусть мы имеем вероятности $P_p(1)$, ..., $P_p(s) \in Q_p$ различных типов ИНД-производства. Для большей строгости мы должны использовать символы $P_p(1,\omega)$, ..., $P_p(s,\omega)$. Это означает, что мы имеем дело со случайной последовательностью ω, полученной в процессе ИНД-производства. Заметим, что это S_p-последовательность с p-адическими вероятностями $P_p(1,\omega)$, ..., $P_p(s,\omega)$. Теперь нас интересует вероятность того, что взятый из коробки шар, принадлежит одному из фиксированных типов: i_1, ..., i_k. Тогда, используя формулу (2.3), мы получаем

$$P_p(i_1 \vee \ldots \vee i_k) = \sum_{t=1}^{k} P_p(i_t).$$

Этот тривиальный пример может быть обобщен на случай топологического пространства. Распределение вероятностей может быть не дискретным. Хотя в прикладных исследованиях мы используем конечную выборку. Поэтому p-адические вероятности $P_p(1,\omega), \ldots, P_p(s,\omega)$ — это всегда рациональные числа.

Теперь рассмотрим некоторое подмножество $G = \{i_1, \ldots, i_l\}$, состоящее из признаков $(i_1, \ldots, i_s)$ (например, шары фиксированного размера, но различных цветов). Пусть нам известно, что шар b принадлежит G. Какова вероятность события $b \in i_t$, где $i_t \in G$? На этот вопрос нетрудно ответить: $P_p(b \in i_t, b \in G) P_p(b \in i_t)/P_p(G)$.

Таким же образом мы можем рассмотреть два и более независимых ИНД-производства и вычислить распределение нового коллектива.

Вероятностное исчисление учит нас вычислять распределения вероятностей в новых коллективах на основе распределений в первоначальных коллективах [99], стр. 14.

В вероятностном исчислении и начальные и конечные данные являются вероятностями. Эти начальные данные принадлежат полю действительных чисел в обычной теории вероятностей и U_{Q_τ} — в нашей обобщенной теории.

А в приложениях мы должны использовать частотную интерпретацию для результатов наших теоретических рассуждений.

6.3.2. Развитие идей Р. фон Мизеса и А. Н. Колмогорова. Основная идея фон Мизеса состоит в следующем:

«Вероятность — это высоко математизированная наука, но она не является математикой, так же как и гидродинамика не является частью теории уравнений в частных производных, хотя она исследует интересные и сложные проблемы этой области. Нашей целью в представлении теории вероятностей как математической науки является внедрение в основные вероятностные положения идеального отношения к действительности, как это сделано в механике и других науках» ([99], стр. 44).

Такими идеальными производными действительности являются частотная теория коллективов (фон Мизес) и теория вероятностных мер (Колмогоров).

Теории фон Мизеса и Колмогорова неоднократно и подробно обсуждались (см. [100] и ссылки в первой главе этой книги). Представленное здесь исследование демонстрирует новое широкое поле для их применения.

§ 6.4. Первый шаг к p-адической теории информации

6.4.1. О нахождении p-адической структуры. Наша p-адическая теория вероятностей — это первый шаг к новой p-адической теории информации. Какой вывод можно сделать из изучения игровой модели ИНД-производства с помощью p-адической теории вероятностей? Это возможность получения из статистических данных информации, которую было бы невозможно получить, используя вычисления в поле действительных чисел. Если мы попытаемся получить осмысленную интерпретацию статистических данных ИНД-модели с помощью обычных вероятностных рассуждений, то получим только хаотические флуктуации частот и никакой информации с точки зрения обычной теории информации. Но некоторая полезная информация здесь все же присутствует, и проблема заключается только в том, как найти эту информацию, используя наш p-адический математический аппарат, применительно к этим статистическим данным. Какого рода информацию можно изучать с помощью p-адической теории информации? Как мы видели на примере ИНД-модели, одно из возможных применений — это работа с большими (порядка p^k) информационными строками.

Я думаю, что можно было бы применить p-аддическую теорию информации ко многим проблемам.

1. Квантовая механика и теория поля (новые квантовые состояния). Мы предсказываем существование новых квантовых состояний, имеющих p-адические вероятности реализации. Если квантовая система описывается такой волновой функцией, то относительные частоты стабильны относительно p-адической метрики.

2. Промышленность: процессы экстенсивного производства. Возможно, p-адика была бы полезна для финансовой статистики. Хаотические колебания финансов могут иметь p-адическую структуру.

3. Экология: хаос колебаний. Для изучения колебаний различных типов загрязнений, нам следует найти p-адическую структуру этого экологического хаоса.

4. Биология: биологические системы, где каждый биологический организм производит p новых биологических организмов и т. д.

6.4.2. Космические сигналы. P-адическая теория вероятностей — это мощный инструмент для исследования хорошо известных данных, которые не несут какой-либо полезной информации (хаос или шум) с точки зрения обычной действительной теории информации.

Существует масса интересных примеров такой информации. В последние годы было предпринято множество попыток обнаружить космические сигналы других цивилизаций. Но все эти исследования не дали никаких результатов. Но почему для обнаружения этих сигналов мы должны пользоваться только теорией информации, основанной на действительных числах? В рамках p-адической теории информации исследование космических сигналов также возможно. И, возможно, такая попытка оказалась бы более удачной.

Рассмотрим простой пример, иллюстрирующий наши идеи. Кто-то пытается послать сообщение о некоторой константе $T = -1$. Но он использует для этого сообщения 2-адическое числовое поле. Он знает, что в Q_2 эта константа имеет следующий код:

$$T = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^m + \ldots = 1 \ldots 1 \ldots$$

Но некто, кто попытается использовать для данного космического сигнала компьютер, оперирующий с действительными числами, получит бесконечно возрастающую последовательность чисел.

Мы не утверждаем, что применение p-адических чисел для исследований космических сигналов было бы очень простым. Существует проблема нахождения простого числа p, на котором основывается космический сигнал. Но можно в качестве первой попытки попробовать провести вычисления непосредственно для $p = 2, 3, \ldots$

§ 6.5. Вероятностная модель p-адической монеты

Мы хотим придумать математическую модель, которую можно было бы рассматривать в качестве аналога обычной монеты. В настоящий момент у меня нет промышленного образца такой монеты. Но если Вы обладаете финансовыми и техническими ресурсами, то несложно сконструировать такой металлический диск с p-адическими вероятностями реализаций его сторон. Таким образом, если с «монетой» производится длинная серия испытаний, то частоты реализаций сторон «монеты» колеблются относительно действительной метрики и стабильны относительно p-адической метрики. Параметр p включен в конструкцию «монеты».

6.5.1. Описание p-адической монеты. Пусть у нас имеется металлический диск с меткой «a» на одной стороне и меткой «b» на другой. Внутренняя структура данного диска не так проста, как структура обычной металлической монеты. Во-первых, существует устройство, которое может наводить отрицательный электрический заряд на стороне «a» или «b». Заряд может возникать только на одной стороне. Поэтому, если он появляется на «a», то пропадает на «b», и наоборот. Во-вторых, существует цифровой компьютер (или что-либо подобное) с генератором обычных (псевдо) случайных чисел, $\xi(\omega) = 0, 1$. Например, рассмотрим случай равновероятностных реализаций 0 и 1. Сейчас мы говорим об обычном генераторе случайных чисел и об обычных (колмогоровских) вероятностях. Относительные частоты реализаций 0 и 1 стремятся к $1/2$ относительно действительной метрики. Цифровой компьютер управляет работой электрического устройства в соответствии со следующим алгоритмом A.

Во-первых, существует фиксированная единица времени, например $\Delta = 1$ сек. Если $\xi(\omega) = 0$, то электрический заряд (отрицательный) появляется на стороне «a» и сохраняется на ней в течение времени

$$\Delta t' = \Delta t p^2, \tag{5.1}$$

где Δt — предыдущий интервал времени, в течение которого сторона «a» была наэлектризована. Здесь первый интервал $\Delta t_1 = \Delta t_1^a = 1$. Таким образом, имеются интервалы $\Delta t = 1,\ p^2,\ p^4,\ \ldots,\ p^{2k},\ \ldots$ для стороны «a». Если $\xi(\omega) = 1$, то электрический заряд (также отрицательный) появляется на стороне «b», и интервал времени, в течение которого «b» была наэлектризована, также вычисляется с помощью (5.1), но первый интервал $\Delta t_1 = \Delta t_1^b = p$. Таким образом, мы получили интервалы $\Delta t = p,\ p^3,\ p^5,\ \ldots,\ p^{2k+1},\ \ldots$

Диск с такой внутренней структурой называется *p-адической монетой.*

6.5.2. Описание опыта с подбрасыванием монеты. Рассмотрим статистический опыт с p-адической монетой. Существует наблюдатель O, который ничего не знает о внутренней структуре этой «монеты». Он видит только металлический диск. Наблюдатель O проводит следующий опыт с этой монетой. Он бросает ее на стол, обладающий постоянным положительным зарядом. Каждую секунду бросается только одна монета. Верхняя часть монеты не заряжена. Кроме этого, существует еще и условие на алгоритм A. Этот алгоритм начинает работать после первого подбрасывания.

Нас интересуют вероятности выпадения стороны «a», $P(a)$, и стороны «b», $P(b)$.

6.5.3. Флуктуации частот относительно действительной метрики. Пусть $\{\xi_k(\omega)\}$ — последовательность независимых СВ, $\xi_k(\omega) = 0, 1$, с вероятностями $1/2$ (схема Бернулли) на обычном вероятностном пространстве $(\Omega,\ F,\ P)$. Здесь мы используем обычное определение Колмогорова.

Введем суммы СВ:

$$S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega), \quad T_n(\omega) = n - S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} (1 - \xi_k(\omega)).$$

Введем относительные частоты:

$$n_m^b(\omega) = \sum_{k=1}^{T_m(\omega)} p^{2(k-1)}, \quad n_m^a(\omega) = \sum_{k=1}^{S_m(\omega)} p^{2k-1}$$

и $N_m(\omega) = n_m^a(\omega) + n_m^b(\omega)$. Введем относительные частоты

$$\nu_m^a(\omega) = \frac{n_m^a(\omega)}{N_m(\omega)}, \quad \nu_m^b(\omega) = \frac{n_m^b(\omega)}{N_m(\omega)}.$$

Теорема 5.1. Относительные частоты $\nu_m^a(\omega)$ и $\nu_m^b(\omega)$ не имеют пределов в поле действительных чисел почти всюду $(\mathrm{mod}\, P)$.

Доказательство. Рассмотрим, например,

$$\nu_m^b(\omega) = \frac{n_m^b(\omega)}{n_m^a(\omega) + n_m^b(\omega)} = \frac{1}{1 + \lambda_m(\omega)},$$

где

$$\lambda_m(\omega) = \frac{n_m^a(\omega)}{n_m^b(\omega)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{S_m(\omega)} p^{2k-1}}{\sum\limits_{k=1}^{T_m(\omega)} p^{2(k-1)}} =$$

$$= \frac{p(p^{2S_m(\omega)} - 1)}{p^{2T_m(\omega)} - 1} = \frac{p(1 - p^{-2S_m(\omega)})}{p^{2(T_m(\omega) - S_m(\omega))} - p^{-2S_m(\omega)}}.$$

Используя закон больших чисел, мы получаем, что $p^{-2S_m(\omega)} \to 0$, $m \to \infty$, для почти всех ω. Далее, $T_m(\omega) - S_m(\omega) = m - 2S_m(\omega)$, но данное выражение не имеет предела для почти всех ω.

Мы вычисляли относительные частоты после каждой серии 0 или 1. Можно вычислить относительные частоты после каждого испытания, так же как и в обычной теории вероятностей (например, теории Мизеса). Из теоремы 5.1 следует, что пределов этих относительных частот не существует.

6.5.4. Статистическая стабилизация относительно p-адической метрики. Во-первых, рассмотрим статистическое правило NS вычисления относительных частот после окончания серии «a» или «b».

Теорема 5.2. Относительные частоты $\nu_m^a(\omega)$ и $\nu_m^b(\omega)$ имеют пределы в Q_p почти всюду $(\operatorname{mod} P)$.

Доказательство. Так как $T_m(\omega)$, $S_m(\omega) \to \infty$ почти всюду $(\operatorname{mod} P)$, то мы получаем, что существуют пределы:

$$P_p(a) = \lim_{m\to\infty} \nu_m^a(\omega) = \frac{p}{1-p^2}(1-p) = \frac{p}{1+p};$$

$$P_p(b) = \lim_{m\to\infty} \nu_m^b(\omega) = \frac{1}{1-p^2}(1-p) = \frac{1}{1+p}.$$

Значит, что $\omega \in \Omega$ являются ST_p-последовательностями относительно статистического правила NS. И p-адические частотные вероятности корректно определены для всех последовательностей такого вида. Эти p-адические вероятности не зависят от $\omega \in \Omega$.

Например, если $p = 2$, то 2-адические вероятности выпадения «a» и «b» равны $2/3$ и $1/3$ соответственно, а если $p = 127$, то $P_a = 127/128$ и $P_b = 1/128$.

Несложно переделать эту p-адическую монету, изменяя алгоритм A. Мы можем рассмотреть другое правило для интервалов времени, когда «a» или «b» наэлектризованы. Например, $\Delta t'_a = \Delta_a p^4$ и $\Delta t'_b = \Delta_b p^3$. Получим другую p-адическую монету с другими p-адическими вероятностями. Существует также возможность использования несимметричных генераторов (псевдо) случайных чисел в цифровом компьютере. Каждый может предложить свою цифровую модификацию такой p-адической монеты. Например, Вы могли бы реализовать p-адический аналог кости с шестью p-адическими вероятностями и флуктуациями относительно действительной метрики.

Как же мы можем использовать p-адическую вероятность в случае опыта с p-адической монетой? Очевидная возможность такого использования — это классификация различных типов p-адических монет с помощью статистических экспериментов. Пусть у наблюдателя O имеется два металлических диска. И эти диски являются p-адическими монетами с различными p-адическими вероятностями $P_a(1)$, $P_b(1)$ и $P_a(2)$, $P_b(2)$. Наблюдатель O проводит предыдущий статистический эксперимент сначала с одной, а затем с другой монетой. Если он использует обычную статистику, то получает хаотические колебания относительных частот как для первой, так и для второй монет. Различить эти монеты нельзя. Обе они порождают только серию хаотических колебаний. Но если наблюдатель использует p-адические числа, то сразу получает различные p-адические вероятности. Что позволяет без труда различить эти монеты.

В этом эксперименте возникает типичная проблема p-адики. Перед тем как начинать все наши процедуры, мы должны решить проблему выбора p. Какое из p-адических чисел удобнее использовать в данной модели? В случае с нашей монетой на этот вопрос ответить нетрудно. Мы сразу видим p^k-серийную структуру наших статистических данных. Это несложная проблема, так как различные серии, полученные цифровым компьютером, наблюдатель O может рассматривать как одну большую серию.

Эта модель p-адической монеты была реализована на компьютере моим студентом В. Безгиным, и мы увидели флуктуации цифр в десятичном разложении относительных частот «a» и «b» на протяжении очень и очень длинной серии экспериментов и статистическую стабилизацию p-адических цифр тех же относительных частот. Конечно, скорость этой p-адической стабилизации очень сильно зависит от различных $(1/2,\ 1/2)$-генераторов псевдослучайных чисел. Но конечный результат всегда одинаков. Мы также проводили статистические эксперименты с несимметричными генераторами. Картина была аналогичной. Наблюдалось колебание вещественных цифр и стабилизация p-адических. Но на данный момент нет математических результатов для несимметричных p-адических монет.

Теперь рассмотрим правило $N(p)$ вычисления относительных частот.

Теорема 5.3. Последовательность $\omega \in \Omega$ является ST_p-последовательностью относительно статистического правила $N(p)$ почти всюду $(\mathrm{mod}\, P)$.

Доказательство. Обозначим через m_k^a и m_k^b число реализаций сторон «a» и «b» после $M_k = \sum\limits_{j=0}^{k} p^j = \dfrac{p^{k+1}-1}{p-1}$ испытаний p-адической монеты, а μ_k^a, μ_k^b — соответствующие частоты. Пусть $n^a = \lim\limits_{k\to\infty} n_k^a$ и $n^b = \lim\limits_{k\to\infty} n_k^b$ (см. доказательство теоремы 5.2). Так как $\lim\limits_{k\to\infty} N_k(\omega) = \lim\limits_{k\to\infty} M_k = 1/(1-p)$ почти всюду $(\mathrm{mod}\, P)$, то достаточно показать, что $n^a = \lim\limits_{k\to\infty} m_k^a$ и $n^b = \lim\limits_{k\to\infty} m_k^a$. Мы также видим, что

$$\begin{gathered}M_k = m_k^a + m_k^b = (p + p^3 + \ldots + p^{2U_k - 1}) = (1 + p^2 + \ldots + p^{2(V_k - 1)}) + \\ + (\text{часть одной из «}a\text{»-серии длины } p^{2U_k+1} \\ \text{или одной из «}b\text{»-серии длины } p^{2V_k}) = n^a_{h(k,\omega)} + n^b_{h(k,\omega)} + \delta_k.\end{gathered}$$

Здесь $U_k = U_k(\omega)$ и $V_k = V_k(\omega)$ и $U_k(\omega)$, $V_k(\omega) \to \infty$, $k \to \infty$ почти всюду $(\mathrm{mod}\, P)$. Следовательно, $n^a_{h(k,\omega)} \to n^a$ и $n^b_{h(k,\omega)} \to n^b$, $k \to \infty$.

Далее,

$$\delta_k = \frac{p^{k+1}-1}{p-1} - \left[\frac{p^{2V_k}-1}{p^2-1} + \frac{p(p^{2U_k}-1)}{p^2-1}\right] =$$
$$= \frac{(p^{k+1}-1)(p+1) - p^{2V_k} + 1 - p^{2U_k+1} + p}{p^2-1} =$$
$$= \frac{p^{k+2}+p^{k+1}-p^{2V_k}-p^{2U_k+1}}{p^2-1} = \frac{p^{l(k)}\Sigma}{p^2-1},$$

где $(p,\Sigma)=1$.

Так как $(p^2-1,p)=1$ и число δ_k натуральное, то (p^2-1) — делитель Σ и $\delta_k = p^{l(k)}\gamma_k$, где γ_k натуральное число, $(\gamma_k,p)=1$. И имеют место следующие возможности:

а) δ_k — это часть серии «a» и $m_k^a = n^b_{h(k,\omega)}(\omega) + \delta_k(\omega)$ и $m_k^b(\omega) = n^b_{g(k,\omega)}$;

б) δ_k — это часть серии «b» и $m_k^b = n^b_{g(k,\omega)}(\omega) + \delta_k(\omega)$ и $m_k^a(\omega) = n^a_{h(k,\omega)}$.

Так как $|\gamma_k(\omega)|_p \leqslant 1$ и $l(k,\omega)\to\infty$, $k\to\infty$, почти всюду $(\mathrm{mod}\, P)$, то $\delta_k(\omega)\to 0$ почти всюду $(\mathrm{mod}\, P)$. Значит, мы получили представление

$$m_k^a = n^a_{h(k,\omega)}(\omega) + z_k(\omega), \quad m_k^b = n^b_{g(k,\omega)}(\omega) + y_k(\omega),$$

где $z_k(\omega)$, $y_k(\omega)\to 0$, $k\to\infty$, почти всюду $(\mathrm{mod}\, P)$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} m_k^a(\omega) = n^a$ и $\lim\limits_{k\to\infty} m_k^b(\omega) = n^b$ почти всюду.

§ 6.6. О колмогоровской сложности p-адических случайных последовательностей

На математическом уровне мы уже определили понятие p-адической статистической стабилизации. Это понятие S_p-последовательности относительно статистического правила N с фиксированной численностью N_∞ популяции или правила NS, где относительные частоты вычисляются после окончания серии какого-то признака. Но на самом деле это понятие не дает определения p-адического коллектива, потому что мы не предложили никакого аналога условию случайности фон Мизеса. Мы не можем применить идеи фон Мизеса о случайности к последовательности со свойством статистической стабилизации, которое является инвариантом относительно выбора подпоследовательности, так как p-адическая метрика очень сильно зависит от изменения $n(a_l,\omega)$ на одну или несколько единиц.

Мы хотим применить идеи Колмогорова о случайности к p-адическому случаю, чтобы определить случайные последовательности, основываясь на сложности их конечных сегментов. В данной книге мы не будем подробно обсуждать этот вопрос, а ограничимся только рассмотрением примера с p-адической монетой. Также будут представлены некоторые философские замечания о природе стохастики.

6.6.1. Колмогоровская сложность. Пусть Ω — множество всех последовательностей $\omega = (\omega_j)_{j=1}^{\infty}$, $\omega_j = 0, 1$. Нас интересуют функции f: $\Omega \to \Omega$. Точнее — рекурсивные функции. Основные определения по этой тематике Вы можете найти, например, в [140]. Но мы не стремимся к строгому логическому подходу, поэтому нам достаточно использовать только тезис Черча:

Класс алгоритмически реализованных функций (в интуитивном значении алгоритма) совпадает с классом всех частично рекурсивных функций.

Таким образом, нас не интересует математическая теория частично рекурсивных функций. Нам достаточно только использовать алгоритмы, соответствующие этим функциям.

Как обычно, конечные векторы $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_j = 0, 1$, называются словами относительно алфавита $\{0, 1\}$, $l(x) = n$ — длина слова x, см. [140].

Определение 6.1 (А.Н. Колмогоров [95]). Пусть A — произвольный алгоритм. Сложностью слова x относительно A называется число

$$K_A(x) = \min l(\pi),$$

где $\{\pi\}$ — это программы, которые могут реализовать слово x с помощью A.

Данное определение очень сильно зависит от структуры A. Но А.Н. Колмогоров доказал следующую теорему, которая делает законным это определение.

Теорема 6.1. Существует такой алгоритм A' (оптимальный алгоритм), что

$$K_{A'}(x) \lesssim K_A(x) \qquad (6.1)$$

для любого алгоритма A.

Как обычно, (6.1) означает, что существует такая константа C, что

$$K_{A'}(x) \leqslant K_A(x) + C$$

для всех слов x. Оптимальный алгоритм A' не единственен.

Определение 6.2. Сложность $K(x)$ слова x равна сложности $K_{A'}$ относительно одного фиксированного (для всех рассматриваемых) оптимального алгоритма A'.

А.Н. Колмогоров предложил [95] использовать понятие сложности конечного слова, чтобы попытаться определить случайные последовательности с помощью сложностей их конечных сегментов. Идея Колмогорова очень естественна. Он предложил считать последовательность $\omega \in \Omega$ случайной последовательностью, если конечные сегменты

$(\omega)_n = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ этой последовательности имеют сложности, не меньшие, чем n. Таким образом, последовательность ω является случайной последовательностью в смысле Колмогорова, если невозможно найти программы π_n, производящие слова $(\omega)_n$, с длинами $l(\pi_n) \ll n$. Нам необходимо слово длиной не меньше, чем длина сегмента последовательности ω для кодирования этого сегмента.

6.6.2. Оценка сложности p-адической монеты. Мы можем рассмотреть модель p-адической монеты. Существует алгоритм A (теперь эта буква используется для конкретного алгоритма рассматриваемой p-адической монеты) и машина Тюринга, которая переводит любую последовательность $\omega \in \Omega$ в новую последовательность $\xi = f(\omega)$. Пусть $\{s_1(\xi) < s_2(\xi) < \ldots < s_n(\xi) < \ldots\}$ моменты, когда 0 меняется на 1 или наоборот. Обозначим через $m_j = \left|(\xi)_{s_j}\right|$ число единиц в слове $(\xi)_{s_j}$.

Теорема 6.2. Следующая оценка,

$$K((\xi)_{s_j}) \prec \log_p s_j, \tag{6.2}$$

выполняется для почти всех ω относительно обычной (действительной) вероятности Бернулли на Ω.

Доказательство. Из теоремы 6.1 получаем

$$K((\xi)_{s_j}) \leqslant K_A((\xi)_{s_j}) + C_A.$$

Далее,

$$K_A((\xi)_{s_j}) \leqslant l(f^{-1}((\xi)_{s_j})) = L_j,$$

где $\xi = f(\omega)$. Теперь $m_j = \dfrac{p(p^{2t+1}-1)}{p^2-1}$ и $s_j - m_j = \dfrac{p^{2r+1}-1}{p^2-1}$, где $L_j = t + r$. Таким образом,

$$t = \frac{1}{2}\log_p\left(1 + \frac{m_j(p^2-1)}{p}\right) - \frac{1}{2}.$$

Таким же образом мы вычисляем r и получаем

$$L_j = \frac{1}{2}\left(\log_p\left(1 + \frac{m_j(p^2-1)}{p}\right) + \log_p\big(1 + (s_j - m_j)(p^2-1)\big)\right) - 1.$$

Теперь мы используем тот факт, что $m_j \to \infty$ и $s_j - m_j \to \infty$, $j \to \infty$, почти всюду (mod вероятность Бернулли) на Ω. Это обычная вероятностная мера с действительными значениями. Значит,

$$L_j \leqslant \frac{1}{2}\big(\log_p m_j + \log_p(s_j - m_j)\big) + C.$$

Так как $\sqrt{ab} \leqslant (a+b)/2$, то получаем

$$L_j \leqslant \log_p\sqrt{m_j(s_j - m_j)} + C \leqslant \log_p\frac{1}{2} + \log_p(s_j - m_j + m_j) + C = \log_p s_j + C.$$

Теперь мы хотим представить некоторые философские рассуждения о природе стохастики. Что такое обычная стохастика? Это стохастика, которая рассматривается в обычной вещественной теории вероятностей на основе подходов коллективов Р. фон Мизеса или сложности А.Н. Колмогорова. Используется термин случайность. В теории Колмогорова рассматриваются последовательности реализаций, в которых сложность конечного сегмента возрастает как длина этого сегмента (в действительности это не так просто, но мы не можем изучать этот предмет более подробно, см., например, [140]). Мы рассмотрели один частный пример и увидели, что последовательности, обладающие свойством p-адической статистической реализации, могут оказаться намного проще (в смысле колмогоровской сложности), чем обычные случайные последовательности. Их сложность возрастает как $\log_p n$, а не как n в обычной теории вероятностей. Следовательно, мы могли бы попытаться классифицировать стохастику более точно и ввести различные типы стохастик: n-стохастика (обычная действительная теория вероятностей), $\log_p n$-стохастика (p-адическая теория вероятностей) и т. д. С обычной (вещественной) точки зрения у нас есть только случайные последовательности, детерминированные последовательности (где колмогоровская сложность не ограничена) и большой промежуточный класс последовательностей, которые не рассматриваются как случайные или определенные. Колмогоровская сложность этих последовательностей не ограничена, но она не возрастает как длина. Мы надеемся, что p-адическая теория вероятностей поможет в классификации этого промежуточного класса стохастики. Но пока это только идеи. Наше рассмотрение основано только на примере p-адической монеты. Я полагаю, что, как и в обычной теории вероятностей, колмогоровская сложность не является хорошим инструментом для разрешения этой проблемы на математическом уровне, см. [140]. Даже в вещественном случае нужны другие типы сложностей, см. [140]. И, вероятно, нам нужно ввести новые типы сложностей для p-адических исследований.

§ 6.7. Статистическая интерпретация квантовых моделей с волновыми функциями, принимающими значения в квадратичных расширениях поля p-адических чисел

Частотная теория вероятностей, базирующаяся на фундаментальном топологическом принципе стабилизации относительных частот, позволяет предложить статистическую интерпретацию неархимедовозначных квантовых теорий, подобную статистической интерпретации обычного квантования.

Предположим, например, что мы рассматриваем представление Баргмана–Фока

$$f(z) = \sum_\alpha f_\alpha z^\alpha, \quad (f, f) = 1, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Когда число испытаний (измерений энергии) стремится к бесконечности, относительная частота $\nu(\alpha)$ реализации энергии $E_\alpha = \sum(\alpha_j + 1/2)$ стремится к вероятности $|f_\alpha|^2$ в p-адической топологии.

Таким образом, по-моему, неархимедовозначная квантовая механика соответствует рассмотрению новых квантовых состояний с p-адическими вероятностями реализации.

Можно предложить подобную статистическую интерпретацию неархимедовозначной теории поля. Предположим, например, что мы рассматриваем представление Баргмана–Фока

$$f(z) = \sum_\alpha f_\alpha z^\alpha, \quad (f, f) = 1.$$

Когда число испытаний стремится к бесконечности, относительная частота $\nu(\alpha)$ частиц α_j, находящихся в состоянии z_j, стремится к вероятности $|f_\alpha|^2$ в p-адической топологии.

Значит, неархимедовозначная теория поля соответствует рассмотрению новых состояний квантовых полей с p-адическими вероятностями реализации.

Отметим, что неархимедова структура гильбертова пространства квантовой теории не связана со структурой пространства–времени. Мы можем также рассматривать обычную действительную структуру пространства–времени, вводя в этом случае новые квантовые состояния.

Для экспериментального подтверждения этой теории необходимо проводить опыты, в которых относительные частоты колебались бы в вещественной топологии и стабилизировались бы в p-адической топологии для одного из полей p-адических чисел. Простое число p должно выбираться либо теоретически на основе свойств модели, либо моделироваться на компьютере с помощью перебора p. Конечно, если p велико, то последний способ неудобен.

Из структуры p-адических статистических моделей, рассмотренных в этой главе, мы видим, что p-адическая статистика подходит для систем с большими сериями выпадения, длина которых стремится к нулю в p-адической норме.

Глава 7. P-АДИЧЕСКИЗНАЧНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ)

Неограниченность p-адического распределения Гаусса является основной причиной создания варианта p-адической теории вероятностей, в которой вероятности принадлежат пространствам распределений (обобщенные функции). Данная глава посвящена этой вероятностной модели, которая очень похожа на обычную квантовую вероятность (над полем действительных чисел). Оба этих формализма развиваются без построения теории мер.

§ 7.1. Аксиоматика

Пусть Ω — множество, $\Phi(\Omega, Q_p)$ — топологическая алгебра функций ξ, обладающая следующим свойством:

композиция $f \circ \xi$ *принадлежит* $\Phi(\Omega, Q_p)$ *для всех* $f \in A(Q_p, Q_p)$ *и* $\xi \in \Phi(\Omega, Q_p)$.

Далее, пусть P: $\Phi(\Omega, Q_p) \to Q_p$ — нормированный ($P(1) = 1$) непрерывный линейный функционал, обладающий свойством:

функционал P_ξ: $A \to Q_p$, *определяемый равенством* $P_\xi(f) = P(f \circ \xi)$, *непрерывен для каждой функции* $\xi \in \Phi(\Omega, Q_p)$.

Определение 1.1. Тройка $(\Omega, \Phi(\Omega, Q_p), P)$ является обобщенным вероятностным пространством p-адическизначной теории.

Как уже отмечалось, поле Q_p играет роль сегмента $[0, 1]$ в p-адическом случае. Вот почему условие нормировки — это единственное ограничение на значения P. Ω — это пространство выборок теории, P — распределение вероятностей, функции из алгебры $\Phi(\Omega, Q_p)$ называются случайными величинами (СВ), распределение P_ξ — распределение вероятностей СВ ξ.

Безусловно, рассматриваемый нами класс распределений вероятностей P слишком широк. И не ясно, какого рода ограничения нужно наложить на P, чтобы получить наиболее естественную вероятностную модель. Как уже обсуждалось, условие σ-аддитивности (на σ-алгебре) влечет дискретность меры. Если в качестве распределений вероятностей рассматривать только ограниченные меры, то распределения Гаусса и Волкенборна исключаются из вероятностных рассмотрений.

Существует целый ряд точек соприкосновения с квантовой теорией вероятностей. В частности, здесь нет никакой σ-аддитивной вероятностной меры.

Простейшим примером вероятностного пространства является

$$\Omega = Q_p^n, \quad \Phi(\Omega, Q_p) = A(Q_p^n, Q_p), \quad P = \mu \in A'(Q_p^n, Q_p),$$

где μ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{Q_p^n} 1\mu(dx) = 1.$$

Это вероятностное пространство удобно для реализации конечного числа независимых СВ. Но здесь невозможно построить бесконечную последовательность независимых СВ.

Следующая вероятностная модель была предложена в [60] (см. § 7.5). Это вероятностное пространство на основе распределения белого шума. В нем можно построить бесконечную последовательность независимых гауссовских СВ. Здесь предложен большой класс вероятностных пространств. Мы можем построить практически все бесконечные последовательности независимых СВ на основе этих вероятностных пространств.

Как обычно, математическое ожидание СВ $\xi \in \Phi(\Omega, Q_p)$ определяется как интеграл $M\xi = \int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega)$, причем $Mf(\xi) = \int_{Q_p} f(x)P_\xi(dx)$. Моменты СВ ξ определяются как $m_\xi(n) = M\xi^n$.

Определение 1.2. Последовательность СВ $\{\xi_n\}$ сходится по распределению к СВ ξ, $\xi_n \to \xi(D)$, $n \to \infty$, если последовательность вероятностных распределений $\{P_{\xi_n}\}$ сходится к P_ξ в пространстве $A'(Q_p, Q_p)$.

Определение 1.3. Характеристическая функция СВ ξ — это преобразование Лапласа распределения P_ξ:

$$\varphi_\xi(t) = Me^{t\xi(\omega)} = \int_{Q_p} e^{tx} P_\xi(dx).$$

Так как $A' = \cup_r A'_r$, то для любого $P_\xi \in A'$ существует такое $r \in \Gamma_{Q_p}$, что $P_\xi \in A'_r$. Поэтому для малых t характеристическая функция корректно определена.

Замечание 1.1. Здесь нет необходимости использовать мнимую экспоненту, так как в p-адическом случае i не влияет на существование математического ожидания.

Теорема 1.1 (свойства характеристической функции). Предположим, что ξ — случайная величина и $\varphi_\xi(t)$ — ее характеристическая функция.

Тогда:

1. $\varphi_\xi(0) = \int\limits_{\Omega} P(d\omega) = 1,$

2. функция $\varphi_\xi(t)$ аналитична в нуле,

3. $M\xi^n = \varphi_\xi^{(n)}(0),$

4. характеристическая функция единственным образом определяет распределение СВ,

5. если $f(\xi) = \int\limits_{Q_p} e^{xt}\lambda_f(dt)$, $\lambda_f \in A_0'(Q_p)$, то

$$Mf(\xi) = \int\limits_{Q_p} \varphi_\xi(t)\lambda_f(dt).$$

Случайный вектор — это любой вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, состоящий из СВ. По аналогии со случаем одной СВ мы введем моменты и распределение случайного вектора (совместное распределение СВ). В этом случае $Mf(\xi) = \int\limits_{Q_p^n} f(x)P_\xi(dx)$.

Случайные величины независимы, если их совместное распределение имеет вид: $P_\xi = P_{\xi_1} \times \ldots \times P_{\xi_n}$.

Характеристическая функция случайного вектора

$$\varphi_\xi(t) = Me^{(t,x)} = \int\limits_{Q_p^n} e^{(t,x)}P_\xi(dx)$$

обладает похожими свойствами, в частности

$$M_{\xi_1}^{k_1} \cdots {}_{\xi_n}^{k_n} = \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial t_1^{k_1}\ldots\partial t_n^{k_n}}\varphi_\xi(0).$$

Более того, так как $\varphi_\xi(0) = 1$ и функция $\varphi_\xi(t) \in A_0(Q_p^n)$, мы можем ввести камулянты случайного вектора ξ, которые связаны со смешанными моментами обычными формулами (эти формулы носят чисто алгебраический характер и не зависят от выбора числового поля).

Теорема 1.2. Для того чтобы компоненты случайного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы его характеристическая функция являлась произведением характеристических функций компонент.

Доказательство. Продемонстрируем, как метод характеристических функций может использоваться в нашей теории. Докажем достаточность. Если функция $f(x) = f_1(x_1)\cdot\ldots\cdot f_n(x_n)$, то по свойству 5 характеристической функции (для случайного вектора) получаем

$$Mf(\xi) = \int\limits_{Q_p^n} \varphi_\xi(t)\lambda_f(dt) = \int\limits_{Q_p^n} \varphi_\xi(t)\lambda_{f_1}(dt_1)\ldots\lambda_{fn}(dt_n) =$$

$$= \int\limits_{Q_p} \varphi_{\xi_1}(t_1)\lambda_{f_1}(dt_1)\ldots = \int\limits_{Q_p} \varphi_{\xi_n}(t_n)\lambda_{f_n}(dt_n) = Mf_1(\xi_1)\ldots Mf_n(\xi_n).$$

Мы можем также использовать характеристическую функцию при доказательстве следующего утверждения.

Утверждение 1.1. Распределение суммы независимых случайных величин $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ равно свертке распределений ее членов $P_\xi = P_{\xi_1} * \ldots * P_{\xi_n}$.

Случайный вектор ξ является гауссовским, если его характеристическая функция является квадратичной экспонентой:

$$\varphi_\xi(t) = \exp\left\{\frac{1}{2}(Bt, t) + (m, t)\right\},$$

где $m \in Q_p^n$, B — симметричная матрица. Другими словами, распределение этого случайного вектора является распределением Гаусса на Q_p^n. Как и в обычной теории вероятностей, мы используем символ $N(m, B)$ для обозначения класса распределений Гаусса с параметрами m и B.

Из определения следует, что для случайного вектора Гаусса $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$

$$M\xi(\omega) = m, \quad B_{kl} = \mathrm{cov}(\xi_k, \xi_l).$$

Теорема 1.3. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ является гауссовским тогда и только тогда, когда случайная величина (ξ, λ) является гауссовской для любого вектора λ.

Для доказательства этой теоремы достаточно рассмотреть характеристическую функцию.

Теорема 1.4. Некоррелированность компонент гауссовского вектора эквивалентна их независимости.

Мы опять должны использовать характеристическую функцию.

Заметим, что многие важные свойства гауссовских случайных величин имеют место и в p-адическом случае. Однако о многих других ничего не известно.

Остаются открытыми следующие вопросы.

1. Выполняется ли центральная предельная теорема в p-адическом случае?

2. Существует ли p-адический вариант теоремы Леви–Крамера?

Пусть ξ, η независимые случайные величины. Если их сумма $\xi + \eta$ является гауссовской случайной величиной, то ξ и η гауссовские.

3. Сохраняются ли свойства гауссовских случайных величин, основанные на линейных комбинациях, в p-адическом случае? (см., например, монографию Хиды [35].)

Определение 1.4 (аналог равномерного распределения). СВ ξ называется СВ Волкенборна, если P_ξ является распределением Волкенборна.

§ 7.2. Распределения вероятностей на пространствах p-адических последовательностей

Рассмотрим вероятностные пространства, построенные с помощью бесконечных произведений одномерных распределений вероятностей. Здесь пространством выборок является множество: $Q_p^\infty = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)\colon x_l \in Q_p$.

Пусть Λ — множество всех мульти-индексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ таких, что $\alpha_j = 0$, за исключением конечного числа j. Положим $i(\alpha) = \max\{m\colon \alpha_m \neq 0\}$ для $\alpha \in \Lambda$. Всюду далее ряды $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda} a_\alpha$ рассматриваются как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n;i(\alpha)=1}^{\infty} a_\alpha.$$

Обозначим через $P_c \equiv P(Q_p^\infty, Q_p)$ пространство цилиндрических многочленов $q\colon Q_p^\infty \to Q_p$,

$$q(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant N} \sum_{i(\alpha)\leqslant M} q_\alpha x^\alpha, \quad q_\alpha \in Q_p.$$

Определение 2.1. Линейные функционалы $A\colon P_c \to Q_p$ являются цилиндрическими распределениями Q_p^∞.

Теорема 2.1. Пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность нормированных распределений класса A'. Тогда равенство

$$\int\limits_{Q_p^\infty} q(x)\mu(dx) = \sum q_\alpha \int\limits_{Q_p^{i(\alpha)}} x^\alpha \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_{i(\alpha)}(dx)$$

определяет цилиндрическое распределение.

Обозначим такое цилиндрическое распределение через $\prod \mu_j$. Естественно, класс цилиндрических функций конечного аргумента P_c очень ограничен. И возникает вопрос, как продолжить цилиндрические распределения на более широкие пространства?

Рассмотрим пространство формальных степенных рядов $A_f \equiv \equiv A_f(Q_p^\infty, Q_p)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n; i(\alpha)=1}^{\infty} f_\alpha x^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} f_{(n)}(x). \tag{2.1}$$

Продолжим цилиндрическое распределение μ с P_c на некоторое подпространство A_f с помощью равенства

$$\int_{Q_p^\infty} f(x)\mu(dx) = \sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha \int_{Q_p^{i(\alpha)}} x^\alpha \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_{i(\alpha)}(dx). \tag{2.2}$$

Используем символ U_R^∞, $R = (R_1, \ldots, R_n, \ldots)$, $R_j \in \Gamma_{Q_p}$, для обозначения «шара» $\left\{x \in Q_p^\infty \colon |x_j|_p \leqslant R_j\right\} = U_{R_1} \times \ldots \times U_{R_n} \times \ldots$ Конечно, не существует топологии, порожденной этими шарами.

Обозначим символом $A(U_R^\infty, Q_p)$ подпространство $A_f(Q_p^\infty, Q_p)$, состоящее из таких функций $f(x)$, что степенной ряд (2.1) сходится в следующем смысле:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in U_R^\infty} \left|f_{(n)}(x)\right|_p = 0.$$

Такие функции называются аналитическими на «шаре» U_R^∞.

Теорема 2.2. Пространство $A(U_R^\infty, Q_p)$ совпадает с подпространством $A_f(Q_p^\infty, Q_p)$, состоящим из всех функций f, удовлетворяющих условиям:

1. $\lim\limits_{|\alpha|=n; i(\alpha)\to\infty} |f_\alpha|_p R^\alpha = 0$ для всех натуральных n;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{|\alpha|=n; i(\alpha)\to\infty} |f_\alpha|_p R^\alpha = 0$.

Доказательство.

А. Пусть $f \in A_f$ удовлетворяет условиям 1 и 2. Тогда $\lim\limits_{|\alpha|=n; i(\alpha)\to\infty} |f_\alpha x^\alpha|_p = 0$ для всех $x \in Q_p^\infty$. Таким образом, ряд

$$f_{(n)}(x) = \sum_{|\alpha|=n; i(\alpha)=1}^{\infty} f_\alpha x^\alpha$$

сходится на U_R^∞. Далее,

$$\sup_{x\in U_R^\infty} \left|f_{(n)}(x)\right|_p \leqslant \sup_{x\in U_R^\infty} \max_{|\alpha|=n; i(\alpha)} |f_\alpha x^\alpha|_p \to 0, \quad n\to\infty.$$

Б. Пусть теперь $f \in A(U_R^\infty, Q_p)$. Ряд $f_{(n)}(x)$ сходится для любых $x \in U_R^\infty$. Так как $R_j \in \Gamma_{Q_p}$, то существуют такие $a_{R_j} \in Q_p$, что $\left|a_{R_j}\right|_p = R_j$. Пусть $x_R = \left(a_{R_j}\right)_{j=1}^{\infty}$, тогда $x_R \in U_R^\infty$ и $\lim\limits_{|\alpha|=n; i(\alpha)\to\infty} |f_\alpha|_p R^\alpha = 0$. Таким образом, мы доказали 1. Используя это условие, получаем, в частности, что

$$\max_{|\alpha|=n;i(\alpha)} |f_\alpha|_p R^\alpha = \left|f_{\beta(n)}\right|_p R^{\beta(n)} < \infty$$

для любых n.

Введем конечные векторы $x(n) = x(R, \beta(n))$: $x(n)_j = 0$ при $\beta(n)_j = 0$ и $x(n)_j = a_{R_j}$ при $\beta(n)_j \neq 0$. Тогда

$$\left|f_{\beta(n)}\right|_p R^{\beta(n)} = \left|f_{(n)} x(n)\right|_p \leqslant \sup_{x \in U_R^\infty} \left|f_{(n)} x(n)\right|_p \to 0, \quad n \to \infty.$$

А это и есть второе условие.

Введем на пространстве $A(U_R^\infty, Q_p)$ неархимедову норму $\|f\|_R = \max_{\alpha \in \Lambda} |f_\alpha|_p R^\alpha$.

Утверждение 2.1. Пространство $A(U_R^\infty, Q_p)$ является неархимедовой банаховой алгеброй.

Доказательство основывается на прямых вычислениях для степенных рядов.

Теорема 2.3. Пусть $\{\mu_n\}$ — последовательность нормированных распределений класса A' и $\mu_n \in A'_{R_n}$ и $\lambda = \sup\limits_n \|\mu_n\|_{R_n} \leqslant 1$. Тогда цилиндрическое распределение $\mu = \prod \mu_n$ может быть продолжено до ограниченного линейного функционала на пространстве $A(U_R^\infty, Q_p)$, $R = (R_1, R_2, \ldots)$.

Доказательство. Покажем, что (2.2) определяет ограниченный линейный функционал на $A(U_R^\infty, Q_p)$. Рассмотрим ряд

$$I_{(k)} = \sum_{|\alpha|=k;i(\alpha)=1}^{\infty} f_\alpha \int\limits_{Q_p^{i(\alpha)}} x^\alpha \mu(dx).$$

Получаем

$$\left| f_\alpha \int\limits_{Q_p} x_1^{\alpha_1} \mu_1(dx_1) \ldots \int\limits_{Q_p} x_{i(\alpha)}^{\alpha_{i(\alpha)}} \mu_{i(\alpha)}(dx_{i(\alpha)}) \right|_p \leqslant |f_\alpha|_p R^\alpha \to 0, \quad i(\alpha) \to \infty.$$

Значит, все эти ряды сходятся, и $\left|I_{(k)}\right|_p \leqslant \max\limits_{|\alpha|=k} |f_\alpha|_p R^\alpha$. Следовательно, ряд (2.2) сходится, и мы получаем неравенство

$$\left| \int f(x) \mu(dx) \right|_p \leqslant \|f\|_R.$$

Теорема 2.4. Пусть функция f принадлежит пространству $A(Q_p, Q_p)$, а функция g принадлежит $A(U_R^\infty, Q_p)$. Тогда композиция $\phi = f \circ g$ принадлежит пространству $A(U_R^\infty, Q_p)$.

Доказательство. Доказательство представляет собой длинную серию преобразований степенных рядов. Формально:

$$\phi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|\gamma|=m;i_\gamma=1}^{\infty} \left[\sum_n f_n \sum_{\alpha^1+\ldots+\alpha^n=\gamma} g_{\alpha^1}\cdots g_{\alpha^n}\right] x^\gamma. \qquad (2.3)$$

Сначала покажем, что коэффициенты $\phi_\gamma(x^\gamma)$ корректно определены:

$$|\phi_\gamma|_p \leqslant |f_n|_p \|g\|_R^{-\gamma} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Далее покажем, что функции $\phi_n(x)$ корректно определены:

$$|\phi_\gamma|_p R^\gamma \leqslant \max_n |f_n|_p \max_{\alpha^1+\ldots+\alpha^n=\gamma} \prod_{j=1}^n |g_{\alpha^j}|_p R^{\alpha_j}.$$

Выберем такое N_ε, что если $i_\gamma \geqslant N_\varepsilon$, то $|g_\gamma|_p R^\gamma < \varepsilon$ для $|\gamma|=m$. Тогда $\left|g_{\alpha_j}\right|_p R^{\alpha_j} < \varepsilon$ и $|\phi_\gamma|_p R^\gamma \leqslant \varepsilon \|f\|_{\|g\|_R} \|g\|_R^{-1}$.

Чтобы завершить доказательство, нам нужно показать сходимость (2.3). Первый шаг в этом направлении состоит в следующем: $\forall\varepsilon > 0 \exists M_\varepsilon$: $\forall i_\gamma \geqslant M_\varepsilon$: $|g_\gamma|_p R^\gamma < \varepsilon$ для всех m. Действительно, $\forall\varepsilon > 0\exists m_\varepsilon$: $\forall m \geqslant m_\varepsilon$: $\max\limits_{|\gamma|=m} |g_\gamma|_p R^\gamma \leqslant \varepsilon$ и для всех m, $0 \leqslant m_\varepsilon < m_\varepsilon$, существует $N_{m\varepsilon}$: $\forall i_\gamma \geqslant N_{m\varepsilon}$, $|\gamma| = m$, $|g_\gamma|_p R^\gamma < \varepsilon$. И выберем $M_\varepsilon = \max\limits_m N_{m\varepsilon} \leqslant \varepsilon$.

Теперь нам нужно оценить выражение

$$\Delta_m = \max_{|\gamma|=m;i_\gamma<\infty} \max_n |f_n|_p \max_{\alpha^1+\ldots+\alpha^n=\gamma} \prod_{j=1}^n |g_{\alpha^j}|_p R^{\alpha_j} =$$

$$= \max\,[\Delta_m(M_\varepsilon), \Delta'_m(M_\varepsilon)],$$

где

$$\Delta_m(M_\varepsilon) = \max_{|\gamma|=m;i_\gamma<M_\varepsilon}[\ldots]; \quad \Delta'_m(M_\varepsilon) = \max_{|\gamma|=m;i_\gamma>M_\varepsilon}[\ldots].$$

Если $i_\gamma > M_\varepsilon$, то существует такое j, $1 \leqslant j \leqslant n$, что $i_{\alpha^j} > M_\varepsilon$. Следовательно,

$$\Delta'_m(M_\varepsilon) \leqslant \max_n |f_n|_p \|g\|_R^{n-1} \leqslant \varepsilon \|f\|_{\|g\|_R} \|g\|_R^{-1} \to 0.$$

Так как $f \in A(Q_p, Q_p)$, то $\forall\varepsilon > 0\exists n_\varepsilon$: $\forall n \geqslant n_\varepsilon : |f_n|_p \|g\|_R^n < \varepsilon$. Поэтому

$$\Delta_m(M_\varepsilon) \leqslant \max_{|\gamma|=k} \max(\varepsilon, \max_{n\leqslant n_\varepsilon} |f_n|_p \max_{\alpha^1+\ldots+\alpha^n=\gamma, i_\gamma\leqslant M_\varepsilon} \prod_{j=1}^n |g_{\alpha^j}|_p R^{\alpha_j}).$$

Таким же образом мы можем доказать, что для малых ε

$$\Delta_m(M_\varepsilon) \leqslant \varepsilon \max(1, \|f\|_{\|g\|_R} \|g\|_R^{-1}).$$

Теорема 2.5. Пусть функционал ν принадлежит пространству $A'(U_R^\infty, Q_p)$, а функция g принадлежит $A(U_R^\infty, Q_p)$. Тогда функционал ν_g: $A(Q_p, Q_p) \to Q_p$, $\nu_g(f) = \nu(f \circ g)$ принадлежит пространству $A'(Q_p, Q_p)$.

Доказательство. Из предыдущей теоремы получаем, что функционал ν_g определен на пространстве $A(Q_p, Q_p)$. Далее,

$$|\nu_g(f)|_p \leqslant \max_n |f_n|_p |\nu(g^n)|_p \leqslant \|\nu\| \max_n |f_n|_p \|g^n\|_R \leqslant \|\nu\| \max_n |f_n|_p \|g\|_R^n.$$

Пусть P — нормированный ограниченный линейный функционал на функциональном пространстве $A(U_R^\infty, Q_p)$. Тогда тройка $(U_R^\infty, A(U_R^\infty, Q_p), P)$ является обобщенным вероятностным пространством (p-адическизначной теории вероятностей). В частности, это справедливо для распределений типа $P = \prod P_j$, где P_j — распределения вероятностей на Q_p, удовлетворяющие условиям теоремы 2.3.

Пример 2.1 (вероятностное пространство Волкенборна). Так как коэффициенты Бернулли B_n удовлетворяют неравенству $|B_n|_p \leqslant p$, то мы получаем следующую оценку:

$$\left| \int x^n dx \right|_p \leqslant p$$

и $|(dx, f)|_p \leqslant \|f\|_p$ для $f \in A$. Таким образом, $\|dx\|_p \leqslant 1$. Если выбрать $\mu_n = dx$ и $R_n = p$ для всех n, то выполняются условия теоремы 2.3. Поэтому $(U_P^\infty, A(U_R^\infty, Q_p), P = \prod\limits_{i=1}^{\infty} dx)$ — это вероятностное пространство. Пусть $\xi_n(\omega) = \omega_n$ для $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots) \in U_R^\infty$. Это бесконечная последовательность независимых СВ Волкенборна.

Пример 2.2 (вероятностное пространство Гаусса). Пусть $\{\gamma_{0,b_n}\}_{n=1}^\infty$ — это последовательность гауссовских распределений с нулевым математическим ожиданием и ковариациями b_n. Используя оценку гауссовских моментов

$$\left| \int x^{2n} \gamma_{0,b}(dx) \right|_p = |b^n (2n-1)!!|_p \leqslant |b|_p^n,$$

получаем, что выполняются условия теоремы 2.3 для $R_n \geqslant |b_n|_n^{1/2}$ и $\mu_n = \gamma_{b_n}$. Таким образом, $(U_P^\infty, A(U_R^\infty, Q_p), P = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \gamma_{b_n})$ — это вероятностное пространство. Пусть $\xi_n(\omega) = \omega_n$. Это бесконечная последовательность независимых гауссовских СВ с законами $N(0, b_n)$.

§ 7.3. Предельная теорема

Здесь нам потребуются некоторые результаты, касающиеся аналитических функций в p-адическом случае. Рассмотрим аналитические функции на C_p. Мы будем одновременно использовать шары в C_p и в Q_p. Поэтому нам необходимы различные символы для обозначения этих шаров. Символом W_R обозначим шар в C_p, а символом U_R — шар в Q_p. В первом случае радиус R принадлежит множеству $\Gamma_{C_p} = \{g = p^t\colon t \in Q\}$, а во втором R принадлежит множеству $\Gamma_{Q_p} = \{g = p^t\colon t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

По определению функция $f\colon W_R \to C_p$ является аналитической, если $\lim\limits_{n\to\infty} |f|_p R^n = 0$ (мы используем один и тот же символ $|\cdot|_p$ для обозначения абсолютного значения на Q_p и на C_p). Пространство $A(W_R, C_p)$ аналитических функций наделено нормой $\|f\|_R = \max\limits_n |f|_p R^n$ (см. гл. 2). Введем на этом пространстве другую норму:

$$|||f|||_R = \sup_{z\in W_R} |f(z)|_p.$$

Она также является неархимедовой на $A(W_R, C_p)$.

Будем пользоваться следующей теоремой (см., например, [106]):

Для всех $f \in A(W_R, C_p)$ и $R \in \Gamma_{C_p}$ справедливо равенство $\|f\|_R = |||f|||_R$.

Основной факт, который используется для доказательства этой теоремы, — это то, что поле C_p не является локально компактным. Например, данная теорема не выполняется для Q_p.

Произвольная функция $f \in A(U_R, Q_p)$ может быть продолжена до функции $f \in A(W_R, C_p)$ (будем использовать один и тот же символ для этих функций). Следовательно, получаем: $\|f\|_R = \sup\limits_{z\in W_R} |f(z)|_p$, $R \in \Gamma_{Q_p}$, для любой функции $f \in A(U_R, Q_p)$.

Т е о р е м а 3.1. Пусть $\{\xi_{nk}(\omega)\}_{k=1}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, — последовательность независимых СВ, удовлетворяющих условию: существует последовательность действительных чисел $\{a_{nk}\}_{k=1}^n$, $n = 1, 2, \ldots$, которая равномерно стремится к нулю при $n \to \infty$ относительно k. И выполняется неравенство

$$|m_{\xi_{nk}}(j)|_p \leqslant (a_{nk})^j, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

Тогда последовательность СВ $S_n = \sum\limits_{k=1}^n \xi_{nk}$ сходится относительно по распределению к СВ $\xi(\omega)$ с распределением вероятностей δ, где δ — мера Дирака, сконцентрированная в $\{0\}$.

Доказательство. Распределение СВ S_n равно свертке $P_\xi = P_{\xi_{n1}} * \ldots * P_{\xi_{nn}}$. Рассмотрим характеристические функции

$$\varphi_{\xi_{nk}}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} M_{\xi_{nk}}(j).$$

Зафиксируем $R \in \Gamma_{Q_p}$. Используя неравенство (3.1), получаем, что

$$\lim_{j\to\infty} R^j \left| \frac{m_{\xi_{nk}}(j)}{j!} \right|_p = 0$$

начиная с некоторого n. Таким образом, все функции $\varphi_{\xi_{nk}}(t)$ принадлежат $A(U_R, Q_p)$ начиная с некоторого n. Значит, характеристическая функция $\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_{nk}}(t)$ принадлежит $A(U_R, Q_p)$. В соответствии с замечанием, сделанным перед данной теоремой, мы можем продолжить характеристические функции $\varphi_{\xi_{nk}}(t)$ и $\varphi_{S_n}(t)$ до аналитических функций на шаре W_R.

Далее, $\varphi_{\xi_{nk}}(z) = 1 + A_{nk}(z)$. Покажем, что $A_{nk} \to 0$, $n \to \infty$ равномерно относительно k в пространстве $A(W_R, C_p)$:

$$|||A_{nk}|||_R = \sup_{z\in W_R} |A_{nk}(z)|_p \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{z\in W_R} \max_{1\leqslant j<\infty} |z|_p^j p^{j/(p-1)} |m_{\xi_{nk}}(j)|_p \leqslant \left(Rp^{1/(p-1)} a_{nk}\right)^j.$$

Из (3.1) получаем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$: $\forall n \geqslant N_\varepsilon$: $a_{nk}. \leqslant \varepsilon / Rp^{1/(p-1)}$. Следовательно, $|||A_{nk}|||_R \leqslant \varepsilon$.

Далее, $\varphi_{S_n}(z) = 1 + L_n(z)$. Получаем

$$|||L|||_R = \left|\left|\left| \sum_{k=1}^{n} A_{nk} + \sum_{k\neq l} A_{nk} A_{nl} + \ldots \right|\right|\right|_R \leqslant$$
$$\leqslant \max\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |||A_{nk}|||_R, \max_{1\leqslant k\neq l\leqslant n} |||A_{nk}|||_R |||A_{nl}|||_R, \ldots \right) \leqslant \varepsilon$$

при $n \geqslant N_\varepsilon$. Таким образом, $|||L_n|||_R \to 0$, $n \to \infty$. И, в частности, $L_n \to 0$ в пространстве $A(U_R, Q_p)$. Для завершения доказательства используем теорему 3.1.

Теорема 3.2. Пусть $\{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность независимых равномерно распределенных СВ с нулевым математическим ожиданием, а $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность p-адических чисел и $|c_n|_p \to \infty$. Тогда СВ $T_n = S_n / c_n \to \xi(D)$, где $P_\xi = \delta$.

Доказательство. Так как $P_{\xi_k} \in A'$, то $|m_{\xi_n}(j)|_p \leqslant c^j$. Следовательно,

$$\left|m_{(\xi_k/c_n)}(j)\right|_p \leqslant \left(c/|c|_p\right)^j \to 0, \quad n \to \infty.$$

В частности, $\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{p^{-n}} \to \xi(D)$.

§ 7.4. Сходимость ряда независимых случайных величин

Теорема 4.1. Пусть $\{\xi_n(\omega)\}$ — последовательность независимых СВ, удовлетворяющих условию: существует последовательность $\{a_n\}$, $a_n \in R_+$, такая, что $|m_{\xi_n}(j)|_p \leqslant a_n^j$ и $a_n \to 0$, $n \to \infty$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится по распределению.

Доказательство. Рассмотрим суммы $S_n(\omega) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_k(\omega)$ и их характеристические функции $\varphi_{S_n}(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k}(t)$. Используя оценку для моментов, получаем, что функции $\varphi_{\xi_n}(t)$ являются аналитическими на U_ρ, $\rho \in \Gamma_{Q_p}$, начиная с некоторого $n = n_\rho$. Следовательно, существует такой шар U_R, что все $\varphi_{\xi_n}(t) \in A(U_R, Q_p)$. Таким образом, φ_{ξ_n}, φ_{S_n} продолжаются до функций класса $A(W_R, C_p)$. Этого достаточно, чтобы показать: $|||\varphi_{S_m} - \varphi_{S_k}|||_R \to 0$.

Используя доказательство теоремы 3.1, получаем: $\varphi_{\xi_n}(z) = 1 + A_n(z)$, где $|||A|||_R \to 0$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon$: $|||A|||_R < \varepsilon$. В частности, последовательность $\{\varphi_{S_n}\}$ ограничена. Действительно, пусть $c = 1 + \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant N_1} |||A|||_R$. Тогда

$$|||\varphi_{S_m}|||_R \leqslant \max\Bigl(1, \max_{1 \leqslant n \leqslant m} |||A_n|||_R, \max_{1 \leqslant i \neq j \leqslant m} |||A_i|||_R |||A_j|||_R, \ldots,$$
$$\max_{1 \leqslant i_1 \neq \ldots \neq i_k \leqslant m} |||A_{i_1}|||_R \cdots |||A_{i_k}|||_R, \ldots\Bigr).$$

Каждое произведение ограничено константой c^{N_1}.

Далее,

$$\alpha_{mk} \leqslant |||\varphi_{S_k}|||_R \left|\left|\left| \prod_{n=k+1}^{m} \varphi_{\xi_k} - 1 \right|\right|\right|_R$$

для $m \geqslant k$. И в завершение доказательства выберем $k, m \geqslant N_{\varepsilon/c^{N_1}}$.

Пример 4.1. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых дискретных СВ, ξ_n принимает значения $u_{n1}, \ldots, u_{nN_n} \in Q_p$ с вероятностями $P_{n1}, \ldots, P_{nN_n} \in Q_p$, $\sum\limits_{j=1}^{N_n} P_{nj} = 1$. Если

$$T_{nj} = \max_{1 \leqslant k \leqslant N_n} \left| u_{nk}^j P_{nk} \right|_p \leqslant A_n^j$$

при $a_n \to 0$, то ряд из этих СВ сходится по распределению.

Например, пусть $\eta_n = A, B \in Q_p$ с вероятностями $a, b \in Q_p$, $a + b = 1$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \eta_n$ сходится в Q_p. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\eta_n$ сходится в Q_p для всех p.

Пусть $\xi_n = p^{2n}, p^{3n}$ с вероятностями $a_n = 1/p^n$, $b_n = 1 - a_n$. Тогда $T_{nj} \leqslant (p^{-2n+1})^j$.

Пусть $\xi_n = 1, 0$ с вероятностями $a_n + 1/p^n$, $b_n = 1 - a_n$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ расходится. Действительно, если $S_n \to S(D)$, то, в частности, $MS_n \to MS$. Значит, $M\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p^{-n}$. Но этот ряд расходится в Q_p.

Из примера для η_n получаем: $M \sum\limits_{n=0}^{\infty} p^n \eta_n = \dfrac{Aa + Bb}{1 - p}$. Аналогично, пусть $\eta_n = 0, 1$ с вероятностями $1/2$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2(n+1)!\eta_n$ сходится по распределению и $M\eta = 1$. Ряд $\eta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^5(n+1)!\eta_n$ также сходится и $M\eta = 13$.

Теорема 4.2. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых СВ, $\{\xi_n\} \sim N(a_n, b_n)$, где $a_n, b_n \in Q_p$. Тогда ряд $\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится по распределению тогда и только тогда, когда ряды $a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $b = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Суммой является гауссовской СВ $\xi \sim N(a, b)$.

Доказательство.

1. Пусть ряды $a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $b = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Введем СВ $\eta_n = \xi_n - a_n$. Достаточно показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \eta_n$ сходится. Используем неравенство $|m_{\eta_n}(j)|_p \leqslant |b_n|_p^j$ и то, что $|b_n|_p \to 0$. Таким образом, ряд сходится. Чтобы показать, что ξ является гауссовской СВ, достаточно вычислить ее характеристическую функцию.

2. Пусть теперь ряд $\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится. Тогда $S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \to \xi(D)$ и $MS_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \to M\xi$. Далее, мы видим, что из условия $S_n \to \xi(D)$ следует, что $MS_n^2 \to M\xi^2$.

§ 7.5. *P*-адический белый шум. Аналог исчисления Хиды

Гауссовские распределения на пространствах бесконечной размерности играют важную роль в современной теории вероятностей и математической физике. Распределение белого шума [34] занимает особое место среди гауссовских распределений. С одной стороны, это распределение имеет очень простую структуру (единичный ковариационный оператор в гильбертовом пространстве), а с другой — распределение белого шума встречается во многих физических проблемах [35]; см. также [36] об интегралах Фейнмана. Основы теории неархимедового белого шума были представлены в докладе [60].

Нетрудно ввести p-адическизначное распределение белого шума на основе ранее рассмотренной аксиоматики как бесконечное произведение гауссовских распределений класса $N(0,1)$ на Q_p. Но было бы интереснее рассмотреть белый шум на основе L_2-теории. Это было бы более похоже на вещественный случай. И мы смогли бы получить p-адический аналог теории Хиды функционалов от белого шума в L_2-представлении. Начнем построение распределения p-адического белого шума по стандартной схеме [34]. На первом шаге определим распределение p-адического белого шума на основе нашей теории гауссовских распределений на пространствах бесконечной размерности, используя определение с помощью преобразования Лапласа.

7.5.1. Квадратично интегрируемые функционалы белого шума. Пусть $K = Q_p$. Введем пространства p-адических последовательностей:

$$S_k = \left\{ f = (f_n) \in Q_p^{\infty} : \lim_{n\to\infty} |f_n|_p p^{kn} = 0 \right\},$$

$$\|f\|_k = \max_n |f_n|_p p^{kn}, \quad k = 0, \pm 1, \ldots;$$

$$S_{\infty} = \lim_{k\to\infty} \operatorname{proj} S_k = \left\{ f \in Q_p^{\infty} : \lim_{n\to\infty} |f_n|_p p^{kn} = 0, k = 1, 2, \ldots \right\};$$

$$S_{-\infty} = \lim_{k\to-\infty} \operatorname{ind} S_k = \left\{ f \in Q_p^{\infty} : \exists k = -1, -2, \ldots : \lim_{n\to\infty} |f_n|_p p^{kn} = 0 \right\}.$$

Пространство S_{∞} — это неархимедово пространство Фреше, а $S_{-\infty}$ — это полное неархимедово локально выпуклое пространство.

Выполняется равенство $S'_\infty = S_{-\infty}$. Можно рассмотреть оснащенное гильбертово пространство $S_\infty \subset H \subset S_{-\infty}$, $H \equiv H_{(1)}$. Также как и в гл. 3, для пространств $A(Q_p^n)$, $A'(Q_p^n)$ мы вводим функциональные пространства $A_0(S_\infty)$ и $A(S_{-\infty})$ и пространства распределений $A'_0(S_\infty)$ и $A'(S_{-\infty})$ и определим преобразование Лапласа для распределений $\mu \in A'_0(S_\infty)$. Преобразование Лапласа L: $A'_0(S_\infty) \to A(S_{-\infty})$ — изоморфизм.

Определение 5.1. P-адическим белым шумом называется распределение $W \in A'(S_{-\infty})$ с преобразованием Лапласа

$$L'(W)(f) = \exp\left\{\frac{1}{2}(f,f)\right\}, \quad (f,f) \equiv (f,f)_\lambda, \quad \lambda = (1).$$

Рассмотрим систему полиномов Эрмита, связанную с распределением p-адического белого шума:

$$h_n(t) = (-1)^n e^{t^2/2}\frac{d^n}{dt^n}e^{-t^2/2}, \quad h_\alpha(f) = h_{\alpha_1}(f_1)\dots h_{\alpha_n}(f_n)\dots,$$

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j < \infty.$$

На пространстве $A(S_{-\infty})$ рассмотрим скалярное произведение

$$(F,G) = \int F(f)\bar{G}(f)W(df).$$

Полиномы Эрмита ортогональны относительно скалярного произведения и $|h_\alpha|^2 = \alpha!$. Также как в гл. 2, нельзя нормировать эти полиномы. Полиномы Эрмита задают базис в пространстве Фреше $A(S_{-\infty})$: $F(f) = \sum\limits_\alpha \tilde{F}_\alpha h_\alpha(f)$. На этом пространстве мы введем непрерывную неархимедову норму $\|F\| = \max\limits_\alpha \left|\tilde{F}_\alpha\right|_p \sqrt{|\alpha!|_p}$. Пополнение пространства $A(S_{-\infty})$ относительно этой нормы (см. гл. 3) является пространством функционалов белого шума. Они являются квадратично интегрируемыми. Пространство функционалов обозначается $L_2(S_{-\infty}, W)$. Это неархимедово гильбертово пространство типа $\lambda = (\alpha!)$.

Пусть $\Omega = S_{-\infty}$, $P = W$. Вместо алгебры аналитических функций рассмотрим пространство $L_2(S_{-\infty}, W)$ в качестве пространства СВ. Использование L_2-теории позволяет существенно расширить пространство СВ (правда, в одном весьма специальном случае).

По аналогии с теорией Хиды функционалов от белого шума, L_2-СВ могут быть рассмотрены как квадратично интегрируемые *функционалы белого шума*. Так как в рамках предлагаемой модели белого шума мы не определяем никаких других СВ, то будем использовать термин «случайные величины».

Как обычно, введем математическое ожидание и моменты случайной величины.

Если линейный функционал P_ξ: $f \to Mf(\xi)$ определен и непрерывен на пространстве Фреше $A(Q_p)$, то он называется распределением СВ ξ. В этом случае

$$Mf(\xi) = \int_{Q_p} f(x) P_\xi(dx).$$

Таким образом, возникает специальная вероятностная модель, несколько отличная от моделей, описываемых общей аксиоматикой обобщенных вероятностных пространств.

Теорема 5.1. СВ ξ обладает распределением тогда и только тогда, когда ξ имеет моменты всех порядков, которые растут не быстрее, чем

$$|M\xi^n|_p \leqslant Cr^n, \quad C = C_\xi, \quad r = r_\xi.$$

Чтобы доказать эту теорему, достаточно заметить, что

$$Mf(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} M\xi^n,$$

и воспользоваться определением топологии в $A(Q_p)$.

Случайный вектор — это любой вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, состоящий из СВ. Распределение случайного вектора определено тогда и только тогда, когда моменты растут не быстрее r^n.

СВ называются независимыми, если совместное распределение имеет вид $P_\xi = P_{\xi_1} \times \ldots \times P_{\xi_n}$. Таким образом, в формализме белого шума понятие независимости имеет смысл не для всех СВ. Существуют такие СВ, для которых нельзя обсуждать проблему зависимости или независимости.

Пусть ξ — это СВ, имеющая распределение P_ξ. Тогда в некоторой окрестности нуля характеристическая функция СВ определяется таким же образом, как в § 7.1. Теоремы 1.1–1.4 и утверждение 1.4 также справедливы для этого случая.

7.5.2. L_2-сходимость гауссовских рядов и функционалов от белого шума. Отображения $\bar{\xi}_n$: $\Omega \to Q_p$,

$$\bar{\xi}_n(\omega) = (e_n, \omega), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\{e_n\}$ — канонический базис в H, могут служить примерами независимых гауссовских величин, имеющих распределение $N(0, 1)$.

Замечание 5.1. Чтобы получить гауссовскую величину $\xi \sim N(0,1)$, мы можем использовать гауссовскую величину $\eta \sim N(m, \sigma^2)$ для любого числа $\sigma \in Q_p$. Однако, вообще говоря, мы не можем получить гауссовскую СВ $\eta \sim N(m, b)$ даже в случае, когда b — положительное рациональное число.

Теорема 5.2. L_2-предел последовательности $\{\eta_n(\omega)\}$ гауссовской СВ также является гауссовской СВ.

Для доказательства данной теоремы мы должны рассмотреть явное представление СВ как функционалов от белого шума.

Рассмотрим последовательность независимых, одинаково распределенных гауссовских СВ $\xi(\omega) \sim N(0,1)$. Для L_2-сходимости мы получаем аналог теоремы 4.2.

Теорема 5.3. Пусть последовательность p-адических чисел $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n(\omega)$ сходится к гауссовской случайной величине

$$\eta(\omega) \sim N\left(0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right).$$

Например, следующие ряды независимых стандартных гауссовских СВ сходятся над полем p-адических чисел:

$$\eta(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} \xi_n(\omega) \sim N\left(0, \frac{1}{1-p^2}\right);$$

$$\eta(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} n! \xi_n(\omega) \sim N\left(0, \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^2\right).$$

Теорема 5.4. Пусть последовательность p-адических чисел $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Тогда ряд $\eta(\omega) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(\xi_n^2(\omega) - 1)$ сходится.

Например, ряд

$$\eta(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} n!(\xi_n^2(\omega) - 1)$$

сходится.

В обычной теории вероятностей, рассмотренные выше ряды могут быть реализованы на математическом уровне строгости в рамках исчисления Хиды как обобщенные функционалы от броуновского движения. В нашем случае они являются обычными случайными величинами.

7.5.3. Обобщенные функционалы от белого шума. Теория p-адическизначных обобщенных функционалов белого шума была разработана в [60]. Существует возможность реализовать в виде p-адическизначных обобщенных функционалов белого шума такие формальные ряды полиномов Эрмита с рациональными коэффициентами, которые невозможно корректно определить как распределения Хиды в вещественном случае.

Рассмотрим оснащенное гильбертово пространство

$$A(S_{-\infty}) \subset L_2(S_{-\infty}, W) \subset L_2'(S_{-\infty}, W) \subset A'(S_{-\infty}).$$

Функции $G(\omega) \in L_2'(S_{-\infty}, W)$ называются L_2-обобщенными функционалами от белого шума, а функции $G(\omega) \in A'(S_{-\infty})$ — обобщенными функционалами от белого шума.

Мы можем привести большое количество примеров p-адическизначных функционалов от белого шума, которые в вещественной теории не могут быть реализованы как функционалы Хиды (все коэффициенты являются рациональными числами и формальные представления инвариантны относительно числового поля).

Например, пусть $p = 2$ и

$$G(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n!}}{n! h_n(\omega_n)}.$$

Этот ряд не сходится в $L_2(S_{-\infty}, W)$ и даже в $L_2'(S_{-\infty}, W)$. Но он сходится в $A'(S_{-\infty})$, и $G(\omega)$ — корректно определенный p-адическизначный обобщенный функционал от белого шума. Если мы рассмотрим этот ряд как ряд обычных действительных функционалов от белого шума, то он будет расходиться в смысле теории распределений Хиды.

Таким образом, мы можем рассматривать p-адическизначный формализм белого шума как возможность регуляризовать расходящиеся стохастические выражения (с рациональными коэффициентами), возникающие в обычной действительной теории вероятностей, основанной на аксиоматике Колмогорова. Предыдущий пример был приведен для того, чтобы проиллюстрировать ситуацию на основе «настоящего» обобщенного функционала от белого шума. Но мы можем привести примеры p-адических L_2-функционалов, которые имеют расходящуюся вещественную реализацию (в смысле теории распределений Хиды). Например,

$$G(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} n!^{n!} h_n(\omega_n).$$

Эта функция является L_2-функционалом от белого шума для всех p.

Конечно, наша регуляризация может быть применена только к очень специальному (но достаточно широкому) классу рядов по полиномам Эрмита.

7.5.4. Стохастический процесс на основе белого шума. Пусть T — подмножество поля Q_p. Множество СВ $X = \{\xi_t\}$, $t \in T$, называется стохастическим процессом с p-адическим интервалом времени T. Отметим, что в нашем формализме

$$X : T \to L_2(S_{-\infty}, W(df)), \tag{5.1}$$

т. е. для любого $t \in T$ случайная величина $\xi_t(\omega)$ является квадратично интегрируемым функционалом p-адического белого шума.

Стохастический процесс X называется процессом с непрерывными (в смысле среднего квадратичного) траекториями, если отображение (5.1) непрерывно.

Теорема 5.5. Пусть $T = Z_p$. Тогда любой стохастический процесс $X = \{\xi_t\}_{t \in T}$ с непрерывными траекториями единственным образом определяется его значениями в моменты времени $t = 0, 1, 2, \ldots$, т. е. случайные величины $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ единственным образом определяют стохастический процесс.

Чтобы доказать эту теорему, достаточно заметить, что множество натуральных чисел всюду плотно в кольце p-адических целых чисел.

Следующий процесс является простым примером процесса с непрерывными траекториями (в смысле среднего квадратичного) и с интервалом p-адического времени $T = Z_p$.

Предположим, что последовательность $\xi_n(\omega)$ состоит из независимых гауссовских СВ с распределением $N(0,1)$. Заметим, что любое $t \in Z_p$ можно представить в виде ряда:

$$t = t_0 + t_1 p + \ldots + t_j p^j + \ldots,$$

где $t_j = 0, 1, \ldots, p-1$. Пусть

$$\eta_t(\omega) = t_0 \xi_0(\omega) + t_1 p \xi_1(\omega) + t_2 p^2 \xi_2(\omega) + \ldots$$

По теореме 5.3 этот ряд сходится в смысле среднего квадратичного для $t \in Z_p$ к случайной величине Гаусса:

$$\eta(\omega) \sim N\left(0, \sum_{j=1}^{\infty} t_j^2 p^{2j}\right).$$

Покажем, что стохастический процесс $\eta_t(\omega)$ непрерывен в смысле среднего квадратичного. Заметим, что

$$\|\eta_t - \eta_s\|_2 = \max_{0 \leqslant j < \infty} |t_j - s_j|_p p^{-j}.$$

Пусть $|t - s|_p < p^{-k}$. Тогда $t_j = s_j$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, т. е. $\|\eta_t - \eta_s\|_2 \leqslant p^{-k} \to 0$, $k \to \infty$. Таким образом, $X = \{\eta_t(\omega)\}$ — это гауссовский стохастический процесс с траекториями, непрерывными в смысле среднего квадратичного.

Пусть $w(t,\omega)$ — обычный процесс Винера над полем действительных чисел. Тогда $w(t,\omega) \in L_2(\Omega, P(d\omega))$ для любого t. В p-адическом случае это не так. Мы можем использовать различные представления p-адического винеровского процесса. Используем представление Пэли–Винера (см., например, [34, стр. 79]) для процесса Винера $w(t,\omega)$

и рассмотрим это представление в p-адическом случае в качестве одной из реализаций процесса Винера $w(t, \omega)$.

Пусть $\{\xi_k(\omega)\}$ и $\{\eta_k(\omega)\}$ — две независимые последовательности независимых гауссовских случайных величин с нормальным распределением $N(0, 1)$, выбранные из стандартной координатной последовательности $\left\{\bar{\xi}_n(\omega)\right\}$. Рассмотрим ряд гауссовских случайных величин

$$w(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ t\xi_0(\omega) + \sum_{n \neq 0} \frac{\xi_n(\omega) \sin nt + \eta_n(\omega)(\cos nt - 1)}{n} \right\}, \qquad (5.2)$$

где в p-адическом случае $(p \neq 2)$ число π определяется как $\Gamma_p^2(1/2)$, где $\Gamma_p(x)$ — это p-адическая Г-функция Морита (см. [106, стр. 108]).

В действительном случае ряд (5.2) сходится в смысле среднего квадратичного, а в p-адическом — расходится в смысле среднего квадратичного (для произвольно малых моментов времени t). Таким образом, мы сталкиваемся с важной открытой проблемой построения p-адическизначного процесса Винера.

Глава 8. О СЕГМЕНТАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В P-АДИЧЕСКОЙ И ЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКАХ

Использование p-адических чисел в математической физике стимулировало развитие многих новых областей p-адической математики. Мы хотели бы отметить создание p-адической теории вероятностей и теории p-адических (и более общих неархимедовых) динамических систем [79]. В последние годы p-адические числа нашли новое неожиданное применение — создание математических моделей процесса мышления на основе представления человеческих идей ветвями p-адических иерархических деревьев [81]. Эти исследования привели к пониманию того, что p-адические числа могут быть использованы во многих приложениях для обработки (когнитивной) информации. В статье [7] p-адический анализ был впервые использован для обработки изображений. Видеоизображения, представленные в форматах MPEG 1, 2 и JPEG, кластеризовались и сжимались с помощью p-адического алгоритма кластеризации. Основным достоинством p-адического алгоритма является выигрыш в скорости вычислений (в десятки раз). Для некоторых классов изображений качество восстановления при p-адическом сжатии существенно лучше, чем при евклидовом.

Использование форматов MPEG 1, 2 и JPEG означает обработку изображений в спектральной области. При этом первоначальная координатная кодировка изображений проводится с помощью стандартной декартовой (прямоугольной) системы координат. Таким образом, в работе [7] мы использовали евклидову геометрию в координатном пространстве и p-адическую — в спектральном пространстве.

За последние несколько лет проблема автоматического анализа и интерпретации сжатых мультимедийных данных приобрела важное значение. Причина этого в возрастании числа мультимедийных архивов и в увеличении служб реального времени, имеющих дело с данными в сжатых форматах — MPEG 1, 2 для видеофильмов и JPEG для статических изображений. Другим важным примером необходимости работы со сжатыми форматами является видеонаблюдение. Видеоизображение в этом случае передается в архив в сжатом виде, поэтому его анализ (выделение объектов, отслеживание траекторий и т. п.) также должен проводиться со сжатым форматом. Проблема сегментации изображений в сжатых областях уже освещалась в литературе.

В общем случае при сегментации изображений формата JPEG (или MPEG 1, 2) использовалась только одна низкочастотная составляющая спектра. В статье [7] мы использовали и высокочастотные коэффициенты, выделяя тем самым текстурные характеристики в локальных областях (MPEG-блоках). Другим важным нововведением в наших работах по сегментации является использование в алгоритмах кластеризации p-адической метрики. Эта метрика, имеющая лексикографические свойства, позволяет ввести «порядок важности» спектральных компонент от низкочастотных к высокочастотным. Тем самым используется хорошо известное свойство органов зрения человека, а именно дифференциальная чувствительность к частотным составляющим образов.

P-адическая метрика является так называемой ультраметрикой. Вместо обычного неравенства треугольника она удовлетворяет усиленному неравенству треугольника: в каждом треугольнике третья сторона не больше максимума двух других сторон. Поэтому геометрия в ультраметрическом пространстве кардинально отличается от стандартной евклидовой геометрии. Одним из важных (и довольно необычным) свойством этой геометрии является то, что если два шара имеют непустое пересечение, то один является частью другого. Это свойство позволяет проводить кластеризацию изображения как разбиение на множество непересекающихся шаров-кластеров. Такая кластеризация возможна также благодаря тому, что в ультраметрическом пространстве так называемое цепное расстояние совпадает с обычным. Таким образом, p-адическая кластеризация образов имеет простую геометрию, а именно геометрию шаров. Это дает возможность простого и компактного описания кластера. В принципе, такая шаровая кластеризация может быть использована для сжатия информации.

В статье [55] мы построили p-адическую модель, стартуя непосредственно с координатного представления. Основа этой модели — p-адическая система координат на плоскости. Эта система координат имеет структуру иерархического дерева, начинающегося в центре изображения. Таким образом, p-адическая система координат отражает одно из важнейших свойств человеческого зрения — его центрирование. В принципе наши исследования можно рассматривать с точки зрения математического моделирования обработки информации в p-адической системе координат. Изображения кодируются в p-адической системе координат, затем кластеризуются в p-адической ультраметрике и вновь восстанавливаются. Обработан большой класс изображений для различных параметров модели. Для некоторых классов изображений достигается существенное сжатие при хорошем качестве восстановления. Заметим, что, кроме приложений к теории обработки изображений, наше исследование может быть использовано для математического моделирования процессов обработки информации в человеческом мозге. Наше исследование является серьезным доводом в пользу гипотезы о p-адической геометрии в ментальном пространстве, [81]. Мы показали, что евклидовы образы (вернее дискретные приближения к ним) могут быть адекватно (с точки зрения человеческого наблюдения) представлены в p-адическом пространстве. Отметим, что p-адическая обработка информации происходит существенно быстрее, чем евклидова.

В статье [55] также предложен алгоритм сжатия изображений, основанный на разложении Малера непрерывных функций в p-адической области. Сжатие проводится с помощью сохранения нескольких первых коэффициентов Малера в разложении (p-адически закодированного) изображения в ряд Малера.

В теории чисел и неархимедовом анализе традиционно используются p-адические числа для простого числа p. Однако при построении моделей процесса мышления [81] было замечено, что естественно возникают модели, основанные на m-адических ментальных пространствах для любого натурального числа m. В статье [55] было замечено, что m — это важный параметр при обработке изображений. Поэтому мы проводим общие построения для произвольного m, используя p-адические числа только при рассмотрении сжатия с помощью метода Малера.

§ 8.1. Ультраметрические пространства и цепное расстояние

Алгоритм цепной кластеризации, который мы используем в данной главе, базируется на так называемой цепной метрике. Мы обсудим это понятие для произвольной метрики. Последовательность точек $a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется ε-цепью, соединяющей a и b если $\rho(x_k, x_{k+1}) \leqslant \varepsilon$ для всех $k \leqslant n$. Если существует ε-цепь, соединяющая a и b, то говорят, что эти точки ε-связываемы. Ультраметрические пространства характеризуются следующим образом.

Метрическое пространство является ультраметрическим тогда и только тогда, когда любые точки a, b, $a \neq b$, не ε-связываемы ни для какого $\varepsilon < \rho(a, b)$.

Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство. Положим $\Delta(x, y) = \mathrm{Inf}\{\varepsilon\colon x \text{ и } y\ \varepsilon\text{-связываемы}\}$, x, $y \in X$. Эта функция имеет все свойства ультраметрики, кроме невырождения (может быть $\Delta(x, y) = 0$ для некоторых $x \neq y$). Это так называемая псевдоультраметрика. Эта метрика называется *цепным расстоянием* от a до b. Заметим, что из теоремы следует, что в ультраметрическом пространстве (X, ρ) исходная метрика ρ совпадает с соответствующим цепным расстоянием. Этот топологический факт упрощает алгоритмы кластеризации, базирующиеся на вычислении цепного расстояния, если они модифицируются для ультраметрических (в частности, p-адических) пространств.

§ 8.2. Алгоритмы кластеризации, базирующиеся на евклидовой и p-адической метриках

Кластерный анализ в действительности включает в себя набор различных методов и алгоритмов классификации. Всякий раз, когда необходимо классифицировать «горы» информации по пригодным для дальнейшей обработки группам, кластерный анализ оказывается весьма полезным и эффективным.

8.2.1. Алгоритм цепной развертки. Рассмотрим алгоритм цепной развертки, предложенный Е. Щепиным. Этот алгоритм относится к группе агломеративно-иерархических методов. В качестве исходного элемента цепной развертки берется любой объект из предъявленной совокупности, ему приписываются две метки: номер $n = 1$ и расстояние $\rho = 0$. Затем просматриваются все оставшиеся объекты. Выбирается объект, расстояние ρ' от которого до исходного элемента минимально. Ему присваивается номер $n = 2$ и расстояние $\rho = \rho'$. Среди оставшихся ищется объект, расстояние ρ'' от которого до уже выбранного множества объектов из двух элементов минимально, и т. д. — всегда на очередном шаге выбирается объект, расстояние от которого до уже пронумерованных объектов (как расстояние до множества) минимально, ему приписывается очередной номер и это расстояние. Легко видеть, что расстояние ρ является цепным расстоянием, введенным в разделе 2. Процедура повторяется, пока все объекты не будут пронумерованы. В результате все объекты будут выстроены в некотором порядке, и каждому объекту будет приписано некоторое число — расстояние до предшествующего множества.

Разбиение множества объектов на кластеры базируется на следующей процедуре. Пусть $r_0 > 0$ — некоторая константа (параметр кластеризации). Мы хотели бы разбить исходное множество на несколько кластеров таким образом, чтобы цепное расстояние между объектами, входящими в один кластер, было меньше заданной величины $\rho \leqslant r_0$, а для любых объектов из разных кластеров — $\rho > r_0$. Для этого достаточно просмотреть все приписанные объектам ρ-метки (расстояния) и пометить те из них, у которых $\rho > r_0$. Пусть это будут объекты с номерами $n_1, \ldots, n_K$. Тогда к первому кластеру следует отнести все объекты с номерами $1 \leqslant n < n_1$, ко второму — все объекты с номерами $n_1 \leqslant n < n_2$ и т. д. Меняя параметр r_0, можно анализировать различные варианты кластеризации.

Как мы уже упоминали, в ультраметрическом пространстве цепное расстояние совпадает с обычным. Поэтому кластеризация по цепному расстоянию есть разбиение на шары. Комбинаторная сложность указанного метода $O(N^2)$, где N — мощность исходного множества. Она равна $N(N-1)/2$ и в худшем и в лучшем случае.

8.2.2. Цепная развертка с фиксированным порогом. Рассмотрим быструю версию цепной развертки, а именно цепную развертку с фиксированным порогом. В этом случае задается требуемое межкластерное расстояние $r_0 > 0$. В качестве начального берется любой объект, ему присваивается принадлежность к первому кластеру. К этому же первому кластеру присоединяются все объекты, расстояние от которых до исходного объекта меньше порога r_0. Затем для каждого из вновь присоединенных объектов данная процедура повторяется. После того как к первому кластеру не может быть больше отнесен ни один объект, среди объектов, которые остались, берется произвольный объект в качестве опорного для второго кластера и т. д., пока не будут исчерпаны все объекты. В худшем случае и здесь при наличии N объектов требуется $N(N-1)/2$ процедур вычисления расстояния, но в лучшем случае — всего N процедур. В наших опытах сегментации изображений развертка с фиксированным порогом в евклидовой метрике требовала в среднем в три раза меньше времени, чем стандартная процедура.

Особенно успешно развертка с фиксированным порогом работает в p-адическом случае. Поскольку в этом случае цепное расстояние совпадает с обычным, то для выяснения, принадлежит ли объект к кластеру, достаточно проверить расстояние от него до любого одного элемента кластера, а не до всех, как в общем случае (и, в частности, в евклидовом случае).

Алгоритм модифицируется следующим образом. В качестве исходного берется любой объект, ему присваивается принадлежность к первому кластеру. Затем берется следующий объект. Если расстояние от него до первого объекта меньше порога, то ему присваивается принадлежность к первому кластеру, иначе — ко второму. Далее все повторяется. Берется очередной объект, проверяется p-адическое расстояние от него до первых элементов уже имеющихся кластеров. Если расстояние до некоторого кластера меньше порога r_0, то объекту присваивается принадлежность к этому кластеру, иначе объект берется в качестве образующего для нового кластера, общее число кластеров увеличивается. Легко видеть, что здесь при наличии N объектов и при получении K кластеров требуется не больше $N*K$ процедур вычисления расстояния, как правило много меньше.

§ 8.3. Выделение векторов цвета и текстуры из потока кадров формата MPEG 2

Мы кратко опишем векторное пространство, с которым имеем дело. Семейство стандартов видеосжатия MPEG базируется на двух главных принципах: (i) использование временной корреляции видеокадров с компенсацией движения, (ii) использование пространственной корреляции с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ). Архитектура потока MPEG содержит три вида фреймов: I, B, P. I-фреймы кодируются непосредственно с помощью БПФ. Фреймы P и B компенсируют движение. Мы рассматриваем сегментацию I-фреймов. В них каждый блок 8×8 пикселов изображения кодируется с использованием БПФ, так же как в стандарте JPEG для статических изображений. Видеокадры в формате MPEG 2 записаны в цветовой системе YCrCb (яркость Y, цветность Cr и Cb). Поэтому видеофреймы представляют собой три плоских образа: Y, Cr, Cb. Ранг значений в этих образах, как правило, $[0, \ldots, 255]$ и соответствует глубине 8 бит на пиксел. Все три плоскости изображения кодируются независимо в формате JPEG или MPEG — I.

Схему кодирования можно кратко описать так. Изображение разбивается на участки 8×8 пикселов. Затем на каждом участке применяется двумерное БПФ. Первый коэффициент $F(0,0)$ представляет собой среднее значение исходного сигнала. Получившиеся коэффициенты квантуются с целью сжатия информации. Высокочастотные коэффициенты квантуются более грубо, чем низкочастотные. Это связано с тем, что высокочастотные составляющие изображения соответствуют шуму и их огрубление или потеря менее значимы для визуальной системы человека. Чтобы представить спектр Фурье в виде одного вектора, который был бы лексикографически упорядочен, мы предлагаем взять коэффициенты БПФ в стандартном зигзагообразном порядке от $F(0,0)$ до $F(N-1, N-1)$ для каждой плоскости — яркости Y и цветности Cr, Cb. Затем эти три вектора объединяем в один, последовательно смешивая компоненты.

Таким образом, мы получаем один упорядоченный вектор для каждого участка 8×8:

$$\mathbf{a} = (y_0, cr_0, cb_0, y_1, cr_1, cb_1, \ldots, y_i, cr_i, cb_i, \ldots, \\ y_{NxN-1}, cr_{NxN-1}, cb_{NxN-1})^T,$$

или

$$\mathbf{a} = (a_0, \ldots, a_L)^T, \quad K = L * 3 - 1.$$

Первые три координаты $l = 0, \ldots, 2$ вектора $\mathbf{a}$ характеризуют «цвет» в блоке, так как они представляют средние значения яркости и цветности. Иные координаты характеризуют «текстуру» внутри блока, так как они соответствуют вариации сигнала в блоке. Как мы уже упоминали, некоторые авторы уже использовали первые низкочастотные коэффициенты (координаты a_l, $l = 0, \ldots, 2$ наших векторов $\mathbf{a}$) для сегментации видеокадров. Мы покажем, что добавление высокочастотных спектральных коэффициентов улучшает классический алгоритм сегментации. Использование p-адической метрики и цепной развертки для кластеризации позволяет нам учитывать избирательную чувствительность человеческого зрения.

§ 8.4. Сегментация изображений в спектральной области БПФ методом Split-LBG

Помимо кластеризации спектральных коэффициентов путем цепной развертки, мы использовали для сегментации изображений метод кластеризации «Split-LBG» . Этот метод хорошо себя зарекомендовал при анализе изображений. Он базируется на обобщенном методе K-средних. Кратко напомним суть метода Split-LBG.

Пусть дано множество векторов $A = \{\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_M\}$, где $\mathbf{a}_m = (a_0, \ldots, a_L)^T$ и $K(K < M)$ векторов-центров $\mathbf{c}_k = (a_0, \ldots, a_L)^T$, не обязательно принадлежащих A. Надо найти разбиение множества A на K кластеров Ω_k, $k = 1, \ldots, K$, минимизирующее энергию

$$E = \sum_{k=1}^{K} \sum_{\mathbf{a}_m \in \Omega_k} d\left(\mathbf{a}_m, \mathbf{c}_k\right). \tag{4.1}$$

Результатом данного метода кластеризации является разбиение пространства на множество кластеров ω_k таких, что $\forall \mathbf{a}_m \in \omega_k \Rightarrow d\left(\mathbf{a}_m, \mathbf{c}_k\right) \leqslant d\left(\mathbf{a}_m, \mathbf{c}_j\right)$, $j \neq k$.

Заметим, что в случае евклидова расстояния гиперсферы в общем случае могут пересекаться.

Базируясь на обобщенном методе K-средних, метод Split-LBG предлагает строить финальный набор кластеров $\Omega = \{\omega_k\}$, $k = 1, \ldots, K$ последовательно. Метод начинает с небольшого начального числа кластеров $K_0 < K$. После оптимизации разбиения на заданное число кластеров $K_i < K$ обобщенным методом K-средних добавляются новые кластеры с новыми центрами, и процесс повторяется, пока не будет достигнуто требуемое число кластеров K.

Мы используем следующий способ добавления центров кластеров: он состоит из «расщепления» («splitting») каждого из уже существующих центров кластеров $\mathbf{c}_k$ на два новых $\mathbf{c}'_k = \mathbf{c}_k + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{c}''_k = \mathbf{c}_k - \boldsymbol{\varepsilon}$, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — случайный вектор малой энергии $E\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \sum\limits_{l} \varepsilon_l^2$.

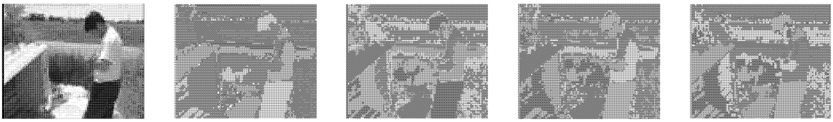
Начиная с 2 центров кластеров, выбранных случайным образом, метод позволяет построить разбиение пространства R^n на $K = 2^q$ кластеров за q шагов оптимизации K-средних.

§ 8.5. Результаты и обсуждение

Мы проводили сегментацию изображений посредством кластеризации коэффициентов БПФ для большого класса изображений. Использовалась евклидова и p-адическая метрики.

Кластеризация проводилась таким образом, чтобы изображение, полученное восстановлением после кластеризации коэффициентов Фурье, было достаточно «хорошим» и при этом чтобы число кластеров было по возможности минимальным.

Целью первой серии экспериментов было показать, что использование высокочастотных коэффициентов (увеличение размерности вектора nc) позволяет улучшить сегментацию даже при одном том же числе кластеров. Результаты сегментации приведены на рис. 8.1.



а *б* *в* *г* *д*

Рис. 8.1. Результаты кластеризации методом Split-LBG в евклидовой метрике. Слева направо: *а*) исходное декодированное изображение, *б*) сегментация с $nc = 1$, *в*) $nc = 3$, *г*) $nc = 6$, *д*) $nc = 10$

Изображение *а*) на рис. 8.1 представляет собой образ, полученный заменой блока 8×8 цветных пикселов оригинального видеокадра средним значением. Далее слева направо показаны результаты сегментации с увеличивающимся числом использованных спектральных коэффициентов. Результаты, наблюдаемые на большом числе данных (240 изображений), соответствующих I-фреймам сжатых по схеме MPEG2 видеофильмов «Le temps des Lagunes» и «L'Homme de Tatavel» (SFRS ®), ясно показывают, что использование высокочастотных коэффициентов, а не только $F(0,0)$, позволяет получить лучшую однородность и лучшую отделимость кластеров. Максимальное число спектральных коэффициентов было 30. Если бы мы применяли тот же метод кластеризации на исходном изображении, а не на спектре Фурье, нам потребовались бы векторы размерности $3 \times 64 = 128$. Таким образом, использование спектральных коэффициентов позволяет сильно сократить размерность пространства.

Целью наших последующих экспериментов было сравнение алгоритмов кластеризации в евклидовой и p-адической метриках. Результаты для одного изображения показаны на рис. 8.2. Изображение *а*) на рис. 8.2 представляет собой исходный образ. В изображениях *б*), *в*) и *г*) левые части являются реконструкцией изображения по центрам кластеров, правые части представляют собой карты сегментации, где каждый кластер выделен своим цветом.

Сегментация изображений при использовании p-адической метрики при кластеризации методом цепной развертки оказалась более успешной, чем аналогичная при использовании евклидовой метрики. Для получения сегментации приемлемого качества в p-адическом случае (рис. 8.2*б*) требуется меньше кластеров. В нашем примере на рис. 8.2

понадобилось 24 кластера вместо 101. Это представляется достаточно естественным, так как первые коэффициенты Фурье играют более важную роль в формировании изображения, нежели коэффициенты более высоких порядков.

Также p-адическая кластеризация требует меньше времени (в среднем примерно в полтора раза), так как вычисление p-адического расстояния — существенно более быстрая процедура, чем нахождение евклидова расстояния.

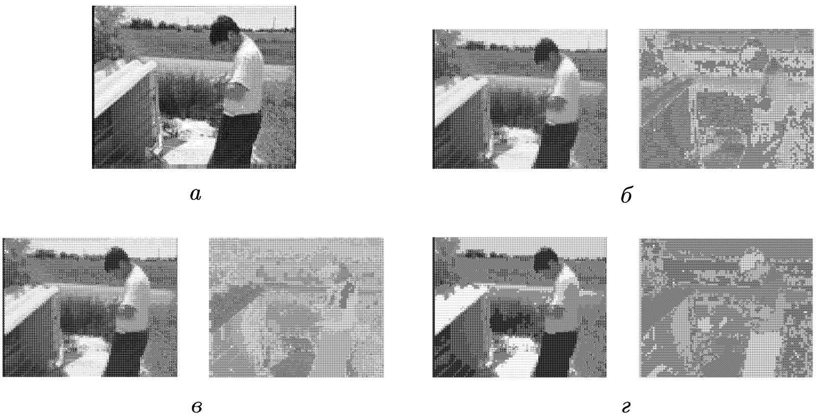


Рис. 8.2. Кластеризация в p-адической и евклидовой метриках: *а*) исходное изображение, *б*) цепная развертка, p-адическая метрика, 24 кластера, *в*) цепная развертка, евклидова метрика, 101 кластер, *г*) LBG метод, евклидова метрика 8 кластеров.

При использовании метода Split-LBG с евклидовой метрикой сегментацию приемлемого качества удается достигнуть уже на 8 кластерах, хотя некоторые детали при этом исчезают (по сравнению с сегментацией p-адической цепной разверткой). Чтобы детализация была сравнима, методу Split-LBG требуется уже 16 кластеров, т. е. примерно столько же, сколько цепной развертке с p-адической метрикой. Скорость работы двух разных методов сравнима.

Метод Split-LBG нельзя непосредственно перенести на случай p-адической метрики, но было бы интересно рассмотреть возможность его модификации, в которой можно было бы учесть как особенности метода, так и особенности p-адической метрики.

8.5.1. Скорость работы алгоритмов. Важным вопросом оценки работы алгоритмов кластеризации, помимо качества, является скорость работы. Кроме собственно типа алгоритма на скорость работы оказывают существенное влияние различные параметры.

1. Выбор метрики: евклидова или ее квадрат, расстояние городских кварталов, расстояние Чебышева, степенное расстояние, процент несогласия, p-адическое расстояние и т. д.

2. Размерность объектов исследуемого пространства

3. Число кластеризуемых объектов.

Были проведены исследования скорости работы алгоритмов при сегментации изображений указанными выше способами. Изображение разбивалось на 6464 части (т. е. всего имелось 6464 объекта, подлежащих кластеризации). Число коэффициентов Фурье было от 1 до 64 (т. е. размерность объектов от 3 до 192).

Как легко видеть, полная процедура цепной развертки требует $N(N-1)/2$ вычислений расстояний между объектами. В случае p-адической метрики время слабо зависит от размерности объектов, в случае евклидовой метрики зависимость от размерности сильная. При числе коэффициентов Фурье до 10 общее время работы в разных метриках отличалось слабо. Однако при 30 коэффициентах время работы в евклидовой метрике в среднем в три раза больше, чем в p-адической.

Метод Split-LBG является итерационным, число итераций, число вычислений расстояний сильно зависит от структуры информации, от заданного числа K. Время работы также существенно зависит от размерности объектов, поскольку применяется евклидова метрика.

При использовании небольшого числа K в методе Split-LBG ($K=16$) и небольшом числе коэффициентов Фурье ($nc = 10$) LBG-метод работал существенно быстрее (в 5 раз) цепной развертки с p-адической метрикой. Но уже при числе коэффициентов $nc = 30$ время работы было примерно одинаковым. При последующем увеличении числа коэффициентов стало меньше уже время p-адической цепной развертки. Таким образом, p-адическая цепная развертка позволяет учитывать тонкие дифференциальные различия без существенной потери времени.

Заметим, наконец, что в наших опытах сегментации изображений цепная развертка с фиксированным порогом в p-адической метрике требовала в среднем в тридцать (!) раз меньше времени, чем стандартная процедура, и в шесть (!) раз меньше времени, чем LBG-процедура (в благоприятных для LBG-процедуры условиях, а именно: 10 коэффициентов, 16 кластеров).

Мы предложили сегментировать изображения методами кластеризации в спектральной области. Мы показали, что использование высокочастотных составляющих, а не только низкочастотных, приводит к лучшей сегментации естественных изображений с текстурами. Второй важный результат — использование в пространстве коэффициентов БПФ p-адической метрики, приводящей к хорошей сегментации с лучшей вычислительной эффективностью. Эта метрика позволяет учитывать особенности человеческого зрения, в первую очередь, выделяя низкочастотные коэффициенты.

§ 8.6. m-адическая координатная сеть

Пусть $m > 1$ — произвольное фиксированное натуральное число. Мы хотим ввести m-адическую координатную сеть на круге радиуса $R > 0$ с центром в нуле. Пусть $0 < r < R$ — некоторый небольшой радиус (таким образом, координатная сеть будет зависеть от параметра дискретизации r). Координатная сеть — это множество натуральных чисел

$$0 \leqslant j < m^N : \ j = 0,\ j = 1,\ \ldots,\ j = \alpha_0 + \alpha_1 m + \ldots + \alpha_{N-1} m^{N-1},\ \ldots,$$
$$j = m^{N-1} = (m-1) + (m-1)m + \ldots + (m-1)m^{N-1}.$$

Здесь N — это длина ветвей m-адической сети. Каждый элемент этой сети может быть отождествлен с последовательностью $x = \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{\mathrm{N}-1}$, $\alpha_{\mathrm{j}} = 0, 1, \ldots, m-1$. Мы обозначаем множество таких строк (= множество натуральных чисел $0 \leqslant j < m^N$) символом $Z_{m,N}$. Сейчас мы произведем пространственную реализацию $Z_{m,N}$. Мы сконструируем m-адическое дерево следующим образом. Пусть

$$\gamma_i = (2\pi i)/m, \quad i = 0, \ldots, m-1.$$

На каждом луче γ_i мы выберем точку A_i на расстоянии r и напишем на этой точке число i ($i = 0, \ldots, m-1$). На следующем шаге мы используем A_i вместо нуля и повторяем процедуру. После N шагов мы получим m-адическое дерево такое, что все числа $x \in Z_{m,N}$ реализованы как ветви этого дерева. Здесь N меньше чем N_{int}, первый момент пересечения нового круга (радиуса r) с большим кругом (радиуса R).

Это m-адическая координатная сеть на круге. Можно конструировать более общие сети, если на каждом шаге выбирать новый радиус r: $r = r_1$, $r = r_2$, ... (например $r_{k+1} = 1/2\, r_k$); m-адический шар радиуса p^{-k} — это все точки m-адической координатной сети, которые лежат на ветвях, имеющих общий корень длины kr. Таким образом, это все последовательности $x \in Z_{m,N}$, которые имеют фиксированный начальный сегмент $\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}$ длины k.

З а м е ч а н и е. В математической модели мы можем продолжить процесс построения m-адической координатной сети бесконечно долго. Так мы получаем m-адическое представление плоскости. Это евклидов образ кольца целых m-адических чисел Z_m-множества всех рядов по степеням m:

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 m + \ldots + \alpha_{N-1} m^{N-1} + \ldots,$$

где коэффициенты $\alpha_j = 0, 1, \ldots, m-1$.

§ 8.7. m-адическое кодирование изображений

8.7.1. Кодирование. Предположим, что мы имеем некоторую картинку I, лежащую внутри круга радиуса R. Мы дискретизируем уровни яркости и получим шкалу: $\beta = 0, 1, \ldots, q-1$, где $q > 1$ — некоторое натуральное число (которое, в общем случае, не имеет связи с m). Для каждой точки, принадлежащей m-адической координатной сети на круге, мы находим соответствующий уровень яркости. Таким образом, каждой ветви $x \in Z_{m,N}$ ставится в соответствие последовательность уровней яркости:

$$y = \beta_0 \dots \beta_{\mathrm{N}-1} = f(x) = f(\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{\mathrm{N}-1}).$$

Так изображение I кодируется посредством отображения f: $Z_{m,N} \to Z_{q,N}$.

8.7.2. Сжатие изображений. Мы выбираем некоторый уровень яркости $\varepsilon = q^{-l}$, $l < N$. Конечно, ε должно зависеть от класса рассматриваемых изображений. Мы кластеризуем изображение $I = f(Z_{m,N})$ на шары радиуса ε. Напомним, что различные m-адические шары фиксированного радиуса имеют пустое пересечение. Пусть это некоторые шары $U^{(1)}, \dots, U^{(t)}$. В действительности такая кластеризация означает, что мы обращаем внимание на яркость только первых l точек из каждой ветви m-адического дерева и забываем о последующих точках. Мы выбираем некоторые точки, принадлежащие этим шарам:

$$y^{(1)} = \beta_0^{(1)} \dots \beta_{N-1}^{(1)} \in U^{(1)}, \dots, y^{(t)} = \beta_0^{(t)} \dots \beta_{N-1}^{(t)} \in U^{(t)}.$$

Мы полагаем $f_c(x) = y^{(k)}$ для каждого $x \in f^{-1}(U^{(k)})$, $k = 1, \dots, t$. Отображение f_c: $Z_{m,N} \to \{y^{(1)}, \dots, y^{(t)}\}$ является сжатием изображения I (отображения f).

8.7.3. Реконструкция изображения. Пусть у нас есть некоторое сжатие изображения f_c: $Z_{m,N} \to \{y^{(1)}, \dots, y^{(t)}\}$. Мы должны восстановить исходное изображение f. Для каждого $x \in f_c^{-1}(y^{(k)})$ мы выбираем некоторое $y \in U_\varepsilon(y^{(k)})$ и полагаем $f_{rec}(x) = y$. Отображение f_{rec}: $Z_{m,N} \to Z_{q,N}$ рассматриваем как восстановление изображения I на базисе сжатого изображения. Можно предложить различные алгоритмы выбора точек $y \in U_\varepsilon(y^{(k)})$.

A1. Перенумеруем (некоторым образом) точки, принадлежащие $f_c^{-1}(y^{(k)})$, и получим массив $a^{(k)} = (x_1, \dots, x_{Mk})$. Также перенумеруем точки, принадлежащие шару $U_\varepsilon(y^{(k)})$, и получим массив $y^{(k)} = (y_1, \dots, y_{Lk})$. Затем положим $f_{rec}(x_j) = y_j$. Естественная нумерация индуцируется представлением m-адической координатной сети и q-адического массива яркостей в виде натуральных чисел.

A2. Если требуется оперировать большими массивами данных, может быть полезным использование случайного выбора. Выбираем случайным образом точку $x \in f_c^{-1}(y^{(k)})$, точку $y \in U_\varepsilon(y^{(k)})$ и полагаем $f_{rec}(x) = y$.

Замечание. Для воспроизведения реконструированного изображения мы могли бы использовать вместо отдельных точек отрезки линий. Если $f_{rec}(\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{N-1}) = \beta_0\ldots\beta_{N-1}$, то на первом сегменте ветви $\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{N-1}$ устанавливается уровень яркость β_0 и т. д.

§ 8.8. Программная реализация m-адического кодирования и декодирования изображений

Была разработана программа, реализующая описанный выше подход к m-адическому кодированию изображений с последующей реконструкцией образов. В программе можно задавать различные параметры преобразования — число шагов N, число направлений m, величину шага r, порог кластеризации ε. Также можно указывать дополнительный угол поворота θ, цвет заливки σ, радиус закраски ρ — ниже будет дано описание этих параметров.

После каждого шага направляющие углы лучей изменялись на угол θ, т. е. после первого шага $\gamma_i = (2\pi i/m) + \theta$; после второго $\gamma i = (2\pi i/m) + 2\theta$ и т. д. Такое добавление угла производится с целью более полного покрытия изображения m-адическими деревьями. Конечно, можно задавать и $\theta = 0$.

После построения m-адического образа картинки проводилась процедура кластеризации с порогом ε. Как уже отмечалось, эта процедура сводится к разбиению на m-адические шары.

Поскольку в m-адических шарах все точки равноправны, в качестве определяющей для кластера бралась просто первая точка кластера. Таким образом, изображение кодировалось следующим образом: для каждого кластера запоминалось m-адическое представление его первого элемента, затем для каждого числа от 0 до $m^N - 1$ запоминался номер кластера, к которому оно принадлежит.

Восстановление изображения. При декодировании изображения бралось каждое число, проверялось, к какому кластеру оно принадлежит, и все точки ветви закрашивались в соответствии с цветами кластера.

Легко видеть, что m-адическое кодирование с произвольными параметрами не гарантирует, что каждая точка изображения попадет хоть в одну m-адическую ветвь. Точки, расположенные в центре изображения, почти наверняка попадут во многие ветви, многие точки по краям — могут вообще не попасть. Поэтому при восстановлении изображения использовались дополнительные параметры — цвет заливки σ, радиус закраски ρ. Закрашивались вершины вместе с точками в радиусе ρ. Цветом заливки заполнялись точки, не вошедшие ни в одну ветвь, даже с учетом окрестностей ветвей.

Ниже приводится пример исходного изображения (рис. 8.3) и примеры восстановленных после m-адической обработки изображений. В наших примерах цвет закраски был белый, радиус равен 1.

Легко видеть, что если шаг сетки (радиус r) мал, то изображение восстанавливается только в центре картинки — как это видно на рис. 8.4.

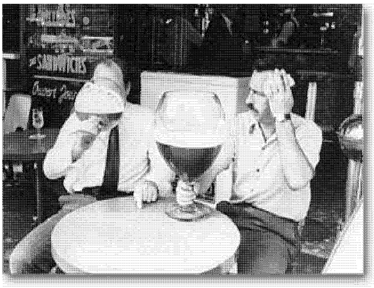


Рис. 8.3. Исходное изображение

Рис. 8.4. Изображение с малым шагом

На рисунках 8.5, 8.6 радиус r составлял 15% от высоты картинки, дополнительный угол равен $\pi/10$. На рис. 8.5 представлено изображение, восстановленное после кодирования при 4 направлениях ($m = 4$) и 8 шагах ($N = 8$). На рис. 8.6 число направлений $m = 2$, число шагов $N = 16$.

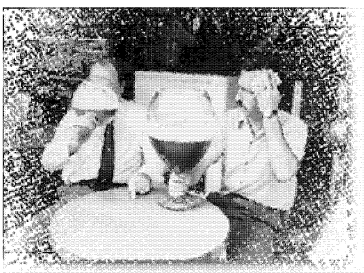


Рис. 8.5. Декодированное изображение, $m = 4$, $N = 8$

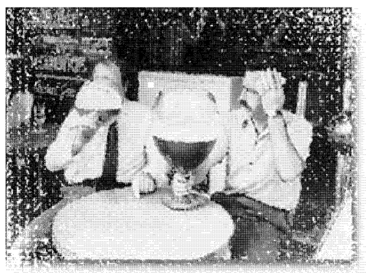


Рис. 8.6. Декодированное изображение, $m = 2$, $N = 16$

§ 8.9. Сжатие изображений с использованием полиномов Малера

Представляется полезным (по чисто математическим причинам) выбрать $m = q = p > 1$ — простое число. В этом случае изображение I кодируется отображением $f\colon Z_{p,N} \to Z_{p,N}$. Для функций f в кольце p-адических целых $Z_p(f\colon Z_p \to Z_p)$ имеется хорошо развитый анализ. Мы будем использовать следующий хорошо известный факт. Пусть f:

$Z_p \to Z_p$ — непрерывная функция. Тогда она может быть единственным образом представлена в виде ряда Малера:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n C_x^n, \quad f_n \in Z_p, \tag{9.1}$$

где $C_x^n = \dfrac{x(x-1)\cdot \ldots \cdot (x-n+1)}{n!}$ — биномиальные полиномы, а коэффициенты $f_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)$.

Это представление Малера может быть использовано для сжатия изображений. Пусть картинка I закодирована посредством отображения $f\colon Z_{p,N} \to Z_{p,N}$, которое является ограничением на натуральные числа $\{0, 1, \ldots, p^N - 1\}$ непрерывной функции $f\colon Z_p \to Z_p$. Такое предположение особенно естественно, если мы используем координатную сеть с уменьшающимся радиусом r: $r_n = r/a^n$, $a > 1$. В этом случае p-адическая непрерывность согласуется с непрерывностью евклидовой плоскости. По теореме Малера можно аппроксимировать f полиномом Малера:

$$M_1(f)(x) = \sum_{k=0}^{1} f_k C_x^k.$$

Мы сохраняем только первые коэффициенты Малера f_k (которые являются целыми) как массив $(f_0, \ldots, f_l)$ и реконструируем изображение I как полином Малера:

$$M_1(f)(j) = \sum_{k=0}^{1} f_k C_j^k, \quad j = 0, 1, \ldots, p^{N-1}.$$

Из математического анализа хорошо известно, что $M_l(f)(j) = f(j)$, $j = 0, 1, \ldots, l$. Если $j > l$, то в общем случае $M_l(f)(j) \neq f(j)$. Но $M_l(f)(j)$ дает аппроксимацию $f(j)$ при $j \to \infty$. Если мы представим натуральное число $M_l(f)(j)$ в p-адической форме и возьмем первые N цифр p-адического разложения, мы получим аппроксимацию вектора яркости $f(j) = \beta_0 \ldots \beta_{N-1}$.

§ 8.10. Образы и «графы» m-адических функций

Использование m-адических координатных сетей дает возможность визуализации m-адических функций. Пусть $f\colon Z_m \to Z_q$ — некоторая функция. Сначала мы рассмотрим ее ограничение на множество $Z_{m,N} = \{0, 1, \ldots, m^{N-1}\} \subset Z_m$. Получаем $f\colon Z_{m,N} \to Z_q$. Чтобы создать отображение $f\colon Z_{m,N} \to Z_{q,N}$, используем канонический проектор

$$\pi_N : Z_q \to Z_{q,N}, \quad \pi_N(\beta_0 \ldots \beta_{N-1} \ldots) = \beta_0 \ldots \beta_{N-1}.$$

Чтобы создать двумерный образ функции $f\colon Z_m \to Z_q$, мы устанавливаем уровни яркости $\beta_0 \ldots \beta_{N-1}$ в вершинах (или отрезках) ветви $\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{N-1}$:

$$\pi_N f(\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{N-1}) = \beta_0 \ldots \beta_{N-1}.$$

Чтобы произвести граф, мы устанавливаем вертикальные отрезки длин $\beta_0, \ldots, \beta_{N-1}$ в точках (или сегментах) этой ветви.

Библиографические замечания

Начнем с обсуждения физических мотиваций математической теории, представленной в данной книге.

Обсуждение *структуры пространства–времени на фантастически малых планковских расстояниях* имеет длинную историю (см., например, [10]). В связи с этой проблемой периодически возникали идеи о различных вариантах *неархимедовой структуры пространства-времени на планковских расстояниях* (см., например, [6], [103], [131]). Неархимедовы физические модели вызвали большой интерес в связи с развитием теории струн. Первая работа в этом направлении [132] вызвала целую серию публикаций о *p-адических струнах* [3]–[5], [25], [26], [28], [31]–[33], [89], [98], [124], [133]. В дальнейшем интенсивно изучались более простые неархимедовы модели такие, как квантовая механика и теория поля [51], [58], [59], [62], [64], [69], [72], [76], [112], [122], [123], [127]–[130], [137]–[139].

Как уже отмечалось, во всех неархимедовых моделях переменные принадлежат некоторому полю неархимедовых чисел K. В первом формализме [112], [113], [122], [123], [127]–[130], [137]–[139] действительное пространство-время R^4 заменяется на K^4 (как правило, $K^4 = Q_p$, поле p-адических чисел), но волновые функции принимают обычные комплексные значения. Во втором формализме [51], [58], [59], [62], [64], [69], [72], [76] волновые функции принимают неархимедовы значения.

Данная книга посвящена математическим проблемам *неархимедовозначной физики*. Здесь развивается теория неархимедовозначных распределений на неархимедовых пространствах конечной и бесконечной размерности [64], [69]. Эта теория является основой формализма *неархимедова интегрирования по распределениям Гаусса и Фейнмана* [69], [72]. Рассматриваются приложения к квантовой механике и теории поля [64], [69], [72].

P-адическая вероятность и статистика возникли [67], [75] в связи с проблемой статистической интерпретации квантовых теорий, в которых волновые функции принимают свои значения в квадратичных расширениях полей p-адических чисел. Обычная теория вероятностей, основанная на колмогоровской аксиоматике [94], в данном случае неприменима. Появляются новые *неколмогоровские теории вероятностей* [71].

В частности, p-адический белый шум служит важным примером вероятностного распределения на неархимедовом пространстве бесконечной размерности [60].

Теории обобщенных функций, принимающих значения в полях неархимедовых чисел, рассмотренные в работах [64], [72], [69], носят аналитический характер (пространства основных функций являются различными пространствами аналитических функций). Это неархимедовы теории ультрараспределений. Использование обобщенных функций в математической физике позволило решить множество проблем квантовой механики и теории поля с неархимедовозначными волновыми функциями. Понятно, что это только первые шаги по применению обобщенных функций в неархимедовозначной математической физике. И возможно существенное продвижение в направлении работ [12]–[15], [120], [121].

Мы рассмотрим более детально три работы [103], [6], [131], которые являются ключевыми в развитии неархимедовой физики. По-видимому, идея о неархимедовой структуре пространства-времени в квантовой физике впервые была предложена в статье [103]. В ней утверждалось, что существуют несоизмеримые пространственно-временные интервалы, которые должны измеряться с помощью p-адических чисел. Эта статья не нашла отклика у физиков и была забыта. Авторы работы [6] пришли к применению p-адических чисел в физике через формализм *квантовой логики*. Они связывали *алгебру высказываний* с квантовым экспериментом и изучали проблему алгебраической структуры линейного пространства, в котором рассматривались представления соответствующей решетки квантовой логики, а именно проблему выбора числового поля для этого представления. Ответ на вопрос, касающийся возможности применения поля p-адических чисел в квантовой логике, был отрицательным. В связи с этим исследования, начатые в работе [6], были прекращены. В 1987 г. И.В. Волович [131] начал изучать проблему неархимедовой структуры пространства-времени на планковских расстояниях. Кроме основных философских положений, ранее изложенных в [103], он рассмотрел две конкретные физические модели: гравитацию и теорию струн. Эти модели пробудили огромный интерес к неархимедовой физике [3]–[5], [25], [26], [28], [31]–[33], [89], [98], [51], [58], [59], [62], [64], [72], [76], [112], [113], [122], [123], [127]–[130], [137]–[139].

В качестве замечания к работе [6] стоит отметить, что неархимедовозначная квантовая физика, в принципе, не должна развиваться в рамках стандартной аксиоматики (тогда как работа [6] — это, в сущности, попытка построения неархимедовой физики в рамках стандартной аксиоматики). Аксиоматика должна быть изменена, в частности, гильбертова структура должна быть модифицирована. Такое изменение аксиоматики было предложено в [51], [58], [59], [62], [64], [69], [72], [76], где, в частности, было введено *неархимедово гильбертово пространство* и была построена новая неколмогоровская теория вероятностей, в которой вероятности могли быть p-адическими числами. Было бы очень интересно завершить исследования по неархимедовой квантовой логике, начатые в статье [6], используя новые результаты [51], [58], [59], [62], [64], [69], [72], [76].

P-адическая вероятность и стохастика [60], [67], [71], [75], [83], [90]–[93], возникшие в p-адическизначной физике, могут найти применения в других естественных науках. Так, они могут использоваться для описания стохастических моделей, в которых относительные частоты колеблются в поле действительных чисел, но стабилизируются в одном из полей p-адических чисел. Появляется возможность получения из статистической выборки новой информации, недоступной «вещественному» исследователю. В дополнение к обычной вещественной информации, сконцентрированной в действительных вероятностях, статистическая выборка может также содержать информационный слой, соответствующий p-адическим вероятностям.

На теорию неархимедовозначных гауссовских и фейнмановских интегралов большое влияние оказали исследования в области обычного *бесконечномерного анализа* [1], [11], [24], [37]–[45], [47], [48], [114]–[117], где методы обобщенного интегрирования на бесконечномерных пространствах также успешно использовались. Аналогичные методы были разработаны при построении теории интегрирования для распределений на суперпространствах [46], [49], [50], [52], [55], [56].

Неархимедова математическая физика оказала стимулирующее влияние на развитие теории динамических систем над неархимедовыми (и, в частности, p-адическими) полями, см. монографию А.Ю. Хренникова [79]. В этой монографии была также выдвинута идея о возможности использовать p-адические динамические системы для математического моделирования процессов мышления, см. также [81]. Построение p-адических моделей, описывающих работу мозга, привело к пониманию того, что p-адическая метрика может использоваться при обработке изображений [7], [54]. Здесь огромную роль сыграло плодотворное сотрудничество автора с Ж. Бенуа, начавшееся еще при выполнении НИСовских проектов по обработке космических снимков в Московском институте электронной техники. Важнейшую роль сыграло привлечение к реализации p-адического проекта Н. Котовича, предложившего использовать алгоритмы ультраметрической кластеризации, разработанные топологом Е. Щепиным.

Открытые проблемы

Неархимедовозначные квантовые модели порождают большое число новых математических проблем в неархимедовом анализе.

1. Математическая теория неархимедова гильбертова пространства. Нами было предложено новое определение. В связи с этим определением возникает множество нерешенных проблем. Например, каковы условия для последовательностей весов $\lambda = (\lambda_n)$ и $\mu = (\mu_n)$, индуцирующих изоморфные гильбертовы пространства H_λ и H_μ?

2. Спектральная теория операторов в неархимедовых гильбертовых пространствах. Аналог самосопряженного оператора, унитарного оператора. Эволюционные группы унитарных операторов.

3. Неограниченность распределения Гаусса при $p = 2$.

4. Связь между распределениями Лебега и Волкенборна.

5. Интегрирование на бесконечномерных локально выпуклых пространствах.

6. Неархимедовы стохастические процессы и стохастические дифференциальные уравнения.

7. Формула Фейнмана–Каца для дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений.

Приложение

1. Разложение чисел относительно различных шкал. Так как натуральные числа являются простейшими из всех чисел, то с них мы и начнем наши рассмотрения. Кроме обычного разложения относительно шкалы m, гл. 1 (3.3), которая соответствует измерительному процессу с m-кратным возрастанием длины единицы 1, мы можем рассмотреть следующее факториальное разложение:

$$n = a_1 1! + a_2 2! + \ldots + a_n n!, \tag{1.1}$$

где $0 \leqslant a_j \leqslant j$ для $j = 1, 2, \ldots, n$. Это разложение не так хорошо известно, как обычное, гл. 1 (3.3), поэтому мы докажем, что любое натуральное число n может быть единственным образом разложено в форме (1.1).

Доказательство. Предположим, что n допускает два разложения вида (1.1). Тогда

$$n = a_1 1! + a_2 2! + \ldots + a_n n! = c_1 1! + c_2 2! + \ldots + c_n n!.$$

Обозначим через k наибольшее натуральное число такое, что $a_k \neq c_k$, например $c_k > a_k$. Тогда $c_k - a_k \geqslant 1$ и

$$k! \leqslant c_k k! - a_k k! = a_1 1! + \ldots + a_{k-1}(k-1)! - c_1 1! - \ldots - c_{k-1}(k-1)! \leqslant \\ \leqslant 1{\cdot}1! + 2 \cdot 2! + \ldots + (k-1)(k-1)! = k! - 1 < k!.$$

А это невозможно.

Теперь обозначим через s натуральное число. Рассмотрим все разложения вида (1.1) с $n \leqslant s$. Легко вычислить, что число их равно $(1+1)(2+1) \cdot \ldots \cdot (s+1)!$. Поэтому число разложений, включающих нулевое разложение, равно $(s+1)! - 1$. Но различным числам соответствуют различные разложения (1.1). С другой стороны, любое разложение (1.1) с $n \leqslant s$ задает натуральное число $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots$ $\ldots + n{\cdot}n! = (n+1)! - 1 \leqslant (s+1)! - 1$. Таким образом, любое натуральное число $\leqslant (s+1)! - 1$ может быть представлено в виде разложения (1.1), где $n \leqslant s$.

Разложение (1.1) можно рассматривать в качестве алгоритма измерения, где единица 1 возрастает в n раз на n-м шаге. Для любого натурального числа этот алгоритм прекращает работу через конечное число шагов. Теперь аналогично рассмотрим возможность убывания 1 в n раз на n-м шаге. Если мы предположим, что этот «убывающий» алгоритм может иметь бесконечное число шагов, то получаем факториальное разложение

$$x = \ldots + \frac{a_{-k}}{(k+1)!} + \ldots + \frac{a_{-1}}{2!} + a_1 \cdot 1! + \ldots + a_n \cdot n!, \qquad (1.2)$$

где a_j целые и $0 \leqslant a_k, a_{-k} \leqslant k$. Как мы знаем, бесконечные алгоритмы с фиксированным коэффициентом убывания 1 соответствуют действительным числам. То же справедливо и для алгоритмов (1.2).

Можно рассмотреть и более общие «убывающие» алгоритмы с изменяющейся шкалой. Пусть $m_1, m_2, \ldots$ — бесконечная последовательность натуральных чисел > 1, x — действительное число. Бесконечные последовательности $c_0, c_{-1}, c_{-2}, \ldots$ и $x_1, x_2, \ldots$ определяются следующим образом:

$$\begin{gathered} c_0 = [x],\ x_1 = x - c_0,\ c_{-1} = [m_1 x_1], \\ x_2 = m_1 x_1 - c_{-1},\ c_{-2} = [m_2 x_2], \ldots, \\ c_{-n} = [m_n x_n], \ldots, x_{n+1} = m_n x_n - c_{-n}, n = 1, 2, \ldots \end{gathered} \qquad (1.3)$$

Понятно, что $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ и $0 \leqslant c_{-n} \leqslant m_n - 1$. Алгоритм (1.3) соответствует разложению действительного числа x вида

$$x = c_0 + \frac{c_{-1}}{m_1} + \frac{c_{-2}}{m_1 m_2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_n} + \frac{x_{n+1}}{m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_n}. \qquad (1.4)$$

Так как для $n = 1, 2, \ldots$ получаем $m_n \geqslant 2$ и $0 \leqslant x_{n-1} < 1$, последнее слагаемое в (1.4) неотрицательно и меньше чем $1/2^n$. Оно стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности. Таким образом, мы имеем разложение x в виде бесконечного ряда:

$$x = c_0 + \frac{c_{-1}}{m_1} + \frac{c_{-2}}{m_1 m_2} + \ldots + \frac{c_{-n}}{m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_n} + \ldots \qquad (1.5)$$

Если $m_n = n + 1$, $n = 1, 2, \ldots$, то оно совпадает с (1.2), а если $m_1 = m_2 = \ldots = m$, то с (3.2) гл. 1.

В факториальном случае алгоритм (1.3) обладает интересным свойством, характеризующим рациональные числа. Можно доказать, что если x рационально, то (1.3) приводит к конечному разложению в виде (1.2). Этот результат подтверждает наши рассуждения о поле Q как множестве «физических чисел» и тот факт, что другие числовые системы — это только идеализации, порожденные нашим воображением. Для использования алгоритма (1.3) в факториальном случае нам необходимо только конечное число шагов измерения для любой (рациональной) физической величины.

Однако любое рациональное число допускает также бесконечное представление в виде (1.2). Это следует из тождества

$$x = \frac{c_{-k}}{(k+1)!} + \frac{c_{-(k-1)}}{k!} + \ldots + \frac{c_{-1}}{2!} + c_0 =$$
$$= \ldots + \frac{k+2}{(k+3)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} + \frac{c_{-k}-1}{(k+1)!} + \frac{c_{-(k-1)}}{k!} + \ldots + \frac{c_{-1}}{2!} + c_0.$$

Существуют и другие виды разложений действительных чисел. Например, разложение относительно фиксированной шкалы, где в качестве основания рассматривается произвольное действительное число g, $g > 1$, вместо натурального числа m. Например, мы можем рассмотреть шкалу, где коэффициент убывания 1 равен $\sqrt{2}$. В этом случае мы получаем расширение относительно степеней $\sqrt{2}$. Существуют также отрицательные шкалы и изменяющиеся шкалы, где последовательность $m_1, m_2, \ldots$ зависит от действительного числа x.

Но если мы без особых проблем можем представить измерительный процесс (1.2), содержащий бесконечное число шагов убывания единицы измерения 1, то также несложно представить и аналогичный процесс с возрастанием 1:

$$x = \frac{a_{-k}}{(k+1)!} + \ldots + \frac{a_{-1}}{2!} + a_1 \cdot 1! + \ldots + a_n \cdot n! + \ldots \tag{1.6}$$

Данные алгоритмы измерения порождают новые алгебраические структуры на основе поля рациональных чисел Q. Можно было бы обобщить основные выводы данной книги на эти случаи. В настоящий момент не ясно, в чем заключается основное различие между p-адическими (или m-адическими) физическими моделями и моделями, описываемыми (1.5).

2. Аналог метода Ньютона.

Теорема 2.1. Пусть $F(x)$, $x \in Z_p$, — многочлен с коэффициентами $F_i \in Z_p$. И пусть существует такое $\gamma \in Z_p$, что

$$F(\gamma) = 0(\operatorname{mod} p^{2\delta+1}), \quad F'(\gamma) = 0(\operatorname{mod} p^{\delta}), \quad F'(\gamma) \neq 0(\operatorname{mod} p^{\delta+1}),$$

где δ — натуральное число. Тогда существует такое целое p-адическое число α, что

$$F(\alpha) = 0, \quad \alpha = \gamma(\operatorname{mod} p^{\delta+1}).$$

Доказательство. Условие на производную многочлена можно переписать в виде $F'(\gamma) = up^{\delta}$, где $|u|_p = 1$. Будем использовать метод, очень похожий на обычный действительный метод Ньютона.

Начиная с $\alpha_0 = \gamma$ построим последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ с помощью процедуры итерирования:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{F(\alpha_n)}{F'(\alpha_n)}. \tag{2.1}$$

Докажем, что все α_n являются p-адическими целыми числами и

$$F(\alpha_n) = 0 (\operatorname{mod} p^{2\delta+1+n}), \quad n \geqslant 0, \tag{2.2}$$

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} (\operatorname{mod} p^{\delta+n}), \quad n \geqslant 1. \tag{2.3}$$

Будем доказывать (2.2) и (2.3) по индукции относительно n. Пусть (2.2) и (2.3) выполняются для некоторого $n \geqslant 0$ (если $n = 0$, то рассматриваем только (2.2)). Так как $\alpha_n = \alpha_0 (\operatorname{mod} p^{\delta+1})$, то $F'(\alpha_n) = F'(\alpha_0) = up^\delta$. Значит, $F'(\alpha_n) = u_n p^\delta$, где $|u|_p = 1$. Следовательно, используя (2.2), получаем, что α_{n+1} является p-адическим целым числом и $\alpha_{n+1} = \alpha_n (\operatorname{mod} p^{\delta+n+1})$.

Далее, разложим многочлен $F(x)$ относительно степеней $x - \alpha_n$:

$$F(x) = F(\alpha_n) + F'(\alpha_n)(x - \alpha_n) + (x - \alpha_n)^2 G(x),$$

где $G(x)$ — многочлен с p-адическими целыми коэффициентами. Пусть $x = \alpha_{n+1}$. Используя (2.1), получаем

$$F(\alpha_{n+1}) = \left(\frac{F(\alpha_n)}{F'(\alpha_n)}\right)^2 G(\alpha_n).$$

Значит, $F(\alpha_{n+1}) = 0 (\operatorname{mod} p^{2\delta+2+2n})$. Таким образом, (2.2) и (2.3) выполняются для всех n.

Из (2.3) получаем, что последовательность $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится. Обозначим этот предел α. Очевидно, что $\alpha = \alpha_0 = \gamma (\operatorname{mod} p^{\delta+1})$. Более того, из (2.2) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} F(\alpha_n) = 0$. С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} F(\alpha_n) = F(\alpha)$. Таким образом, $F(\alpha) = 0$.

Следствие 2.1. Пусть $p(x)$ — многочлен с целыми p-адическими коэффициентами и существует такое $\gamma \in Z_p$, что

$$F(\gamma) = 0 (\operatorname{mod} p), \quad F'(\gamma) \neq 0 (\operatorname{mod} p).$$

Тогда существует такое $\alpha \in Z_p$, что

$$F(\alpha) = 0, \quad \alpha = \gamma (\operatorname{mod} p).$$

На компьютере несложно реализовать алгоритм нахождения квадратного корня. Такая программа была написана моим студентом В. Безгиным. Можно вычислять квадратные корни для достаточно больших p с практически произвольным числом p-адических цифр. Например, для $p = 11$: $\sqrt{3} = 5268199439283491\ldots$ Обозначим p-адические цифры, соответствующие натуральным числам, большим 9, с помощью букв английского алфавита: $10 = A$, $11 = B$, $12 = C$, $13 = D$ и т. д. Например, если $p = 17$, то $\sqrt{2} = 6EE854EE72FF\ldots$ или $\sqrt{13} = 93CG595D507B3F\ldots$, или $\sqrt{15} = 7C6DF22A0F5\ldots$ С помощью этой программы можно быстро показать, что в Q_{17} не существует квадратных корней из 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14. Например, мы можем выбрать $Q_{17}(\sqrt{3})$, $Q_{17}(\sqrt{17})$ и $Q_{17}(\sqrt{51})$ как все квадратичные расширения Q_{17}.

3. Отсутствие дифференцируемых отображений из Q_p в R. Попытаемся определить дифференцируемые отображения между банаховыми пространствами над p-адическим числовым полем и действительным числовым полем. Результат будет отрицательным: таких отображений не существует.

Теперь дадим определение линейного отображения между линейными пространствами, построенными над различными полями. Это определение является частным случаем более общего определения функтора между моделями (см. литературу по теории категорий).

Определение 3.1. Пусть B — банахово пространство над полем I, а F — банахово пространство над полем K. Линейное отображение A из B в F — это пара (A, g), где:

A — гомоморфизм аддитивных групп банаховых пространств B и F такой, что $A(x+y) = A(x) + A(y)$ для всех $x, y \in B$;

g — гомоморфизм мультипликативных групп полей I и K такой, что $g(\lambda\rho) = g(\lambda)g(\rho)$;

гомоморфизмы A и g связаны следующим образом: $A(\lambda x) = g(\lambda)A(x)$ для $x \in B$ и $\lambda \in I$, $\lambda \neq 0$.

Теперь определим дифференцируемые отображения.

Определение 3.2. Отображение F: $B \to F$ дифференцируемо по Фреше в $x \in B$, если существует непрерывное линейное отображение Df_x: $B \to F$ такое, что для всех $h \in B$ выполняется равенство

$$F(x+h) = f(x) + Df_x(h) + o(h),$$

где $\|o(h)\|/\|h\| \to 0$ при условии $\|h\| \to 0$.

Теперь сформулируем основную теорему.

Теорема 3.1. Любое дифференцируемое по Фреше отображения из Q_p в R имеет нулевую производную; это верно и для отображений $Q_p \to Q_r$, $p \neq r$.

Доказательство. Обозначим символом A дифференциал Df_x, и пусть g — ассоциированный гомоморфизм из мультипликативной группы Q_p в R. Тогда получаем

$$A(\alpha+\beta) = A((\alpha+\beta)1) = g(\alpha+\beta)A(1),$$

$$A(\alpha) + A(\beta) = [g(\alpha) + g(\beta)]A(1).$$

Так как $A(1) \neq 0$, то

$$g(\alpha+\beta) = g(\alpha) + g(\beta).$$

Используя это равенство, получаем, что $g(n) = n$ для любого натурального n. Таким же образом уравнение $g(m/m) = g(1) = 1$

содержит $g(x) = x$ для каждого положительного рационального x. Рассмотрим теперь последовательность положительных рациональных чисел

$$x_n = 1 + \frac{2 + p^n}{1 + p^{2n}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Эта последовательность сходится к 3 в Q_p и к 1 в R. Получаем

$$g(\lim_{n \to \infty} x_n) = g(3) = 3,$$

тогда как

$$\lim_{n \to \infty} g(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_n = 1.$$

Аналогично мы можем показать, что все отображения из Q_p в C имеют нулевую производную. Последнее утверждение можно доказать, рассмотрев последовательность $x_n = p^n$.

Список литературы

1. *Альбеверио С., Хоэг-Крон П.* (*Albeverio S., Hoegh-Krohn P.*) Mathematical theory of Feynman path integrals. Lecture notes in Math. — Berlin: Springer, 523 (1978).
2. *Альбеверио С., Фенстад И., Хоэг-Крон П., Линдстрем Т.* (*Albeverio S., Fenstad I., Hoegh-Krohn P., Lindstrom T.*) Nonstandard method in the stochastic analysis and mathematical physics. — L.: Academic Press, 1990.
3. *Арефьева И. Я., Драгович Б., Волович И. В.* (*Aref'eva I. Ya., Dragovic B., Volovich I. V.*) On the p-adic summability of the anharmonic oscillator // Phys. Lett. B. 1988. T. 200, C. 512–514.
4. *Арефьева И. Я., Драгович Б., Волович И. В.* (*Aref'eva I. Ya., Dragovic B., Volovich I. V.*) Open and closed p-adic strings and quadratic extensions of number fields // Phys. Lett. B. N. 1988. T. 200, C. 512-516.
5. *Арефьева И. Я., Драгович Б., Фрамптон П. Х., Волович И. В.* (*Aref'eva I. Ya., Dragovic B., Frampton P. H., Volovich I. V.*) The wave function of the Universe and p-adic gravity // Int. J. of Modern Phys. A. 1991. T. 6, № 24. C. 4341–4358.
6. *Бельтраметти Е., Казинелли Г.* (*Beltrametti E., Cassinelli G.*) Quantum mechanics and p-adic numbers // Found. Phys. 1972. T. 2, C. 1–7.
7. *Бенуа-Пино Ж., Хренников А. Ю., Котович Н. В.* Сегментация образов в p-адической и евклидовой метриках // Докл. Акад. Наук. 2001. Т. 381, № 5. С. 604–609.
8. *Березин Ф. А.* Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве // УФН. 1980. Т. 132, С. 497–548.
9. *Безгин В. В., Хренников А. Ю., Эндо М., Юко М.* (*Bezgin V. V., Khrennikov A. Yu., Endo M., Uoko M.*) Статистическая биологическая модель с p-адической статистической стабилизацией // Доклады Академии Наук. 1994. Т. 334, № 1. С. 5–8.
10. *Блохинцев Д. И.* Пространство и время в микромире. — М.: Наука, 1982.

11. *Богачев В. И., Смолянов О. Г.* Аналитические свойства бесконечномерных распределений // УМН. 1990. Т. 45, С. 3–84.

12. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1984.

13. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т.* Основы аксиоматического подхода к квантовой теории поля. — М.: Наука, 1969.

14. *Боголюбов Н. Н., Боголюбов Н. Н.* (*мл.*) Введение в квантовую статистическую механику. — М.: Наука, 1984.

15. *Боголюбов Н. Н., Медведев Б. Н., Поливанов М. К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. — М.: Физматгиз, 1958.

16. *Борель Е.* Вероятность и безусловность. — М.: Наука, 1970.

17. *Боревич З. И., Шафаревич И. Р.* Теория чисел. — М.: Наука, 1985.

18. *Чианчи Р., Хренников А. Ю.* (*Cianci R., Khrennikov A. Yu.*) P-adic superanalysis, 1. Infinitely generated Banach superalgebras and algebraic groups // J. Math. Phys. 1993. Т. 34, № 5. С. 1990–1995.

19. *Чианчи Р., Хренников А. Ю.* (*Cianci R., Khrennikov A. Yu.*) P-adic superanalysis, 2. Supermanifolds and differential operators // J. Math. Phys. 1993. Т. 34, № 5. С. 1995–1999.

20. *Чианчи Р., Хренников А. Ю.* (*Cianci R., Khrennikov A. Yu.*) P-adic superanalysis, 3. Super-Lie groups // J. Math. Phys. 1993. Т. 35, № 3.

21. *Чианчи Р., Хренников А. Ю.* (*Cianci R., Khrennikov A. Yu.*) Can p-adic numbers be useful to regularize divergent expectation values of quantum observables? — Preprint / Int. J. of Theor. Phys. — Genova: Depart. Math., Univ. Genova, 1993.

22. *Чианчи Р., Хренников А. Ю.* Неархимедовы суперполя // Известия ВУЗов: Физика. 1993, № 11. С. 35–38.

23. *Крамер Х.* (*Cramer H.*) Mathematical theory of statistics. — Princeton Univ. Press, 1949.

24. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. — М.: Наука, 1983.

25. *Драгович Б.* (*Dragovic B.*) On signature change in p-adic space-time // Mod. Phys. Lett. 1991. Т. 6, № 25. С. 2301–2307.

26. *Драгович Б.* (*Dragovic B.*) P-adic perturbation series and adelic summability // Phys. Lett. B. 1991. Т. 256, № 3/4. С. 392–396.

27. *Эскассут А.* (*Escassut A.*) T-filters, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique // Ann. Inst. Fourier. 1975. Т. 25, № 2. С. 45–80.

28. *Фрамптон П. Х., Окада Ю.* (*Frampton P. H., Okada Y.*) P-adic string N-point function // Phys. Rev. Lett. B. 1988. Т. 60, С. 484–486.

29. *Фреше М.* (*Frechet M.*) Recherches theoriques modernes sur la theorie des probabilities. — P.: Univ. Press, 1937–1938.

30. *Френель Дж.*, *Матан Б.* (*Fresnel J.*, *De Mathan B.*) Sur la transformation de Fourier p-adique // C. R. Acad. Sci. Paris, 1973. T. 277, C. 711–714.

31. *Фреунд П.*, *Олсон М.* (*Freund P.*, *Olson M.*) Non-Archimedean strings // Phys. Lett. B. 1987. T. 199, C. 186–190.

32. *Фреунд П.*, *Виттен Э.* (*Freund P.*, *Witten E.*) Adelic string amplitudes // Phys. Lett. B. 1987. T. 199, C. 191–195.

33. *Жервейс Дж.*(*Gervais J.*) P-adic analyticity and Virasoro algebras for conformal theories in more than two dimensions // Phys. Lett. B. 1988. T. 201, C. 306–310.

34. *Хида Т.* Броуновское движение. — М.: Наука, 1987.

35. *Хида Т.*, *Штрайт Л.* (*Hida T.*, *Streit L.*) On quantum theory in terms of white noise analysis // Nagoya Math. J. 1977. T. 68, C. 21–34.

36. *Хида Т.*, *Штрайт Л.* (*Hida T.*, *Streit L.*) Generalized Brownian functionals and the Feynman integral // Stoch. Process Appl. 1983. T. 16, C. 55–69.

37. *Хренников А. Ю.* Уравнения с бесконечномерными псевдодифференциальными операторами // Доклады Академии Наук СССР. 1982. Т. 267, № 6. С. 1313–1318.

38. *Хренников А. Ю.* (*Khrennikov A. Yu.*) Some applications of Keller's convergence structure to the nonlinear functional analysis // Abh. Acad. Wiss. 1984. T. 2, C. 112–118.

39. *Хренников А. Ю.* Теорема существования для решения бесконечномерного уравнения Шредингера с квадратичным потенциалом // УМН. 1984. Т. 39, № 1. С. 163–164.

40. *Хренников А. Ю.* Фундаментальные решения эволюционных псевдодифференциальных уравнений // Дифф. уравнения. 1985. Т. 21, № 2. С. 346–348.

41. *Хренников А. Ю.* Дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах и эволюционные псевдодифференциальные уравнения // Дифф. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1596–1602.

42. *Хренников А. Ю.* Об одной теории обобщенных мер на гильбертовом пространстве // Вестник МГУ: Математика. 1985. Т. 2, С. 81–83.

43. *Хренников А. Ю.* Мера Фейнмана в фазовом пространстве и символы бесконечномерных псевдодифференциальных операторов // Матем. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 734–742.

44. *Хренников А.Ю.* Интегрирование по обобщенным мерам на топологических линейных пространствах // Труды моск. матем. общества. 1986. Т. 49, С. 113–129.

45. *Хренников А.Ю.* Вторичное квантование и псевдодифференциальные операторы // ТМФ. 1986. Т. 66, № 3. С. 339–349.

46. *Хренников А.Ю.* Суперанализ: обобщенные функции и псевдодифференциальные операторы // ТМФ. 1987. Т. 73, № 3. С. 420–429.

47. *Хренников А.Ю.* Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы // Известия Акад. Наук СССР: Математика. 1987. Т. 51, № 6. С. 46–68.

48. *Хренников А.Ю.* Фейнмановские меры на локально выпуклых пространствах // Сиб. матем. журнал. 1988. Т. 29, № 4. С. 180–189.

49. *Хренников А.Ю.* Псевдодифференциальные уравнения в функциональном анализе, 1. Метод преобразования Фурье // Дифф. уравнения. 1988. Т. 24, № 12. С. 2144–2154.

50. *Хренников А.Ю.* Псевдодифференциальные уравнения в функциональном анализе, 2. Формула Фейнмана–Каца // Дифф. уравнения. 1989. Т. 25, № 2.

51. *Хренников А.Ю.* Квантование на неархимедовом суперпространстве // Труды международной конференции «Актуальные проблемы комплексного анализа». — Ташкент, 1989. № 129.

52. *Хренников А.Ю.* Принцип соответствия в квантовых теориях поля и релятивистской бозонной струны // Матем. сборник. 1989. Т. 180, № 6. С. 763–786.

53. *Хренников А.Ю.* Квантование поля бозонной струны и бесконечномерных псевдодифференциальных операторов. Фиксированная мера // ТМФ. 1989. Т. 80, № 2. С. 226–238.

54. *Хренников А.Ю.* Квантование бозонного струнного поля и нелинейное уравнение Клейна–Гордона // Известия ВУЗов: Физика. 1990. Т. 33, № 1. С. 56–60.

55. *Хренников А.Ю.*, *Котович Н.В.* Представление и сжатие изображений с помощью m-адической системы координат // Докл. Акад. Наук. 2002. Т. 387, №. 2. С. 159–163.

56. *Хренников А.Ю.* Функциональный суперанализ // УМН. 1988. Т. 43, № 2. С. 72–114.

57. *Хренников А.Ю.* Псевдодифференциальные операторы на неархимедовых пространствах // Дифф. уравнения. 1990. Т. 26, № 6. С. 1044–1053.

58. *Хренников А.Ю.* Представления Шредингера и Баргмана–Фока в неархимедовой квантовой механике // Доклады Акад. Наук СССР: Физика. 1990. Т. 313, № 2. С. 325–329.

59. *Хренников А.Ю.* Представление вторичного квантования над неархимедовыми числовыми полями // Доклады Акад. Наук СССР: Физика. 1990. Т. 314, № 6. С. 1380–1384.

60. *Хренников А.Ю.* (*Khrennikov A. Yu.*) Non-archimedean white noise // Proc. Int. Conf. on Gaussian Random Fields, Nagoya. 1990. T. 127.

61. *Хренников А.Ю.* Псевдотопологические коммутативные супералгебры с нильпотентными духами // Матем. заметки. 1990. Т. 48, С. 114–122.

62. *Хренников А.Ю.* Квантовая механика над расширениями Галуа числовых полей // Доклады Акад. Наук СССР: Физика. 1990. Т. 315, № 4. С. 860–864.

63. *Хренников А.Ю.* Формула Троттера для уравнений теплопроводности и Шредингера на неархимедовом суперпространстве // Сиб. матем. журнал. 1991. Т. 32, № 5. С. 155–165.

64. *Хренников А.Ю.* Математические методы неархимедовой физики // УМН. 1990. Т. 45, № 4. С. 79–110.

65. *Хренников А.Ю.* Вещественно-неархимедова структура пространства–времени // ТМФ. 1991. Т. 86, № 2. С. 177–190.

66. *Хренников А.Ю.* Обобщенные функции на неархимедовом суперпространстве // Известия Акад. Наук СССР: Математика. 1991. Т. 55, № 6, С. 1257–1286.

67. *Хренников А.Ю.* P-адическая вероятность и статистика // Доклады Акад. Наук СССР: Математика. 1992. Т. 322, № 6. С. 1075–1079.

68. *Хренников А.Ю.* Бесконечномерное уравнение Лиувилля // Матем. сборник. 1992. Т. 183, № 1. С. 20–44.

69. *Хренников А.Ю.* Обобщенные функции и гауссовские континуальные интегралы по неархимедовым функциональным пространствам // Известия Акад. Наук СССР: Математика. 1991. Т. 55, № 4. С. 780–814.

70. *Хренников А.Ю.*, *Эндо М.* Неограниченность p-адического распределения Гаусса // Известия Акад. Наук СССР: Математика. 1992. Т. 56, № 4. С. 456–476.

71. *Хренников А.Ю.* Аксиоматика p-адической теории вероятностей // Доклады Акад. Наук СССР: Математика. 1992. Т. 326, № 5. С. 1075–1079.

72. *Хренников А.Ю.* (*Khrennikov A.Yu.*) P-adic quantum mechanics with p-adic valued functions // J. Math. Phys. 1991. T. 32, № 4. C. 932–937.

73. *Хренников А.Ю.* (*Khrennikov A.Yu.*) Analysis on p-adic superspace, 1. Generalized functions: Gaussian distribution // J. Math. Phys. 1992. T. 33, № 5. C. 1636–1642.

74. *Хренников А.Ю.* (*Khrennikov A.Yu.*) Analysis on p-adic superspace, 2. Differential equations // J. Math. Phys. 1992. T. 33, № 5. C. 1643–1647.

75. *Хренников А.Ю.* (*Khrennikov A.Yu.*) Non-archimedean theory of probability: frequency and axiomatic theories. — Preprint / Depart. Math., Univ. Genova. № 209. — Genova, 1992.

76. *Хренников А.Ю.* (*Khrennikov A.Yu.*) P-adic valued quantization. — Preprint / Depart. Math., Univ. Genova. № 215. — Genova, 1992. To be published in Int. J. of Theor. Phys. 1993.

77. *Хренников А.Ю.* О теории бесконечномерного суперпространства: рефлексивные банаховы супермодули // Матем. сборник. 1992. Т. 183, С. 75–98.

78. *Хренников А.Ю.* Формулы интегрирования по частям для фейнмановских и гауссовских распределений на суперпространствах // Известия Акад. Наук СССР: Математика. 1990. Т. 4, С. 126–133.

79. *Хренников А.Ю.* (*Khrennikov A.Yu.*) Non-archimedean analysis: quantum paradoxes dynamical systems and biological systems. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1994.

80. *Хренников А.Ю.* Некоммутативное дифференциальное исчисление и проективные тензорные произведения некоммутативных банаховых алгебр // Доклады Акад. Наук СССР: Математика. 1991. Т. 321, С. 722–726.

81. *Хренников А.Ю.* (*Khrennikov A.Yu.*) Classical and quantum mental models and Freud's psychoanalysis // Ser. Math. Model in Physics, Eng, Economy and Cogn. Sc., Vaxjo Univ. Press. 2001.

82. *Хренников А.Ю.* Центральная предельная теорема для квазигауссовского распределения на бесконечномерном суперпространстве // Теория вероятн. и ее применения. 1990. Т. 35, С. 599–602.

83. *Хренников А.Ю.* (*Khrennikov A.Yu.*) The theory of probability and the theory of numbers // Com. Math. Univ. Sancti Pauli (Rikkyo Univ.). 1992. T. 41, № 2. C. 135–140.

84. *Хренников А.Ю.* Процесс Винера–Фейнмана на суперпространстве // Теория вероятн. и ее применения. 1993. Т. 38, № 3.

85. *Хренников А. Ю.* Фундаментальные решения над полем p-адических чисел. Алгебра и анализ // Ленинград. мат. журн. 1992. Т. 4, № 3. С. 248–266.
86. *Хренников А. Ю.* Формула Фейнмана–Каца на фазовом суперпространстве, 1 // Дифф. уравнения. 1992. Т. 28, № 8. С. 1434–1443.
87. *Хренников А. Ю.* Формула Фейнмана–Каца на фазовом суперпространстве, 2 // Дифф. уравнения. 1992. Т. 28, № 9. С. 1599–1607.
88. *Хренников А. Ю.* Обобщенные функции с неархимедовыми значениями и их применения в квантовой механике и теории поля // Анализ-3, Современная математика и ее применения / ВИНИТИ. — М., 1993.
89. *Хренников А. Ю.* (*Khrennikov A. Yu.*) Gauge connection between real and p-adic space-time // Proc. of Marcel Grossman Meeting on General Relativity, Kyoto. 1991 (*Sato Ed. H.*, *Nakamura T.* Singapore: World scientific, 1992. С. 498–500).
90. *Хренников А. Ю.* P-адическая теория вероятностей и ее применения. Принцип статистической стабилизации частот // ТМФ. 1993. Т. 97, № 3. С. 348–363.
91. *Хренников А. Ю.* Статистическая интерпретация p-адически-значной квантовой теории поля // Доклады Акад. Наук: Физика. 1993. Т. 328, № 1. С. 46–50.
92. *Хренников А. Ю.* P-адические статистические модели // Доклады Акад. Наук: Математика. 1993. Т. 330, № 3. С. 300–304.
93. *Хренников А. Ю.* Дискретные Q_p-значные вероятности // Доклады Акад. Наук: Математика. 1993. Т. 333, № 2. С. 162–164.
94. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.
95. *Колмогоров А. Н.* Логические основы теории информации и теории вероятностей. Logical basis for information theory and probability theory // IEEE Trans., IT-14. 1968. С. 662–664.
96. *Коноплева Н.*, *Попов Н.* Калибровочные поля. — М.: Атомиздат, 1980.
97. *Малер К.* (*Mahler K.*) P-adic numbers and their functions // Cambridge tracts in math. Т. 76. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
98. *Махалдиани Н.* Динамика числовых полей и проблема согласованности пространства в теориях полей и струн. — Дубна, 1989.
99. *Мизес Р.* Вероятность, статистика, истина. — М.: ГТТИ, 1933.
100. *Мизес Р.* The mathematical theory of probability and statistics. — L.: Academic, 1964.

101. *Монна А.* (*Monna A.*) Analyse non-Archimedianne. — N.Y.: Springer, 1970.

102. *Монна А.*, *Спрингер Т.* (*Monna A.*, *Springer T.*) Integration non-Archimedianne, 1, 2 // Indag. Math. 1970. T. 25, C. 634–653.

103. *Монна А.*, *Блий Ф.* (*Monna A.*, *Blij F.*) Models of space and time in elementary physics // J. Math. Anal. And Appl. 1968. T. 22, C. 537–545.

104. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. — М.: Наука, 1978.

105. *Попов В.Н.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. — М.: Атомиздат, 1976.

106. *Шихов В.* (*Shikhov W.*) Ultrametric calculus. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.

107. *Шихов В.*, *Морита Я.* (*Shikhov W.*, *Morita Y.*) Duality of projective limit spaces and inductive limit spaces over a nonspherically complete non-Archimedean field // Tohoku Math. J. 1986. T. 38, № 3. C. 387–397.

108. *Шихов В.* (*Shikhov W.*) *P*-adic nonconvex compactoids // Proc. Konik. Ned. Acad. 1989. T. 92, № 3. C. 339-342.

109. *Шихов В.* (*Shikhov W.*) Topological stability of p-adic compactoids under continuous injections // Reports of Catholic Uni. Nijmegen. 1986. № 8644.

110. *Шихов В.* (*Shikhov W.*) Non-archimedean harmonic analysis. — Nijmegen: Catholic Univ. Press, 1967.

111. *Славнов А.А.*, *Фадеев Л.Д.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1988.

112. *Смирнов В.А.* (*Smirnov V.A.*) Calculation of general p-adic Feynman amplitude // Commun. Math. Phys. 1992. T. 149, C. 623-633.

113. *Смирнов В.А.* (*Smirnov V.A.*) Renormalization in p-adic quantum field theory // Mod. Phys. Lett. 1991. T. 6, C. 1421–1427.

114. *Смолянов О.Г.*, *Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные интегралы. — М.: Изд-во МГУ, 1990.

115. *Смолянов О.Г.* Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование по Шредингеру // Доклады Акад. Наук СССР. 1982. Т. 263, № 2. С. 558–561.

116. *Смолянов О.Г.*, *Хренников А.Ю.* Центральная предельная теорема для обобщенных мер на бесконечномерном пространстве // Доклады Акад. Наук СССР. 1985. Т. 281, № 2. С. 279–283.

117. *Смолянов О.Г.*, *Хренников А.Ю.* Алгебра бесконечномерных псевдодифференциальных операторов // Доклады Акад. Наук СССР. 1987. Т. 292, № 6. С. 1310–1313.

118. *Смолянов О.Г.*, *Фомин С.В.* Меры на топологических линейных пространствах // УМН. 1976. Т. 31, С. 3–56.

119. *Торнье Е.* (*Tornier E.*) Wahrtscheinlichkeitsrechnunug und allgemeine Integrationstheorie. — Leipzing: Univ. Press, 1936.

120. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Мир, 1979.

121. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. — М.: Наука, 1964.

122. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции над полем p-адических чисел // УМН. 1988. Т. 43, № 5. С. 17–53.

123. *Владимиров В. С.* О спектре безусловных псевдодифференциальных операторов над полем p-адических чисел // Алгебра и анализ. 1990. № 2, С. 107–124.

124. *Владимиров В. С.* (*Vladimirov V. S.*) On the Freund–Witten adelic formula for Veneziano amplitudes // Lett. Math. Phys. 1993. T. 27, C. 123–131.

125. *Владимиров В. С.*, *Волович И. В.* Суперанализ, 1. Дифференциальное исчисление // ТМФ. 1984. Т. 59, № 1. С. 3–27.

126. *Владимиров В. С.*, *Волович И. В.* Суперанализ, 2. Интегральное исчисление // ТМФ. 1984. Т. 60, № 2, С. 169–198.

127. *Владимиров В. С.*, *Волович И. В.* P-адическая квантовая механика // Доклады Акад. Наук СССР: Физика. 1988. Т. 302, № 2. С. 320–322.

128. *Владимиров В. С.*, *Волович И. В.* (*Vladimirov V. S.*, *Volovich I. V.*) P-adic quantum mechanics // Commun. Math. Phys. 1989. T. 123, C. 659–676.

129. *Владимиров В. С.*, *Волович И. В.*, *Зеленов Е. И.* (*Vladimirov V. S.*, *Volovich I. V.*, *Zelenov E. I.*) P-adic numbers in mathematical physics. — Singapoure: World Scientific Publ., 1993.

130. *Владимиров В. С.*, *Волович И. В.*, *Зеленов Е. И.* Спектральная теория в p-адической квантовой механике // Известия Акад. Наук СССР: Математика. 1990. Т. 54, № 2. С. 275–302.

131. *Волович И. В.* (*Volovich I. V.*) Number theory as the ultimate physical theory. — Preprint / CERN. № 4781/87. — Geneva, 1987.

132. *Волович И. В.* (*Volovich I. V.*) P-adic string // Class. Quant. Gra. 1987. T. 4, C. 83–87.

133. *Волович И. В.* (*Volovich I. V.*) Harmonic analysis and p-adic strings // Lett. Math. Phys. 1988. T. 16, C. 61–64.

134. *Угланов А. В.* Об одной конструкции фейнмановского интеграла. 1978. Т. 243, № 6. С. 1406–1409.

135. *Вудкок К. Ф.* (*Woodcock C. F.*) Fourier analysis for p-adic Lipschitz functions // J. London Math. Soc. 1974. T. 7, C. 681–683.

136. *Вудкок К. Ф.* (*Woodcock C. F.*) Convolutions on the ring of p-adic integers // J. London Math. Soc. 1979. T 20, C. 101–108.

137. *Зеленов Е.И.* P-адическая квантовая механика для $p = 2$ // ТМФ. 1989. Т. 54, № 2. С. 253–263.

138. *Зеленов Е.И.* (*Zelenov E.I.*) P-adic path integrals // J. Math. Phys. 1991. Т. 32, С. 247–251.

139. *Зеленов Е.И.* (*Zelenov E.I.*) P-adic Heisenberg Group, Maslov Index // Commun. Math. Phys. 1993. Т. 155, С. 489–502.

140. *Звонкин А.К.*, *Левин Л.А.* Сложность конечных объектов и оправданность записи информации и случайности на основе алгоритмов // УМН. 1970. Т. 25, № 6. С. 85–127.